Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 8. Die Zahl als Größe - Veränderliche - und als Funktion.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

zahlreiche andere, besonders für die Funktionentheorie folgenreiche Sätze waren nicht zu gewinnen durch eine Rechnung, die im Endlichen stehen bleibt; diese hätte für alle diese Fälle nur den einen unterschiedslosen Begriff „des" Unendlichen zur Verfügung, welcher dann gleichbedeutend erscheint mit dem des aller Berechnung und Bestimmung Entzogenen; mit dem Dunkel, in dem alle Katzen grau sind.

Die einzige Erweiterung und damit zugleich Berichtigung, deren die Aufstellungen Cantors in prinzipieller Hinsicht noch bedurften, war die Ausdehnung der Relativierung, die Cantor mit dem Begriff des Unendlichen nach oben hin in der Reihe seiner „Alefs" richtig vollzogen hat, auch nach unten, d. h., die Anerkennung einer jener genau korrespondierenden unendlichen Reihe von Ordnungen des Unendlichkleinen. Diese Ergänzung hat aber, wie wir sahen, bereits Veronese vollbracht. Die entscheidenden Sätze Cantors über die Mächtigkeiten bleiben dabei alle richtig; gewonnen aber wird eine gesicherte Grundlage für die Infinitesimalanalysis in ihrem ganzen Umfang. Ganz abgesehen übrigens von jedem Ertrag an speziellen mathematischen Einsichten erreicht so das ganze System der Unendlichkeitsbegriffe der Mathematik eine durchsichtige Klarheit und innere Folgerichtigkeit, die, einmal errungen, nicht leichthin wieder preisgegeben werden kann.

Wir haben uns nun zur Infinitesimalanalysis den Übergang zu bahnen durch die Betrachtung der Begriffe der Veränderlichen und der Funktion.

§ 8. (*Die Zahl als Größe — Veränderliche — und als Funktion.*) Mit der Überordnung „der" Zahl über die bestimmten Zahlwerte ist ein wichtiger Begriff im Grunde schon eingeführt, unter dem erst die Zahl tauglich wird, nach der Ahnung der alten Pythagoreer und Platoniker das Sein, oder im bestimmteren Kantischen Terminus: die Realität dem

Denken zu erobern; nämlich der Begriff der Zahl als Größe, d. h. als Veränderliche.

Die Zahl, wie sie bis dahin verstanden wurde, als der bloße Ausdruck des Wieviel, gäbe einen durchaus inkompleten Begriff eines Gegenstandes. Jeder Gegenstand hat Zahl, aber kein Begriff eines Gegenstandes könnte darin erschöpft sein, daß er Zahl (in diesem beschränkten Sinne) ist. Zwar läßt sich die Methode der Zahl in völliger Reinheit entwickeln ohne jede Rücksicht auf noch irgendwie sonst bestimmte Gegenstände. Indem die Mathematik dies tut, schafft sie sich aus der reinen Zahl ein eigenes Objekt, aus der Gesamtheit der denkbaren Zahlbeziehungen eine eigene Welt, die um die ganze übrige Welt der Gegenstände sich nicht zu kümmern braucht. Die Eifersucht, mit der sie über der Reinheit und Selbständigkeit dieser in sich beschlossenen Begriffswelt wacht und alle nicht arithmetischen Begriffe aus der Arithmetik fernhält, kann vom logischen Standpunkt an sich nur gutgeheißen werden. Aber gerade je reiner somit die arithmetische Methode durchgeführt wurde, um so weniger konnte auf die Länge verkannt werden, daß diese Methode einer anderen zu ihrer Ergänzung bedarf, ohne die sie sich selbst nicht vollenden könnte und auch, soweit sie reicht, wie in der Luft stände, für eine wirkliche Erkenntnis der Gegenstände ohne Bedeutung, weil ohne Anwendung bliebe.

Eine Setzung des Denkens, in der nichts gesetzt wäre als — die Setzung selbst, als einzelne, als Reihe einzelner und Zusammenfassung solcher Reihen allemal zu einem Ganzen, und was alles weiter daraus folgt, bliebe zuletzt etwas Unausgedachtes, Unausdenkliches, ein leeres Gedankengespinnst, wie ein System von lauter sorgfältig gezählten Nichtsen. Zahl will doch Zahl von Etwas sein; gefordert ist also eine Methode, gemäß welcher das Etwas, welches gezählt wird, zu setzen sei. Man kann doch nicht ins Unendliche nur immer wieder Zahlen zählen; vielmehr man kann es wohl, aber kann es gewissermaßen nicht wollen, es kann nicht die letzte Absicht des Zählverfahrens sein. Aber ebensowenig dürfte man sich dabei beruhigen, daß die zu zählenden Gegenstände eben anderweitig gegeben werden müssen; daß es, wie durch glücklichen Zufall, eine Eigenschaft sogar jedes irgendwie Gegebenen sei, auch irgendwie zählbar zu sein, so daß freilich der Methode der Zählung die Gelegenheiten der Anwendung nie mangeln werden. Man verlangt vielmehr einen inneren Zusammenhang einzusehen zwischen dem Verfahren der Zählung und einem anderen, mindestens so ursprünglichen Denkverfahren, in welchem das zu zählende Etwas entspringe; man verlangt zu erkennen, daß und wie diese verschiedenen Verfahrungsweisen des Denkens kraft ihrer eigenen Gesetzlichkeit so ineinandergreifen, daß notwendig der Zahl auch stets ein zählbares Etwas, dem Etwas stets die Zahl zu Gebote steht.

Der Ausdruck dieser wesentlichen Beziehung der Methode der Zahl auf eine andere, noch verborgene Methode, ein zählbares Etwas zu setzen, ist nun wohlbekannt und auch den Arithmetikern geläufig, nämlich der Ausdruck der Größe. Das Verhältnis der Begriffe Zahl und Größe (πλῆθος, μέγεθος — *multitudo, magnitudo*) bedarf aber einer genaueren Bestimmung. Allzu oft werden ohne deutliche Begründung, zwar nicht die einzelnen Zahlen, wohl aber irgendwelche zusammengesetzte Zahlgebilde auf einmal Größen genannt; besonders wo Zählungen mit verschiedenen Einheiten in Frage kommen. So sprach man namentlich früher gern von komplexen Größen statt Zahlen; auch bei der Einführung des Irrationalen tritt regelmäßig der Ausdruck Größe auf; ja schon das Verhältnis, auch als bloß durch die Zahl ausgedrückt, wird Größe genannt; und so die Bruchzahl. Fast immer spielt auch eine nähere oder fernere Erinnerung an räumliche Anschauung mithinein; denn das Räumliche vor allem gilt als Größe, nicht bloß Zahl.

Der nächste Grund der Unterscheidung und zugleich engen Verbindung zwischen den Begriffen Zahl und Größe scheint dieser zu sein: Zahl für sich besagt nur das Wieviel, aber nicht das Wieviel wovon. Zwar ist es stets das Wieviel einer gedachten Einheit; was aber diese Einheit sei, braucht solange gar nicht gefragt zu werden, als immer eine und dieselbe Einheit vorausgesetzt wird; sobald dagegen verschiedene Einheiten in Frage kommen, also die mancherlei Zahlausdrücke nicht mehr das Wieviel von Einem und Demselben, sondern von Verschiedenem bedeuten, pflegt man sich des Wortes Größe zu bedienen. Dieses bedeutet dann nicht sowohl das Wiegroß (dieses wird stets ausgedrückt durch das Wieviel der bezüglichen Einheit), sondern man unterscheidet Größe von Größe, sofern die Einheiten, mit denen gezählt wird, verschieden sind. 3, 5, auch $3 + 5$ würde man nicht Größen nennen; aber $3a$, $5b$ und, falls die a und b in irgendeinem Sinne addierbar sind, $3a + 5b$ wird man Größen nennen. Vergleichungsweise wird dann auch wohl die Zahl selbst als Größe bezeichnet; aber darauf verfiele man schwerlich, wenn nicht die „unbenannte" mit der „benannten" Zahl irgendwie in Vergleichung käme; sondern nur sofern man ihre Einheit mit anderen Einheiten vergleicht; so besonders in der komplexen Zahl $a + bi$, d. h. $a \cdot 1 + b \cdot i$, wo a und b gewöhnliche Zahlen sind, 1 und i dagegen verschiedene Einheiten, mit denen gezählt wird, unter denen die Beziehung gilt: $i^2 = -1$.

Nun hat sich uns schon „die" Zahl als begriffliches Kontinuum, als Gattung den bestimmten Zahlwerten übergeordnet. Schon damit wird die Zahl selbst aus dem bloßen Wieviel einer Größe selbst zur Größe; es wird damit dem Wieviel gleichsam ein Substrat gegeben, oder es wird, ohne Anleihe bei der „Anschauung", ohne Einführung irgendwelcher Begriffe, die aus nicht-arithmetischem Bereich stammten, das Wieviel zum Wieviel von Etwas. Es ist ersichtlich das Merkmal der Stetigkeit, welches die Zahl zur Größe macht. Unter den Mathematikern hat dies besonders deutlich Hankel gesehen (*65*; bes. § 12 Anm. und § 13). Das Irrationale rein formal, durch den Grenzbegriff, dem Rationalen zu interpolieren, sagt dieser, sei „der Natur der Sache deshalb ganz unangemessen", weil eben ein solcher Grenzbegriff auf der Vorstellung des Kleinen und Großen und der Anordnung der Zahlen in einer stetigen Reihe beruhe, welche schon den Begriff der extensiven (= stetigen) Größe involviere. Das Irrationale verlange in der Tat zu seiner systematischen Fassung den Größenbegriff. Er erklärt dann zwar diesen als unmittelbar in der „Anschauung" gegeben, einer Definition nicht bedürftig. Weiterhin aber unterscheidet er: der Begriff der Quantität sei nicht zu definieren, wohl aber der des Quantum (er meint: μέγεθος, nicht ποσόν); nicht was Größe sei, sondern vielmehr was groß sei, bedürfe der Feststellung. Zu dieser dient ihm das Axiom des Archimedes: daß eine „Größe" (ein bestimmter Wertbetrag) vervielfältigt die andere übertreffe; also die Eigenschaft der Meßbarkeit; die freilich nur die endliche Größe definieren und gerade die echte, stetige Größe (wie wir sahen) nicht begründen würde. Sehr klar aber heißt es dann (in einer Bemerkung zu § 16): der Begriff der unendlichen Reihe, überhaupt der Grenze, sei nicht mehr unzulässig, nachdem der Begriff der (Zahl als) Größe eingeführt sei, „welche schon eine vollendete in sich ist und nicht erst durch den Summationsprozeß erzeugt werden soll". Das deckt sich fast mit der Unterscheidung Kants: daß bei der intensiven Größe das Ganze den Teilen, die Einheit der Mannigfaltigkeit vorhergehend, bei der extensiven erst aus ihr resultierend gedacht werde; oder mit der Leibnizschen Erklärung, daß das Intensive das Fundament des Extensiven sei; die Größe, so würden wir vorziehen zu sagen, das Fundament der Zahl, oder der reine Grundbegriff der Größe das Fundament der zählbaren Größe.

Die Berufung auf „Anschauung" freilich kann uns auch hier nicht fruchten. Man kann nicht Zeit und Raum definieren, ohne die Größe vorauszusetzen; also kann man nicht umgekehrt die Größe im Unterschied von der Zahl definieren wollen, indem man Anschauung von Zeit oder Raum zugrunde legt. Die Anschauung gibt nicht die Größe, die vielmehr ein reiner Begriff ist; und wenn ihr konstituierendes Merkmal die Stetigkeit ist, so geben Zeit und Raum eben auch nicht die Stetigkeit, sondern eben sie muß zuvor in reinem Begriff aufgestellt sein, wenn Zeit und Raum als stetige Gebilde gedacht werden sollen. Die Berufung auf die Anschauung meint aber (wie schon gesagt) in Wahrheit vielmehr die neue Begriffsgrundlage, nach der wir suchten. Als diese erkannten wir schon die qualitative Allheit. Durch sie wird, wie besonders an den unendlichen Reihen klar wurde, die Zahl selbst zu einem Gebilde, das stetig, d. h. von irgendeinem gegebenen Betrag zu irgendeinem anderen durch alle Zwischenwerte hindurch veränderlich gedacht wird. D. h.: man denkt sich, gegenüber den bestimmten Zahlwerten, „die" Zahl selbst, in jener singularen Fassung, die den Griechen geläufig war, als ein und dasselbe Zugrundeliegende, das durch die Reihe der definiten Werte, und zwar in ausnahmsloser Allheit, sich entwickle. Es ist die Denksetzung selbst, es ist dieselbe, nämlich der Funktion nach dieselbe Denkhandlung, oder, rein objektiv ausgedrückt: die gesetzmäßig bestimmte Relation, in der die sukzessiven Werte gesetzt werden; denn irgendein anderes Substrat ist bisher nicht gegeben. So entsteht die Zahl als einziges, nur einmal vorhandenes Gebilde, das man sich veranschaulicht unter dem Symbol einer Linie, und zwar einer unendlichen Geraden, in gleichförmiger Bewegung durchmeßbar. Die so begründete stetige Zahl wird selbst zum Ausdruck des Maßes einer jeden stetigen Größenänderung, indem durch dies gemeinsame Maß beliebige Größenänderungen untereinander vergleichbar werden.

Darin liegt nun aber der Hinweis auf ein logisches Moment, das in der Zahl von Anfang an schlummerte und doch bis dahin tief versteckt blieb; das in seiner fundamentalen Bedeutung für die Denkschöpfung der Zahl überhaupt von den Arithmetikern erst verhältnismäßig spät beachtet worden ist; nämlich jenes logische Moment, dem Kant den Namen der „Relation" beilegt, welches in Wahrheit aber vielmehr eine eigene Relation von Relationen darstellt. Sein genauer Ausdruck in der Sprache der Arithmetik ist die Funktion. Die Größe als Veränderliche enthüllt ihre eigentliche Bedeutung erst, sofern dabei mitgedacht wird an eine gesetzliche Beziehung, gemäß welcher eine Wertreihe einer anderen von Glied zu Glied korrespondiert. Nicht die Größe ist veränderlich; die Größe als das Wiegroß muß vielmehr fest bleiben, und die Größe als Kontinuum bedeutet nur die Allheit der Werte je unter einem gegebenen Gattungsbegriff; sie ist die Bedingung der Veränderlichkeit, aber ist selbst nicht veränderlich. Sondern nur eine Größe kann streng genommen als veränderlich gedacht werden, gleichzeitig mit der Veränderung einer anderen. Woher hier der Ausdruck der Gleichzeitigkeit? Ist etwa der Begriff der Zeit hier schon vorauszusetzen? Keineswegs; aber wohl könnte es sich herausstellen, daß mit dem Begriff der Größe als veränderlicher man dem Begriff der Zeit schon sehr nahe gekommen ist. Die Veränderung der Größe wird naturgemäß unter dem Bilde der Zeit vorgestellt. So redet man von Geschwindigkeit der Funktion, indem die in größeren Differenzen fortschreitende Änderung gegenüber der in kleineren fortschreitenden, sofern beide an derselben, gleichsam festen Maßreihe gemessen werden, sich naheliegend der schnelleren Fortbewegung vergleicht. Aber die Fortschreitung ist keine andere als durch die Zahl; das Früher und Später besagt nur das Stellverhältnis, das Vor und Nach in der Zählung; die Bewegung ist nur die des Gedankens, der in gesetzmäßiger Folge von Wert zu Wert übergeht, während die Werte und Wertbeziehungen selbst nach wie vor feststehen und ewig, zugleich ins Unendliche, nur sind, nicht werden.

Also nicht der Zeitbegriff gehört etwa schon an diese Stelle. Das logisch Neue, das hier platzgreift, liegt vielmehr darin, daß mit der Funktion, d. h. mit der Gesetzmäßigkeit, gemäß welcher die Änderungen einer Größe denen einer gegebenen anderen korrespondieren, wir in das logische Gebiet übergetreten sind, das von der „Synthesis der Relation“ beherrscht wird. Indem die Quantität sich durch die Qualität vertieft hat, ist sie zugleich zubereitet für den Aufbau eines Systemzusammenhanges nach dem Verfahren der Relation. Die Einzelwerte werden nicht mehr als einzelne, sondern als Stufen einer einzigen Wertentwicklung, des Veränderungsganges einer Größe gedacht, damit eine Wertentwicklung oder die Veränderung einer Größe, mit der einer andern verglichen und die Beziehung ihrer beiderseitigen Änderungen einem Gesetz unterworfen werden könne. Umgekehrt, nur indem eine Größenänderung durch ihre gesetzmäßige Beziehung zu einer anderen ausgedrückt wird, also eben durch den neuen Sinn der Größe als Funktion, gewinnt man den Gattungsbegriff einer Größe, der fortan den sukzessiven Werten dieser Größe sich überordnet. Die veränderliche Größe, gegenüber ihren sukzessiven Werten, ist die durch ein bestimmtes Gesetz ihrer Veränderung definierte, also eben die Größe als Funktion, oder beziehungsweise Argument einer Funktion, d. h., nicht bloß als Veränderliche überhaupt, sondern, je nachdem, abhängig oder unabhängig Veränderliche.

Im Vorausblick auf die Beziehung zweier Veränderlichen in der Funktion kann dann auch wohl von einer Veränderlichen für sich gesprochen werden; d. h. man kann aus dem Kontinuum der Zahl irgendeine, durch irgendein Gesetz bestimmte Wertreihe willkürlich herausheben, als die Reihe der Werte einer Veränderlichen x, und kann diese

Wertreihe in mancherlei Beziehungen (z. B. als in einem bestimmten Intervall stetig oder unstetig) betrachten zunächst ohne Rücksicht auf eine Beziehung zwischen ihr und einer bestimmten anderen Veränderlichen y. So mag man von x und dx reden auch ohne Beziehung auf ein bestimmtes y und dy. Indessen ist hierbei die Funktionsbeziehung wenigstens zu einem möglichen y immer mitzudenken. Sonst wäre es nicht der Begriff einer Größe, der Größe, die der Forderung genügt, statt bloßer Zahlen ein zählbares Etwas zu vertreten. Dafür bleibt unerläßlich wenigstens die allgemeine Voraussetzung der möglichen Beziehung einer Veränderlichen auf eine andere als deren Funktion.

§ 9. (*Das Infinitesimalverfahren.*) Wir haben nunmehr die Voraussetzungen beisammen, um die Methode der Infinitesimalrechnung uns deuten zu können. Ihre fundamental wichtige logische Bedeutung erkannt zu haben, ist besonders das Verdienst H. Cohens [*22*], dessen Darstellung freilich für den nicht philosophisch wie mathematisch gleich vorbereiteten Leser große Schwierigkeiten bietet.

Der allgemeine Sinn und die Absicht des Infinitesimalverfahrens läßt sich indessen auch dem mathematischen Laien unschwer verständlich machen. Eine veränderliche Größe schreitet fort von Wert zu Wert, also in bestimmten, zunächst endlichen Differenzen. Sofern nun zwei Veränderliche (x, y) hinsichtlich des Ganges ihrer Veränderungen miteinander verglichen und in gesetzmäßiger Beziehung erkannt werden sollen, so wird die eine von ihnen (die abhängig Veränderliche, y) allemal eine bestimmte Differenz (Δy) durchmessen, wenn die andere (unabhängig Veränderliche, x) eine bestimmte Differenz (Δx) durchmißt. Das Verhältnis der Differenzen beider Größen also, das sich als Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ schreiben läßt, drückt dann den Gang der