



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 6. Der dreidimensionale Euklidische Raum.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

abzuleiten für das, was wir bisher bei Seite gelassen haben: die Richtungen und Dimensionen des Raumes.

§ 6. (*Der dreidimensionale Euklidische Raum.*) Aus den Untersuchungen des vorigen Kapitels ergab sich, daß die Mehrheit der Richtungen und Dimensionen kraft gedanklicher Notwendigkeit an sich besteht. Folglich ist sie auch für das Denken der Existenz, und zwar von dessen ersten Voraussetzungen an, zugrunde zu legen. Warum sie für die Zeit nicht, dagegen notwendig für den Raum besteht, dafür haben wir den logischen Grund bereits aufgewiesen: die Zeit entspricht, nach ihrer Urbedeutung der Auseinanderstellung, der nur einzig gerichteten Reihenordnung, also der bloßen Stellenzahl, der Raum, nach seiner Urbedeutung der Zusammenordnung, der Zahl in ihrer vollen Entfaltung, d. h. der komplexen Zahl. Also findet die Mehrheit der Richtungen und Dimensionen, es findet der Begriff der Richtungsverschiedenheit und Richtungsänderung (oder des Winkels) mit gleicher Notwendigkeit wie der der Größenverschiedenheit und Größenänderung auf den Raum Anwendung. Es handelt sich nur noch darum, das genaue Gesetz und die etwaige obere Grenze für die damit gegebene Erweiterung des Raumbegriffs festzusetzen.

Die Aufgabe ist, mit anderen Worten: zu zeigen, wie, nachdem durch irgendwelche zwei Elemente (0 und 1) eine einzige als Grundrichtung bestimmt ist, von dieser aus die Allheit der Richtungen im Raum und damit zugleich der räumlichen Dimensionen gegeben ist.

Nun scheint in abstrakter Erwägung der Fortgang ins Unendliche hier nicht ausgeschlossen werden zu dürfen. Die bloßen Begriffe der Richtung und Dimension setzen rein aus sich dem Fortgang eine obere Grenze nicht. Daher ist es verständlich, daß die Mathematik, sobald sie darüber hinauskam, an eine bestimmte Zahl von Dimensionen als die durch die Dinge allein gegebene und darum

allein interessierende sich prüfungslos zu binden, sobald sie lernte, die Begriffe Richtung und Dimension als reine Denkbegriffe in Freiheit zu handhaben, auch den Mut der Konsequenz bewies, ihre Betrachtung sogleich auf eine unbeschränkte Zahl von Richtungen und also Dimensionen auszudehnen, wie es in voller Allgemeinheit H. Graßmann vollbracht hat. Indessen ist eine Beschränkung unabweisklich gefordert, wenn es sich nicht um bloße abstrakte Denkbarkheiten, sondern um die Möglichkeit von Existenzbestimmung handelt, denn damit ist die neue Bedingung gestellt, daß die Richtungen und Dimensionen im Raume in einer geschlossenen, von vornherein nur als einzig denkbaren systematischen Verknüpfung miteinander stehen müssen. Daß die bloße Mathematik auf eine solche Beschränkung nicht verfiel, ist begreiflich; hat sie doch, als „reine“ oder „freie“ Mathematik, überhaupt nicht die Aufgabe, selbst Bestimmungen auch nur allgemeinsten Art über Existenz zu treffen, sondern die Methoden allseitig zu entwickeln, die dann einer anderen Wissenschaft, der Physik, zur Bestimmung der Existenz dienlich sein mögen. Und gerade je entschiedener wir die volle Unabhängigkeit der Mathematik von der Physik betonen, um so weniger werden wir uns weigern, anzuerkennen, daß reine Mathematik, bloß als solche, in der Behandlung der Begriffe Richtung und Dimension an keine Schranke, die lediglich aus dem Bedürfnis der Existenzbestimmung fließt, gebunden sei. Jetzt aber ist die Frage eben nach den Bedingungen einer möglichen Existenzbestimmung; es ist die Frage nicht nach abstrakten Mannigfaltigkeiten, nach einem bloßen Allgemeinbegriff „möglicher“, d. h. widerspruchsfrei denkbarer und gesetzlich darstellbarer „Räume“, sondern nach dem Raum, dem einzigen der Existenz, der als solcher auch nur auf einzige Weise bestimmt gedacht werden kann. Diese neue Bedingung der Einzigkeit fließt also nicht mehr aus den Begriffen reiner Mathematik; auch nicht einer abstrakten

Logik, die nach nichts als den Bedingungen der Denkbarkeit überhaupt fragt, also erst recht die äußerste Weite der Bestimmungen sich offenhalten muß; sondern der konkreten, der transzendentalen Logik Kants, mit anderen Worten: aus den Gesetzen des Existenzurteils. Diese bilden aber nicht nur ein, sondern das letzte, alles in sich zusammenfassende Problem der echten Logik, die eben Logik der Existenz sein muß. Denn das Denken will zuletzt Denken der Existenz sein; auf nichts als sie zielt es überhaupt; richtiger: Existenz ist nur der Ausdruck dessen, worauf als letztes alles Denken abzielt. Denn Denken heißt Bestimmen, und Existenz bedeutet die letzte Bestimmung, die, in der nichts unbestimmt bliebe. Darin liegt schon die Forderung des einzigen, mithin geschlossenen Zusammenhanges des Existierenden, der als Grundlage den einzigen, geschlossenen Zusammenhang der Stellenordnung des Existierenden, also des Raumes, wie andererseits der Zeit, fordert. Damit aber ergibt sich für die Aufstellung der Richtungen und Dimensionen des Raumes die unerläßliche Forderung einer Beschränkung der Dimensionenzahl. Denn Dimensionen sind nichts anderes als Bestimmungsstücke; aus unendlichen Bestimmungsstücken aber wäre überhaupt nichts bestimmbar.

Für diese geforderte Beschränkung aber vermag ich bisher nur eine Möglichkeit abzusehen, nämlich durch die Voraussetzung, daß keine größere Zahl von Dimensionen der Existenzbestimmung zugrunde zu legen sei, als notwendig und hinreichend ist, einen einzigen und damit geschlossenen, zugleich homogenen und stetigen Zusammenhang räumlicher Bestimmung herzustellen. Aus dieser Bedingung aber ergibt sich, sobald die Stetigkeit, wie es notwendig ist, auf den Zusammenhang der Richtungen miterstreckt wird, eine bestimmte, und zwar genau die Beschränkung, welche von der Geometrie Euklids und der Naturwissenschaft Newtons ohne Bewußtsein oder doch ohne Angabe des Grundes angenommen worden ist: die

Beschränkung auf drei Dimensionen, und zwar „Euklidischer“ Konstitution.

Der Beweis ist einfach. Durch zwei Elemente, 0 und 1, ist unseren Voraussetzungen zufolge der „Sinn“ von 0 nach 1 (Plussinn) und mit diesem der Gegensinn von 1 nach 0 oder von 0 nach 1' (Minussinn) auf einzige Weise bestimmt. Von der durch diese beiden Grundsinn definierten einzigen „Richtung“ verschiedene, von demselben Punkte ausgehende Richtungen existieren; aber sie können nicht um eine größere Richtungsdivergenz als die des Gegensinns vom Grundsinn verschieden sein; denn die Richtungsänderung ist (wie bereits festgestellt wurde) ihrer Natur nach zirkulär. Folglich sind alle Unterschiede der von 0 ausgehenden Richtungen beschlossen zwischen dem Richtungsunterschied 0 und einem Maximum des Richtungsunterschiedes, oder die mögliche Richtungsänderung hat ihre obere Grenze in einer Richtungsänderung 1, welche der reinen Umkehrung des Richtungssinnes entspricht. Definiert man nun die kontinuierliche Richtungsänderung zwischen Grund- und Gegensinn als Drehung, so kann die Drehung wieder verschiedenen Sinn und verschiedene Richtung haben, es ist aber wieder die Drehung von identischer Richtung, welche die Ebene definiert, zugrunde zu legen, und es haben die möglichen Änderungen der Drehungsrichtung wieder ein Maximum 1 der Änderung der Drehungsrichtung, nämlich an derjenigen Änderung derselben, welche den ursprünglichen Drehungssinn in den Gegensinn überführt. Indem nun diese Änderung, d. h. die Drehung der Ebene um die Gerade als Achse, wiederum homogen und stetig zu vollziehen ist, ergibt sich der homogene und stetige dreidimensionale, d. h. der Euklidische Raum. Auf mehr Dimensionen aber führt unser Ableitungsprinzip nicht. Denn nach demselben sind neue Dimensionen einzuführen, wenn und nur wenn solche erforderlich sind, um gegebene Richtungsgegensätze in stetigem Übergang zu vermitteln. Nun hat zwar die

Drehung der Ebene im Raum wiederum zwei entgegengesetzte Sinne, zwischen denen eine stetige Vermittlung gefordert ist. Aber diese verlangt nicht eine neue Dimension, denn die Ebene hat im dreidimensionalen Raum zwei fundamentale Drehungen, nämlich nach ihren zwei Dimensionen (in einfachster Darstellung: um zwei aufeinander senkrechte Achsen), von welchen, wie man sich leicht überzeugt, jede für die andere die erforderliche stetige Vermittlung herstellt; z. B. die Vorwärtsdrehung der Ebene um die Horizontalachse wird in die Rückwärtsdrehung stetig übergeführt durch die Drehung der Ebene um die Vertikalachse, die Rechtsdrehung um die Vertikalachse in die Linksdrehung durch die Drehung um die Horizontalachse.¹⁾

Mit dem absoluten Begriff der Geraden oder der Richtung, der dieser Konstruktion zugrunde gelegt wurde, ist die Euklidische Verfassung des so konstruierten Raumes gegeben zufolge der Bedingung der strengen Homogenität, nach welcher jede von einem Punkte aus mögliche Konstruktion ebenso von jedem Punkte aus möglich sein, oder anders ausgedrückt, an allen Stellen des Raumes dieselben Relationen obwalten müssen. Durch irgendwelche zwei Punkte des Raumes ist dann eine Gerade bestimmt; zwei Gerade haben nur einen oder alle Punkte gemein. Die Euklidische einzige Parallele ist unmittelbar damit gegeben, daß auch von jedem Punkte aus dieselben und nur dieselben Richtungen existieren wie vom Ausgangspunkte der Konstruktion, und jede von diesen nur einmal.

1) Vgl. die Abhandlungen 127, 128, 130 sowie 133. Diese Deduktion berührt sich, aber deckt sich nicht mit der von Pietzker [142], von der sie sich übrigens auch dadurch unterscheidet, daß sie nicht die logische Unmöglichkeit eines Raumes von mehr als drei Dimensionen bewiesen haben will; sondern nur: daß das Hinausgehen über drei Dimensionen (und zwar Euklidischer Konstitution) in unendliche Unbestimmtheit führt, also eine Existentialbestimmung unmöglich machen würde.

Zwei gleich gerichtete Gerade treffen sich nicht, denn sie bilden keinen Winkel. Es müssen von allen Punkten die gleichen Konstruktionen auch zu beliebigem Maßstab ausführbar sein, weil die Maßbestimmung auf die Richtungsbestimmung keine ändernde Wirkung üben kann. Im vollkommen homogenen Raum muß jede Distanz jede vertreten können; ein absoluter (kleinster oder größter) Abstand, eine Raumkonstante, ein Krümmungsmaß verschieden von 0 ist durch die streng verstandene Homogenität schon ausgeschlossen; wie auch eine Endlichkeit des Raumes.

Dies alles folgt aus der Grundbedingung unserer Konstruktion, nämlich der geforderten Einzigkeit und begrifflichen Geschlossenheit des räumlichen Zusammenhanges; freilich nicht aus den bloßen abstrakten Begriffen Abstand und Richtung. Diese würden von sich aus für die Zahl der Dimensionen keine Beschränkung ergeben; mit dem Raum von n Dimensionen aber sind auch die verschiedenen Fälle nichteuklidischer Räume von $n - 1$ Dimensionen, und ist unweigerlich auch die unbeschränkte Veränderlichkeit der sogenannten „Krümmung“ des Raumes gegeben. Nichts davon ist etwa logisch widersprechend; Räume von beliebiger Dimensionenzahl und damit ohne weiteres auch nichteuklidische Räume konstanter oder nicht konstanter Krümmung sind nicht nur ohne Widerspruch denkbar, sondern aufs genaueste begrifflich darstellbar und in allen ihren Grundeigenschaften und Konsequenzen mathematisch berechenbar. Das allerdings könnte heute nur ein Böötier leugnen wollen. Es ist also gegen die Mathematik der allgemeinen „Räume“ mit unseren obigen Aufstellungen durchaus nichts gesagt. Abgelehnt wird durch die Konsequenz unserer Voraussetzungen nur die Metaphysik der allgemeinen Räume, die sogenannte „Meta-geometrie“. Darüber aber tröstet man sich leichter, wenn man vor Augen sieht, daß diese Metaphysik nichts weniger als eine eindeutig klar entwickelte und sicher fortschreitende

Wissenschaft, daß sie vielmehr fast bei jedem ihrer Vertreter eine andere und nirgends in auch nur erträglicher Strenge begründet, sondern in der Regel bloß einfach behauptet ist. Gemeinsam ist diesen Behauptungen nur zweierlei: die im schlechten Sinne apriorische Voraussetzung des Empirismus und Realismus überhaupt, und, in seltsamem Kontrast dazu, die Behauptung von Möglichkeiten als realen, die aller empirischen Entscheidung ihrer Natur nach entzogen sind.

Einige kritische Bemerkungen über die Irrungen der Metaphysik der nichteuklidischen Räume mögen denn wohl hier am Platze sein.

§ 7. (*Die Metaphysik der nichteuklidischen Räume. „Metageometrie“.*) Es ist eine bei Mathematikern und Philosophen noch immer nicht selten begegnende Meinung, daß durch die nichteuklidische Geometrie Kants Apriorismus der Raumanschauung widerlegt, der Empirismus endgültig bewiesen sei. Ich habe zu Anfang gesagt, daß und weshalb ich in der apriorischen Raumanschauung Kants das letzte Wort in der Raumfrage nicht sehe. Aber durch das Faktum der nichteuklidischen Geometrie wäre sie nicht widerlegt. Wenn es des Beweises noch bedurfte, daß die Euklidische Vorstellung des Raumes eine absolute Denknötwendigkeit nicht ist, so ist dieser Beweis durch die Aufzeigung und den Ausbau widerspruchloser, also denkmöglicher nichteuklidischer Raumsysteme freilich erbracht. Aber so wichtig dieser Beweis sonst sein mag, für Kant bedurfte es seiner nicht, da eben der Satz, daß der Euklidische Raum eine absolute Denknötwendigkeit nicht sei, eine der wesentlichen Voraussetzungen seiner These ist, daß er eine dem Menschen eigentümliche, für andere denkende Wesen vielleicht nicht bestehende Anschauungsnotwendigkeit sei. Daß wir aber die nichteuklidischen Räume uns sogar zur Anschauung zu bringen vermöchten, hat zwar Helmholtz beweisen