



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Universitätsbibliothek Paderborn**

### **Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften**

**Natorp, Paul**

**Leipzig [u.a.], 1910**

§ 6. Die Stufen der Quantität.

**urn:nbn:de:hbz:466:1-35817**

So viel mag und darf über diese sehr fundamentale Frage an dieser Stelle und für die gegenwärtige Absicht hinreichend sein. Nun aber sind wir vorbereitet zu der Aufgabe, den gesetzmäßigen Stufengang des Prozesses, in dem die reine Erkenntnis sich entwickelt, zu bestimmen. Dieser wird nicht einfach sein, aber aus einfachsten Grundelementen sich ins Unendliche weiter entfalten.<sup>1)</sup>

### I. Die Quantität.

§ 6. (*Die Stufen der Quantität.*) Quantität und Qualität sind als Grundmomente, und als die ersten, unerläßlichsten, am Begriff und Urteil wie an jeder Erkenntnis irgendwelches Gegenstandes seit alter Zeit anerkannt. Weshalb konnte gerade über diese beiden kein Zweifel sein? Darum weil sie nur den ursprünglichen Prozeß der synthetischen Vereinigung eines Mannigfaltigen überhaupt nach seinen zwei untrennbar zusammengehörigen Seiten, gleichsam nach außen und nach innen, oder in peripherischer und zentraler Richtung, darstellen.

Man erinnert sich, daß Kant extensive und intensive Größe dadurch unterscheidet, daß bei jener die Teile dem Ganzen, bei dieser das Ganze den Teilen vorhergehe; d. h. er bezieht jene auf die äußere Sonderung und erst nachkommende Vereinigung, diese auf die innere, wurzelhafte Einheit, die in das Mannigfaltige sich erst auseinanderlege; dementsprechend vertritt jene ihm zugleich die Diskretion, diese die Kontinuität. Ausdrücklich aber ist diese Qualität, nämlich die Kontinuität, für Kant nur Qualität an Größen überhaupt, d. h. an eben dem, was andererseits unter den

1) Ein schlichtes Grundschema des Stufenganges der Synthesis der Quantität und Qualität habe ich in einer Abhandlung d. J. 1890 [125] zuerst vorgelegt; der entsprechende Stufengang der Relation und Modalität ist zuerst aufgestellt in der Abhandlung [127] 1900, dann in den Leitsätzen der Propädeutik und der Logik [132, 133].



Begriffen der Quantität zu denken ist. Daher stellt sich ihm der Stufengang der Qualität an der Größe, geradezu als Bestimmung der Größe selbst, aber als intensiver nicht extensiver, stetiger nicht diskreter dar. Das Ineinander von Quantität und Qualität ist also schon bei ihm sehr eng. Das Quantum ist nur Quantum des Quale, das Quale nur Quale des Quantum; erst beide zusammen begründen die Größe, als den allgemeinen Gegenstand der Mathematik.

Um so unerläßlicher war für ihn die genaue Korrespondenz ja Kongruenz auch des beiderseitigen Stufenganges. Den Stufengang eines synthetischen Prozesses überhaupt aber unterstellt er, wie man weiß, einem allgemeinen Gesetze, wonach der Stufen in jedem Falle drei sein und die dritte allemal entspringen müsse aus einer Verbindung der zweiten mit der ersten, welche Verbindung nicht durch die bloße Zusammennahme der beiden ersten Akte schon gesetzt sei, sondern noch einen eigenen „Actus des Verstandes“ erfordere. Nach diesen allgemeinen Gesichtspunkten, denen, wie die Ausführung selbst zeigen wird, eine zwingende Notwendigkeit innewohnt, ergibt sich der folgende Aufbau des Stufenganges der quantitativen in genauer Beziehung zu dem der qualitativen Synthesis.

Die Quantität überhaupt entspringt daraus, daß an der logischen Grundkorrelation der Einheit und des zu vereinigenden Mannigfaltigen dies letztere ins Auge gefaßt, und zur Klarheit gebracht wird, in welcher Gestalt es eben als Mannigfaltiges und zwar zu vereinigendes Mannigfaltiges notwendig zu denken sei. Ein Mannigfaltiges besagt: eine Mehrheit unterscheidbarer Momente. Die Unterscheidbarkeit gehört als solche zur Qualität; aber sie setzt, nach der Seite der Quantität, die Mehrheit. Diese beiden Auffassungsweisen: Unterscheidbarkeit und Mehrheit, sind zueinander so streng korrelativ, daß jeder Versuch mißlingen muß, sie voneinander loszureißen. Das hindert indes nicht



die abstrakte Sonderung der rein quantitativen Bestimmung der Mehrheit als Mehrheit (wenngleich des Unterscheidbaren) von der qualitativen der Unterscheidbarkeit als Unterscheidbarkeit (wenngleich des Mehreren). Auseinanderhaltung ist beides; rein im quantitativen Sinn aber ist Auseinanderhaltung nur Setzung des Einen und Anderen (Anderen im Sinne des Zweiten).

Darin sind nun die folgenden drei Momente unmittelbar eingeschlossen, als zu jeder Quantitätsauffassung unerlässlich:

1. Eine Mehrheit ist als solche notwendig Mehrheit aus Einheiten. Die Einheit im Sinne des numerisch Einen, des Einzelnen der Zahl nach, ist also der unvermeidliche Ausgang, das unerläßliche Fundament jeder quantitativen Setzung. Es bedeutet den Einsatz des quantitativen Verfahrens selbst, als des Verfahrens der Diskretion. Was in jedem Falle als Eines gelte, ist hierfür gleichgültig. Eine (der Zahl nach) ist die Welt, eins das Atom, oder was sonst man als Letztes (der Teilung) oder Erstes (der Zusammensetzung — auch das gilt hier gleichviel), als letzte Eins gleichsam, mit der die Natur zähle, ansetzen mag. Stellt man ein solches auf, so ist solche Hypothese selbst diktiert durch das Gesetz jenes Denkverfahrens, welches vorschreibt, von irgendetwas als Erstem zu beginnen, einen Anfang überhaupt zu setzen, d. h. aber in quantitativer Hinsicht: ein letztes Eines, etwas, dem unser Gedanke diesen Charakter der Einsheit erteilt. Von jeder Besonderheit solcher Hypothesen ist hier gänzlich abzusehen, es kommt für jetzt einzig an auf das  $\text{ὑποτίθεσθαι}$ , das Grundlegen selbst, das Setzen des Einen „zum“ Grunde, zum Fundament und somit zum Ausgang der quantitativen Setzung überhaupt. Die Notwendigkeit dieses Setzens der Einheit aber liegt klar zutage in der Notwendigkeit eines Anfangens, eines Beginnens oder Einsetzens, wofern überhaupt ein *Procedere* möglich sein soll.



2. Im Anfang liegt aber sofort auch der Hinweis auf den Fortgang. Das wäre kein Anfang, der nicht etwas anfinke: eben das Verfahren, also Fortfahren. Bedeutete also unsere erste Forderung, daß man jedenfalls *A* sagen muß, so besagt die zweite, daß, da man *A* gesagt, man auch *B* sagen muß. Damit ist nicht nur ausgesprochen, daß die Setzung des Einen ein allgemeines, immer wieder zu Gebote stehendes Verfahren des Denkens ist (als solches war es schon auf der ersten Stufe zu verstehen); sondern es ist die Erneuerung der Setzung jetzt in dem bestimmteren Sinne gemeint, daß zum Einen, d. h. indem es gesetzt bleibt, im Verhältnis zu ihm, ein Anderes, sein Anderes, d. h. zwar wiederum Eines, aber als Neues, mithin Zweites, als nicht mehr Erstgesetztes, sondern Zuggesetztes gedacht werden soll, und zu diesem dann ebenso ein ferneres, und so immer ein ferneres. Diesen bestimmteren Sinn also erhält jetzt die Mehrheit. Wohl der bezeichnendste Ausdruck dafür ist die Reihe oder Reihung, Auf- und Aneinanderreihung. Diese ist als solche unbeschränkt, zufolge der Immer-wieder-Anwendbarkeit dieses zweiten Grundverfahrens des Denkens, des Verfahrens der Zusetzung; aber in dieser Unbeschränktheit freilich zugleich unbestimmt. Der sehr positive Sinn und die entscheidende Notwendigkeit dieses Denkschrittes liegt also in der Notwendigkeit des Fort- und Übergangs, der durch das Denken als *Procedere*, nachdem ein Anfang einmal gesetzt, unerlässlich gefordert ist.

So haben wir Einheit und Mehrheit, damit die Einheit als Einheit der Mehrheit, die Mehrheit als Mehrheit von Einheiten; beide Verfahren zueinander streng korrelativ; wie wir überhaupt diese Korrelativität unter sämtlichen reinen Denkfunktionen, je nach ihrer Ordnung und wechselseitigen Stellung, erwarten müssen. Damit aber ergibt sich nun schon von selbst

3. auch der letzte notwendige Schritt des quantitativen



Verfahrens: die Zusammennehmung allemal einer bestimmten, durch diesen neuen Akt eben sich bestimmenden Folge von Einzelsetzungen zu einem Ganzen, d. h. wiederum einer Einheit, aber im neuen Sinn der Einheit aus den Mehreren, ihrer Vereinigung in einem Totale. Die Reihe ginge als solche unbestimmt weiter; in dieser Unbestimmtheit verbliebe die Mehrheit bloß als solche. Daß sie Einheiten in sich schließt und auch selbst in ihrem unbestimmten Fortgang eine gedankliche Einheit doch darstellt, ergäbe noch nicht dies Dritte, um das es sich jetzt handelt. Es ist ein sicherer Unterschied: Mehrheit überhaupt und eine Mehrheit, nämlich eine im Unterschied von einer anderen, also eine wie auch immer bestimmte. Damit ist die weitergehende Forderung gestellt: es solle nicht nur jedes Einzelne für sich, auch nicht bloß mehrere Einzelne der Reihe nach gesetzt werden, auch nicht nur, allemal indem man zum Anderen übergeht, das Erstgesetzte in Gedanken aufbehalten bleiben; sondern es solle auf jeder erreichten Stufe des Prozesses die ganze Reihe der bisherigen Setzungen als ein fortan Bestimmtes, ein nunmehr gesicherter Besitz der Erkenntnis zum Bewußtsein gebracht, dem Erkenntnisschatze des Bewußtseins einverleibt, der Gewinn gleichsam gebucht werden. Damit wird das Procedere selbst erst völlig bestimmt, daß man auf jeder erreichten Stufe sich versichert: bis soweit ist jetzt der Weg durchschritten. Es wird gleichsam ein Einschnitt gemacht, ein Haltpunkt markiert, ein erreichtes Ziel konstatiert, nicht um bei ihm dauernd stehen zu bleiben, sondern des bis dahin Gewonnenen gerade als fester Grundlage für den weiteren Fortschritt des Denkens sich zu versichern.

Durch diesen Akt entsteht offenbar aus der unbestimmten Menge das bestimmte Soviel. Mit diesem schiene dann schon die Zahl eingeführt; wir verbleiben aber für jetzt bei dem unvorgreiflicheren Terminus des Ganzen, als des Totales aus den Einzelposten. In der Zahl hat sich dies



seinen wissenschaftlichen Ausdruck geschaffen; aber dieser Ausdruck, das ganze System von Ausdrücken, welches dazu erfordert wird, kann nicht hier schon vorausgesetzt oder an dieser Stelle eingeführt werden. Nicht die Summen selbst, das Zwei, Drei usf., sondern bloß das Allgemeine des Verfahrens, worauf die Summenbildung freilich beruht, als eines notwendigen und allgemeinen Verfahrens des Denkens überhaupt, war hier herauszustellen und zu formulieren. Sein entscheidendes Merkmal liegt in dem Ab- und Zusammenschluß des erst unbestimmten, unabgeschlossenen Stufenganges zu einem nunmehr bestimmten Ganzen dieses Ganges, allemal soweit er vollbracht ist. Das Vollbringen, Vollenden, das allein ist das hier Entscheidende.

Kant hat es gerade an diesem Beispiel ganz deutlich gemacht, was er bei der Verbindung der zwei ersten Leistungen eines synthetischen Prozesses in der dritten, dennoch selbständigen, im Sinn hatte. Nicht überall, wo die Begriffe der Menge und der Einheit gelten, sei darum auch die bestimmte Vielheit möglich, nämlich nicht im Unendlichen (Kr. § 11, 1); also sei dazu noch ein eigener „Actus des Verstandes“ erforderlich. Vielleicht ist diese Erklärung material anfechtbar; vielleicht ist das Unendliche einer echten Summation fähig, die hier den vortrefflichen Namen der Integration führt. Aber ohne weiteres wenigstens scheint diese nicht zulässig. Ein Hauptsatz der Aristotelischen und von daher der ganzen abendländischen Philosophie bis tief in die Neuzeit hinein war, daß das Unendliche als solches überhaupt keiner Bestimmtheit des Abschlusses fähig sei. Das kann hier noch nicht entschieden werden. Aber auch, wo an der Zulässigkeit des Abschlusses gar kein Zweifel ist, wie bei dem einfachen  $1 + 1$ , ist ein eigener „Actus des Verstandes“, ein eigener Denkschritt für diesen Ab- und Zusammenschluß notwendig anzusetzen. Das bloße Nebeneinanderstellen der Einheiten, auch mit dem Merkmal, daß sie in einer Reihe sich aneinanderschließen sollen,



gäbe noch nicht diese neue Bestimmtheit, diese neue Einheit der Bestimmung, welche die Summe Zwei bedeuten will. Es ist unbedingt nicht dasselbe: Eins und Eins bloß nebeneinandergestellt, nicht zu einer neuen gedanklichen Einheit (der Zweiheit) vereinigt, und dieselben in dieser Vereinigung, als dieser Verein (*unio*) gedacht. Und dieser Unterschied ist nicht ein bloß psychologischer, sondern ein Unterschied im Inhalt des Gedachten. Auch die Forderung dieser Vereinigung ist nicht identisch mit ihrem Vollzug. Es ist nicht selbstverständlich, daß Eins und wiederum Eins überhaupt auf irgendeine, und daß sie nur auf eine einzige Weise, nicht mehrfach, zu einer neuen Gedankeneinheit, der Summe Zwei, vereinigt werden können. Die Ausdrucksweise: Eins und Eins gibt oder macht Zwei, welche die Summe als aus den Summanden erst resultierend darstellt, ist insofern sachlich wohlbegründet. Doch, wie schon gesagt, es sind hier die Fragen, welche unmittelbar den Aufbau der Mathematik angehen, noch nicht zu entscheiden, da sie in den folgenden Kapiteln im gehörigen Zusammenhang behandelt werden sollen.<sup>1)</sup>

1) Kant hat sich die zutreffende Formulierung der Stufen der quantitativen Synthesis erschwert durch die nicht einwandfreie Parallelisierung mit der überlieferten Unterscheidung der Urteile der Quantität nach. Unabhängig davon aber hat er die Stufen richtig bestimmt: in den Prolegomena (§ 20, mit Anmerkung), wo er das „besondere“ Urteil ersetzt durch das „plurative“ („Vielheit ohne Allheit“); ebenda (§ 21), wo er für die dritte Stufe den Ausdruck des „Ganzen“ verwendet; und in der „Kritik“ (§ 11), wo erst Einheit und Menge unterschieden, dann für die dritte Stufe die Bezeichnung „Allheit“ zwar festgehalten, aber durch die bestimmte Zahl erläutert wird. Wichtig und richtig ist es auch, daß in den Proleg. (§ 21) die Einheit erklärt wird durch den Begriff des Maßes. Darin liegt, daß die Einheit nicht isoliert gedacht werden soll, sondern nur als das Eine des Vielen, das dadurch gemessen wird. Darin kommt die Korrelativität aller drei Stufen zum bestimmtesten Ausdruck: das Gemessene ist gegenüber dem Maß Ganzes gegenüber den Teilen.



Man sieht nun schon, wie die drei Stufen der Quantität zusammen einen Kreislauf beschreiben, der sich der Möglichkeit nach ins Unendliche fortsetzt: die bestimmte Vielheit (Zweiheit, Dreiheit usf.) stellt auch wieder ein Eines dar (einen Zweier, Dreier usf.), von dem in neuem Fortgang zu neuen Abschlüssen zu gelangen ist, und so auf immer höheren Stufen weiter. Diese unbeschränkte Fortsetzbarkeit des ganzen dreistufigen Verfahrens der quantitativen Synthesis ist der nächste, unbestreitbare, insoweit rein quantitative Sinn des „Unendlichen“. Aber schwerlich wird dessen ganzer Begriff hierin schon erschöpft sein. Schon als ein Charakteristikum nicht eines Einzelschritts, sondern des ganzen Verfahrens unterscheidet es sich von einer bloßen Quantitätssetzung. Ohnehin muß klar sein, daß das Unendliche, indem es über alle endliche Bestimmtheit und Bestimmbarkeit hinausgeht und sie überbietet, auch über die bloße Quantität hinausgeht und in die Qualität hinübergreift. Auch hiervon wird an späterer Stelle (Kap. IV) genauer zu reden sein.

## II. Die Qualität.

§ 7. (*Die Stufen der Qualität.*) Was die Qualität überhaupt bedeutet, ist oben schon gesagt worden. Sie vertritt die synthetische Einheit als Einheit nicht im Sinne peripherischer Umfassung, sondern zentraler Vereinigung, vielmehr ursprünglichen Einsseins. Die Einheit wird also hier nicht als aus einer voraus gegebenen, wäre es selbst durch ein anderes reines Denkverfahren (das der Quantität) gegebenen Mannigfaltigkeit erst hervorgehende oder herzustellende gedacht. Immerhin unserer logischen Reflexion entsteht sie erst in schrittweis vordringender Selbstvertiefung des Denkens. Insofern hat der Ausdruck der Vereinigung wohl seine Berechtigung. Und da die Reflexion, als „Umbiegung“, also Umkehrung des Erkenntnisweges, notwendig