Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 4. Mathematische Lösungen. Dedekind.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

einen Begriff eingeführt werden. Damit wird zugleich die Berufung hinfällig auf die geometrischen Beweise der Proportionssätze für Inkommensurables, solange diese selbst sich nur auf das Zeugnis der Anschauung berufen. Ließe man auf dieser Grundlage die Stetigkeit für den Raum auch gelten, so fehlt wieder die Berechtigung für die Übertragung auf die Zahl. Die Ausdrückbarkeit des Verhältnisses unter Inkommensurabelem durch die Zahl wird lediglich postuliert, während nach der Rechtmäßigkeit dieses Postulats eben die Frage ist. So bleibt hier logisch immer ein Sprung. Vielleicht ein geglückter, da nachher alles glatt verläuft und ein Widerspruch nicht zutage kommt. Aber ein geglückter Sprung ist immer noch ein Sprung; die Kontinuität des Denkens bleibt unterbrochen; die Stetigkeit der Zahl wird gewonnen auf Kosten der Stetigkeit des Denkens — deren genauer Ausdruck sie vielmehr sein müßte; denn eine andere Grundlage als die Gesetze des reinen Denkens darf die Zahl nicht kennen.

§ 4. (*Mathematische Lösungen. Dedekind.*) Die berühmte Erklärung des Irrationalen durch Dedekind (*32*) sucht ihren Vorzug darin, daß sie die Stetigkeit der Zahl weder schlechthin annehmen noch auf eine Forderung der Anschauung stützen, sondern wenigstens durch eine genaue Definition einführen will. Sie drückt die Tatsache der Nichtexistenz der Grenzwerte unendlicher systematisch gebildeter, aber nicht periodischer Reihen im System der rationalen Zahlen so aus, daß dies System „Lücken" habe. Die Tatsache aber, daß durch jede Reihe der beschriebenen Art, welche einen gesuchten irrationalen Grenzwert ausdrückt, eine Teilung des Systems der rationalen Zahlen auf die angegebene Weise hervorgebracht wird, wird damit ausgedrückt, daß jeder solchen Reihe ein „Schnitt" der rationalen Reihe entspreche. Indem nun einem jeden solchen Schnitt eine und nur eine neue „Zahl" entsprechend gesetzt wird, soll, indem man diese Werte dem System der rationalen Zahlen hinzufügt, das so erweiterte System (der „reellen" Zahlen) als stetig definiert sein. Die Irrationalzahl ist nunmehr nichts als ein solcher, einem Schnitt der rationalen Zahlreihe entsprechend gesetzter neuer Zahlwert.

Diese Art der Einführung des Irrationalen hat in der Tat den großen Vorzug, daß sie keine Unklarheiten bestehen läßt. Die Voraussetzung des Irrationalen und damit der Stetigkeit der Zahl wird nicht für denknotwendig ausgegeben, sondern offen eingestanden, daß man sie, als bloß nicht widersprechend, willkürlich einführt, weil man ohne sie nicht wohl auskommen kann. Besondere Aufmerksamkeit fordert hierbei die Verbindung, in welche das Problem des Irrationalen mit dem der Stetigkeit gesetzt wird. Den Worten nach wird erst durch das Irrationale die Stetigkeit eingeführt. Die stetige Zahlreihe wird definiert durch die auf die angegebene Weise vollzogene Erweiterung des Begriffs der Zahl auf die Grenzwerte unendlicher auch nichtperiodischer Reihen. Im Grunde aber dient vielmehr die Voraussetzung der Lückenlosigkeit der Zahlreihe, um die Setzung der neuen Werte, durch die allemal eine Lücke des Systems der rationalen Zahlen geschlossen wird, zu rechtfertigen. Daß aber so die Voraussetzung der Stetigkeit der Zahlreihe selbst einwandfrei begründet sei, wird sich schwerlich behaupten lassen.

Klargestellt ist: daß nicht etwa, wie früher vielfach angenommen wurde, so wie aus der Stetigkeit die Teilbarkeit ins Unendliche folgt, auch umgekehrt jene mit dieser gegeben ist. Das System der rationalen Zahlen ist „zusammenhängend", d. h. keine Differenz zweier rationaler Werte ist die kleinste, die im rationalen System existiert; aber dies System ist damit noch nicht „lückenlos", da es die irrationalen Werte, die man als reelle Werte doch irgendwie wird gelten lassen müssen, nicht enthält. Denn das ist überhaupt der Begriff des Irrationalen, daß kein rationaler

Wert ihm gleich, jeder entweder größer oder kleiner als er ist.

Klargestellt ist weiter — und darin dürfte der positivste Gewinn der Dedekindschen Betrachtung liegen: daß und wie, dem Gesetz gemäß, nach welchem der irrationale Wert durch Reihen rationaler Werte nicht ausgerechnet, aber in beliebiger Näherung berechnet werden kann, von jedem rationalen Wert sich ausmachen läßt, ob er größer oder kleiner als der fragliche irrationale ist. (Man beachte: ob, nicht auch, um wieviel; denn wenn auch das rational bestimmbar wäre, so würde damit der Wert selbst rational, gegen die Voraussetzung.)

Dagegen das einzige, was des Beweises bedurfte, ist durch jene Argumentation, soviel ich einzusehen vermag, nicht bewiesen. Der schließlich entscheidende Satz, auf den die Einführung des Irrationalen und damit der Stetigkeit sich stützen soll, lautet: daß einem jeden Schnitt des rationalen Systems ein und nur ein bestimmter Wert entspreche, durch dessen Hinzunahme allemal eine Lücke des Systems geschlossen werde; so daß, wenn man sich denkt, daß auf diese Art alle Lücken geschlossen wären, das ganze System damit stetig (lückenlos) würde. Die *petitio principii*, meine ich, sei hier offenkundig. Indem man setzt, daß jedem Schnitt eine Zahl entsprechen und damit das ganze System als lückenloses gegeben sein soll, macht man zwei Voraussetzungen. Erstens setzt man damit „den" Schnitt schon als eindeutig bestimmtes Etwas voraus; und es ist dann nur eine Sache der Benennung, die keiner anderen Forderung als der der Zweckmäßigkeit unterliegt, ob man dieses Etwas eine „Zahl" nennen will. Man setzt mit andern Worten die Lücken zwischen den Stellen der rationalen Reihe selbst als Stellen der erweiterten Reihe, und als solche bestimmt. Wie man aber dazu berechtigt sei, ist gerade die Frage. Man ist es jedenfalls nicht dadurch, daß die Differenz, innerhalb welcher der

Wert, wenn er existiert, liegen muß, sich beliebig klein annehmen läßt. Die immer engere Zusammenschiebung der beiderseitigen Grenzen definiert einen bestimmten Wert eben dann nicht, wenn die beiderseitige Näherung „unendlich“ ist, d. h. immer fortgeht. Denn dies besagt ja, daß immer eine Differenz, also stets ein Spatium bleibt, innerhalb dessen insoweit kein Wert bestimmt, und ins Unendliche nur rationale Werte bestimmbar sind, die immer wieder ein ebensolches Spatium lassen. Man kann zwar beweisen, daß nicht zwei voneinander um einen endlichen Betrag verschiedene Werte x, x' einem solchen Schnitt entsprechen können, weil durch die unbegrenzt fortgehende Verringerung der Differenz der rationalen Werte jede endliche Differenz unterschritten werden würde. Aber damit ist noch nicht ein einziger Wert bestimmt, denn es bleibt immer ein Spatium, und durch ein Spatium wird nicht ein Punkt definiert, solange Punkt und Spatium begriffsverschieden sind. Man kann dasselbe auch so ausdrücken. Bewiesen ist: wenn ein bestimmter einziger Wert der verlangten Art existiert (z. B. $x = \sqrt{2}$), so teilt er die Reihe der rationalen Werte in einziger, nicht mehrfacher Weise. Aber bewiesen ist nicht, daß der Wert existiert.

Man setzt zweitens im Begriff der Lückenlosigkeit die Allheit der Schnitte als gegeben, die doch in keiner Weise gegeben ist. Die rationalen nebst den nichtrationalen, das müssen freilich wohl „alle“ Werte sein. Aber während die Allheit der rationalen Werte durch sichere Definition gegeben ist, so ist die der irrationalen nur durch das negative Merkmal des nicht Rationalen gegeben; positiv kennt man gewisse Klassen irrationaler Werte (im allgemeinen die algebraischen), aber eine erschöpfende Definition „der“ irrationalen Werte ist weder gegeben noch überhaupt möglich. Denn die unendliche nichtperiodische Reihe definiert eben nicht einen bestimmten Wert, sondern definiert nur ein Verfahren, den gesuchten Wert, falls er existiert, durch rationale Werte so annähernd, als man will oder braucht, auszudrücken, oder das Verhältnis des Mehr und Weniger zwischen dem verlangten irrationalen und jedem rationalen oder sonstigen irrationalen Wert bestimmbar zu machen.

Es scheint fast, als ob jener Begründungsweise eine Denkart insgeheim zugrunde läge, die ganz offen zutage liegt in P. du Bois-Reymonds Allgemeiner Funktionentheorie. Dieser führt die Unendlichkeit und Stetigkeit geradezu ein durch eine von ihm idealistisch genannte, in Wahrheit vielmehr im mittelalterlichen Sinne realistische Voraussetzung, der man auch sonst bei Arithmetikern nicht selten begegnet: daß die Objekte der mathematischen Wissenschaft an sich existieren, und diesen an sich existierenden Objekten Eigenschaften zukommen können, denen unser stets endliches Denken nicht gewachsen sei. Wollte man uns nur sagen, wie wir es anstellen sollen, ein nicht gedachtes Objekt existierend zu — denken. Was nicht durch mathematisches Denken gerechtfertigt werden kann, darf auch die Mathematik nicht setzen. Die Existenz mathematischer Objekte kann verständlicher Weise nichts anderes besagen, als daß sie in den Gesetzen des mathematischen Denkens begründet seien.

Es mag befremden, daß ich sagte, der Fehler sei, oder scheine wenigstens, derselbe in der Argumentation Dedekinds. Aber setzt nicht auch sie die Existenz des einzigen Wertes x, welcher der sich ohne Grenzen verengenden Lücke des rationalen Systems entspricht, vollends die Existenz „der" Schnittwerte überhaupt in gleicher Weise voraus: als Existenz mathematischer Objekte, die doch mit dem mathematischen Denken — welches stets im Endlichen verbleiben müsse — nicht erreichbar sei? Mit welchem Recht setzt man beides voraus? Mit dem Rechte des Bedürfnisses. Aber das ist die Bequemlichkeit der Willkürdefinitionen, durch die man ein logisches Genügen so lange nicht erzielt, als nicht das logische Mittel erfunden ist, aus Hunger Brot zu machen.

Das Bedürfnis ist gewiß unabweislich. Geometrie beweist, daß das Verhältnis zwischen Seite und Diagonale des Quadrats auszudrücken wäre gemäß einer Zahlproportion

$$1 : x = x : 2,$$

d. h. sie fordert die mittlere Proportionale zwischen 1 und 2, oder den Zahlwert $x = \sqrt{2}$. Eine existierende Größe verlangt eben einen Ausdruck in der Zahl; und sofern die Größe stetig sein soll, wie von der räumlichen, desgleichen der zeitlichen Größe, woraufhin immer angenommen wird, so ist dadurch die Zahlreihe selbst als stetige gefordert. Aber auch ohne jede Rücksicht auf das Bedürfnis der Geometrie, in reiner Arithmetik ist die mittlere Proportionale zwischen 1 und 2, ist überhaupt das Irrationale und um seinetwillen die Stetigkeit der Zahl unentbehrlich, wenn auch nur die einfachsten Rechnungsarten allgemeine Anwendbarkeit behalten sollen. Nur soll man nicht immer wieder die Unumgänglichkeit der Forderung verwechseln mit ihrem Erfülltsein.

§ 5. (*Lösungen von Weierstraß, Cantor, Pasch, Veronese.*) Trotz allem Gesagten lag in Dedekinds Erklärung der wahre logische Grund der Stetigkeit verborgen, aber eben verborgen; es war noch nötig, ihn ans Licht zu ziehen. Daß er nicht zutage kam, hatte seinen wesentlichen Grund darin, daß immer noch vom Endlichen, Diskreten, Rationalen als dem zweifellos Gegebenen und Bestimmten ausgegangen wurde und dann durch irgendeine bestimmte Beziehung unter Rationalem das Irrationale zur Bestimmung gebracht werden sollte. Das konnte ein für allemal nicht gelingen. Durch keine Kunst läßt sich aus Rationalem Irrationales, aus Diskretem Stetiges machen. Es muß vielmehr gezeigt werden können, daß der nicht rational, d. h. endlich und diskret bestimmte Wert in sich etwas ist und in sich bestimmt ist, ja aus dem Boden des Unendlichen, aus dem er erwächst, eine