Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 6. Abschließende Betrachtungen über die Dimensionen der Zahl.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

§ 6. (*Abschließende Betrachtungen über die Dimensionen der Zahl.*) Hiermit ist die prinzipielle Frage entschieden. In welcher genauen Gestalt dann die weitere Konstruktion ausgeführt wird, ob durch die zirkuläre Änderung oder durch ein Quadratnetz (worauf die obige Darstellung hinauskam), ist nicht von der gleichen prinzipiellen Wichtigkeit. Auf die erstere Art erhält man, zunächst vom Nullpunkt der ursprünglichen Reihe ausgehend, die Mannigfaltigkeit der durch diesen Punkt gehenden Strahlen, also das Strahlenbüschel. Dieses reicht aus, die Punkte zunächst der Ebene zu geben; in entsprechender Weise lassen sich aber auch die Punkte im drei- oder n-dimensionalen System, immer von demselben, einzigen Nullpunkt aus, hervorgehend denken. Aber auch eine Konstruktionsart wie durch ein Quadratnetz läßt sich aus unseren Voraussetzungen unschwer begründen. Denn da ganz die gleichen Konstruktionen von jedem Gliede der Ausgangsreihe aus (indem man es zum Null-Punkt wählt) möglich sind, so steht es ohne weiteres auch frei, die ganze Grundreihe in irgendeiner denkbaren Richtung, z. B. der senkrechten (der übrigens ein absoluter Vorzug nicht zukommt), auch stetig transformiert zu denken, also die Ebene (wie man gewöhnlich sagt) durch geradlinige Fortbewegung der Geraden (sowie diese durch Bewegung des Punktes unter Festhaltung einer einzigen Richtung) sich erzeugen zu lassen, und auf entsprechende Weise dann weiter jedes System von n Dimensionen aus dem von $n - 1$ Dimensionen. Es scheint, daß Graßmann (A^1, § 16) eine solche Erzeugungsweise im Sinne gehabt hat, da er 1. aufs stärkste betont, daß alle durch verschiedene „Grundänderungen“ (Richtungen) erzeugten Gebilde „nicht als anderweitig schon gegebene aufgefaßt werden dürfen, sondern als ursprünglich erzeugt“, und da er 2. das so entstandene System zweiter Stufe ganz als Ebene beschreibt, welche dadurch erzeugt gedacht werden soll, daß „alle Punkte einer Geraden nach einer neuen, nicht in ihr enthaltenen Richtung (oder der entgegengesetzten) sich fortbewegen", so daß die Ebene als Gesamtheit der Parallelen erscheint, welche eine gegebene Gerade durchschneiden, aber, da sie selbst sich nicht schneiden und auch die ursprüngliche Gerade nicht noch ein zweites Mal treffen, durchweg verschiedene Punkte ergeben. Ebenso gelangt er dann zum Raum durch Bewegung der Ebene nach einer neuen, nicht in ihr liegenden Richtung oder der dieser entgegengesetzten. Immerhin erscheint diese geometrische Ableitung bei Graßmann bloß als Beispiel einer allgemeineren, die er im Sinne hat, aber in keiner Weise entwickelt, so daß man auf das Gemeinte eben nur aus diesem „Beispiel" zurückschließen kann. Auch fällt auf, daß im weiteren Aufbau seines Systems von der Voraussetzung einer solchen Erzeugungsweise seiner Elemente gar kein Gebrauch gemacht, besonders die gewöhnliche komplexe Zahl $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ für sie nicht benutzt, sondern nur als merkwürdige, sehr beweisende Analogie zu seinen $n$dimensionalen Zahlen erwähnt und als auf der Mitte zwischen der gewöhnlichen Zahl und der Ausdehnungsgröße stehend bezeichnet wird (A^2, Vorr. S. VI), indem sie aus zwei Einheiten $\left(1 \text{ und } i = \sqrt{-1}\right)$ ebenso durch reelle Zahlkoeffizienten dargestellt werde, wie die extensive Größe aus zwei oder mehr Einheiten. Es wäre nur konsequent gewesen, die Ausdehnungsgröße überhaupt als Erweiterung der komplexen Zahl von zwei auf n Dimensionen zu begründen; wobei es übrigens nicht notwendig war, gerade an der Voraussetzung $i = \sqrt{-1}$ festzuhalten; denn an sich hat, wie gesagt, die Zweiteilung der fundamentalen Relation Plus zu Minus oder Minus zu Plus keinen unbedingten Vorzug vor irgendeiner anderen Teilung. Nur die bequemste Form des Komplexen ist die auf diese besondere Voraussetzung gegründete; und hinreichend zur Darstellung von Zahlbeziehungen beliebiger Dimension ist sie wie jede andere. Ihr Gebrauch entspricht in jeder Beziehung dem der rechtwinkligen Koordinaten in der Cartesischen Geometrie und andererseits der Begründung der goniometrischen Funktionen auf die Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck, welche beiden Darstellungsweisen der Ebene und beziehungsweise des Winkels in ihr eingeschlossen sind und durch sie eigentlich erst ihre Begründung erhalten.

„Interessant ist es noch zu bemerken", sagt Graßmann (A¹, § 79), „wie bei der rein geometrischen Betrachtung wie auch in der abstrakten Wissenschaft die Betrachtung vom Raume aus zur Ebene, und dann erst von dieser zur geraden Linie führt, und daß somit diejenige Betrachtung, in welcher alles räumlich auseinandertritt, sich räumlich entfaltet, als die der Raumlehre eigentümliche und für sie als die einfachste erscheint, während, wenn ihre Gebilde ineinander liegen, dann auch alles noch verhüllt erscheint, wie der Keim in der Knospe, und erst seine räumliche Bedeutung gewinnt, wenn man das Ineinanderliegende in Beziehung setzt zu dem räumlich Entfalteten." Das gilt auch, wenn man, wie es der Sache nach in der Tat gemeint ist, für die räumliche Bestimmung die n dimensionale, für die lineare die eindimensionale Zahlbeziehung setzt. Allgemein ist das Komplexe wissenschaftlich das Einfachere; das vermeintlich Einfache beruht auf Abstraktionen, welche die Beziehungen, von denen abgesehen wird, wirklich nicht aufheben können, sondern nur willkürlich außer Betracht lassen. Das aber kann nie ohne Schaden an der inneren Konsequenz der Entwicklung gelingen, da man auf eben die Beziehungen, von denen man absehen wollte, hernach in den besonderen Problemen doch immer wieder stoßen muß und sich dann genötigt sieht, die künstlich gesetzte Schranke der Betrachtung wieder zu überschreiten. Es bewährt sich durchweg auch hier das früher Gesagte: die Erweiterung eines Begriffs, der eine fundamentale Geltung beansprucht, kann nur dann rechtmäßig sein, wenn der Begriff zuvor zu eng gefaßt war. Nicht die weitere Fassung ist dann logisch bedenklich, sondern im tieferen Sinne des Logischen träfe das Bedenken die engere Fassung, von der ausgegangen wurde. Gleichwohl hat diese die sachliche Berechtigung, daß die Betrachtung analysierend vorgehen, daher von vielen an sich vorhandenen Beziehungen vorerst absehen muß, auch um die methodischen Mittel bereitzustellen, die zur gedanklichen Beherrschung der vorerst beiseite gesetzten Beziehungen gebraucht werden.

Will man nicht unsere Ableitung anerkennen, und vermag man auch nicht eine andere, ihr gleichartige, nämlich ebenso rein logische Ableitung zu geben, so bleibt freilich nichts übrig, als, mit J. Cohn, die Mehrheit der Dimensionen auf „irgendwelche“ Verschiedenheiten der „Gegenstände“ zu gründen; ein Weg, der uns nach unseren allgemeinen Voraussetzungen gänzlich abgeschnitten ist; denn wir haben keine Gegenstände, nämlich dem Denken sind keine gegeben, ehe sie durch Denken geschaffen sind. Auch nicht mit irgendeinem „Minimum von Denkfremdheit“ kann unsere Logik sich abfinden, ausgenommen dies Minimum sei gleich Null. Das Denkfremde wäre eben auch nicht denkmöglich; es darf für das Denken gar nicht existieren, es wäre denn im Sinne des Problems, das aber selbst als Problem dann schon in den Prozeß des Denkens eingespannt wäre und schließlich, wenn auch vielleicht erst nach hartnäckiger Gegenwehr, sich ihm ergeben müßte. Übrigens ist zu sagen, daß bisher niemand die Verschiedenheiten der Gegenstände, die den Begriff der Dimensionen geben sollten, unabhängig von der Voraussetzung der Dimensionen anzugeben vermocht hat. Natürlich sind es die Dimensionen des Raumes, die man im Sinne hat. Aber 1. um die Dimensionen des Raumes denken zu können, muß man schon die Dimensionen überhaupt denken können; 2. ist auch der Raum kein gegebener Gegenstand. Er ist weder als drei-, noch als zwei- oder eindimensionales System gegeben, sondern er ist in jedem Fall, auch als der Raum der Empfindungen, konstruiert.[1]) Für diese Konstruktion aber bestehen keine anderen Möglichkeiten, als die im sachlichen Sinn einer Ordnung, einer Konstruktion einer Mannigfaltigkeit gemäß einer durchgängig einheitlichen Gesetzesordnung überhaupt begründet sind und also rein logisch sich müssen entwickeln lassen. Diese Entwicklung selbst war hier noch nicht unsere Aufgabe; aber die reinen Denkmittel zu ihr haben wir bereitgestellt. Mit der Einführung 1. der Stetigkeit und 2. der Mannigfaltigkeit der Dimensionen und Richtungen in die Zahl, d. h. in die allgemeine und allumfassende Gesetzlichkeit der Ordnungs- und Maßbestimmung, ist eben diese und damit das gesamte mathematische Verfahren zubereitet für die gedankliche Bewältigung der Probleme der Raumordnung und ebenso der Zeitordnung — soweit wenigstens sie nicht das Problem der Existenz miteinschließen, das Einzige, was mit bloß mathematischen Mitteln nicht zu zwingen ist.

Im Grunde ist es dies Letzte, was man im Sinne hat, indem man sich der ausschließend logischen Ableitung der Dimensionen und Richtungen (wie auch schon der Stetigkeit) widersetzt. Das eben verrät die Berufung auf Gegenstände, die als denkfremde dennoch dem Denken gegeben werden sollen. Aber Existenz ist selbst ein nur komplexeres Problem des Denkens. Nichts anderes besagt die Berufung auf „Anschauung", selbst wenn sie als reine verstanden, aber doch vom reinen Denken geschieden wird. In dem, was man Anschauung nennt, wirken im Grunde die sämtlichen reinen Denkfunktionen nur in unaufgelöster Verflechtung zusammen. Es ist daher die Berufung auf sie nicht überhaupt ungegründet; in der Anschauung ist das reine Denken allein konkret. Und es ist gerade die Kontinuität des Denkens, es ist die Wurzelung aller seiner Sondergestalten in der Einheit des unendlichen Ursprungs, was die Anschauung antezipiert. Aber sie antezipiert sie bloß, sie

1) Vgl. Poincaré, Wiss. u. Hyp., II, Kap. 4 (S. 53 ff.).

enthält sie nur als Problem, das allein durch reines Denken seine Auflösung finden kann. Insofern also ist die Berufung auf die Anschauung in der Logik schlechthin unzulässig, als sie eine Umgehung der eigentlichsten Aufgabe der Logik bedeutet, die darin besteht, das Konkrete der „Anschauung“ selbst durch strenge, bis zur Wurzel dringende Analyse in die reinen Denkbestimmungen, die in ihr verflochten sind, auseinanderzulegen. Anschauung kann dem Denken nichts „geben“, sie kann selbst nur durch Denken „gegeben“, d. h. bestimmt werden. So vor allem in der Mathematik.

Doch ist es eben das Problem vom Verhältnis von Anschauung und Denken, dem wir näher zu treten im Begriff stehen und zu dessen völliger Auflösung wir vorzudringen hoffen, indem wir jetzt unsere Frage auf Zeit und Raum unmittelbar richten.