



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Beitrag zur Theorie und Berechnung der hydraulischen Regulatoren für Wasserkraftmaschinen

Schmoll von Eisenwerth, Adolph

Berlin, 1904

Untersuchung der Kolbenbewegung des Servomotors für konstante
Verstellkraft des Leitapparates

urn:nbn:de:hbz:466:1-44587

$$\begin{array}{ll}
 + p_0 + p_h = (\pm k_0 + p_{p_0}) & \equiv \pm C_0 \\
 \mp k_1 s & \equiv \pm C_1 s \\
 \mp k_2 s^2 & \equiv \pm C_2 s^2 \\
 \text{usw.} & \\
 \mp k_v s^v & \equiv \pm C_v s^v \\
 = 0 & \equiv 0
 \end{array}$$

also:

$$-\frac{dv}{dt} \mathfrak{M} - v^2 A - v^{\frac{3}{2}} B \pm C_0 \pm C_1 s \pm C_2 s^2 \dots \pm C_v s^v = 0.$$

Der Koeffizient von $\frac{dv}{dt}$, $\mathfrak{M}$, stellt die gesamte zu beschleunigende Masse für den qcm Kolbenfläche dar. (Reduzierte Masse.) Dividieren wir durch $\mathfrak{M}$ und setzen wir zur Abkürzung für die durch $\mathfrak{M}$ dividierten Koeffizienten $A, B, C_0, \dots, C_v$, die entsprechenden kleinen Buchstaben $a, b, c_0, \dots, c_v$ ein, so ergibt sich:

$$-\frac{dv}{dt} - v^2 a - v^{\frac{3}{2}} b \pm c_0 \pm c_1 s \pm c_2 s^2 \dots \pm c_v s^v = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Kolbenbewegung des Servomotors für den allgemeinen Fall, dass der Verstellwiderstand eine Funktion (v -ten Grades) des Kolbenweges ist.

Ehe wir die Lösung für diesen allgemeinen Fall geben, wollen wir zunächst den besonderen, einfacheren, betrachten, dass der Verstellwiderstand konstant ist.

Untersuchung der Kolbenbewegung des Servomotors für konstante Verstellkraft des Leitapparates.

In diesem Falle ist K und somit auch p_k vom Kolbenweg s unabhängig, $p_k = \pm k_0$.

Es fallen also in obiger Gleichung die Glieder mit s fort und wir erhalten:

$$\frac{dv}{dt} = \pm c_0 - (v^2 a + v^{\frac{3}{2}} b).$$

2 ^{ismix}

Diese Gleichung liefert die Kolbenbeschleunigung $\frac{dv}{dt} = i$ als Funktion der Kolbengeschwindigkeit v . Es handelt sich jetzt darum, hieraus den Kolbenweg s als Funktion der Zeit t zu ermitteln. Wir geben zunächst ein graphisches Verfahren hierfür an.

Damit eine Vorwärtsbewegung des Kolbens stattfindet, muss c_0 positiv sein. Die grösste Beschleunigung tritt ein bei $v = 0$ und zwar ist

$$i_{\max} = \frac{dv}{dt}_{\max} = c_0.$$

Mit zunehmender Geschwindigkeit wird die Beschleunigung kleiner, bis schliesslich für

$$v^2 a + v^{\frac{3}{2}} b = c_0$$

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

ist.

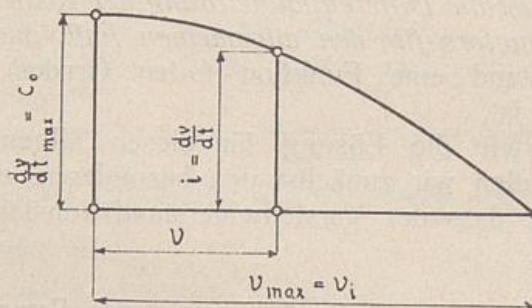


Fig. 2.

Fig. 2 veranschaulicht diese Verhältnisse. Die Abszissen v sind angenommen, die zugehörigen $\frac{dv}{dt}$ nach obiger Gleichung berechnet und als Ordinaten aufgetragen.

Der zu $\frac{dv}{dt} = 0$ gehörige Wert von v ist die maximale Kolbengeschwindigkeit $v_{\max}$.

Bei massenloser Reguliervorrichtung, also für $\mathfrak{M} = 0$, würde diese Geschwindigkeit sofort zu Anfang der Bewegung sich einstellen und konstant bleiben. Denn nach Gleichung S. 17 ist zunächst

$$-\frac{dv}{dt} \cdot \mathfrak{M} - v^2 A - v^{\frac{3}{2}} B + C_0 = 0.$$

Für $\mathfrak{M} = 0$ folgt

$$v^2 A + v^{\frac{3}{2}} B = C_0.$$

Durch einen konstanten Faktor dividiert:

$$v^2 a + v^{\frac{3}{2}} b = c_0,$$

d. h.: Dieselbe Beziehung wie oben für $v_{\max}$ gilt bei $\mathfrak{M} = 0$ überhaupt für die Kolbengeschwindigkeit. Diese konstante Kolbengeschwindigkeit bei $\mathfrak{M} = 0$ sei mit v_i (= ideelle Kolbengeschwindigkeit) bezeichnet. Es ist dann für eine beliebige Masse $\mathfrak{M}$

$$v_{\max} = v_i.$$

Eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t folgt aus

$$i = \frac{dv}{dt}$$

$$dt = \frac{dv}{i} = \frac{1}{\left(\frac{dv}{dt}\right)} \cdot dv.$$

Tragen wir hiernach die Geschwindigkeiten v als Abszissen, die reziproken Werte der Beschleunigungen nach der Gl.

$$\frac{dv}{dt} = c_0 - (v^2 a + v^{\frac{3}{2}} b)$$

als Ordinaten auf, so stellen die Flächenelemente unter der Kurve zwischen zwei um dv entfernten Ordinaten die Zeit dt dar für die Geschwindigkeitsänderung dv . (Fig. 3.) Die Zeit t , die verstrichen ist, bis die Geschwindigkeit von Null auf v angewachsen ist, ergibt sich daher als Fläche unter der Kurve zwischen $v = 0$ und $v = v$.

2*

Um eine Darstellung des zeitlichen Verlaufes der Kolbengeschwindigkeit zu gewinnen, tragen wir die zu

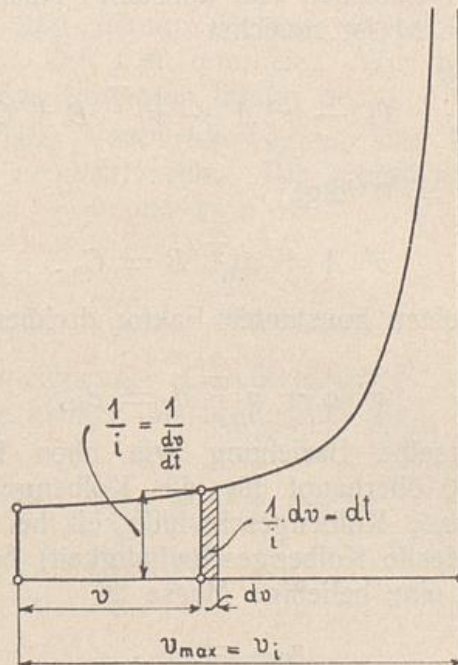


Fig. 3.

verschiedenen v ermittelten Zeiten t als Abszissen, die v selbst als Ordinaten auf. (Fig. 4). Die Kolbengeschwindigkeiten nähern sich asymptotisch der Geschwindigkeit

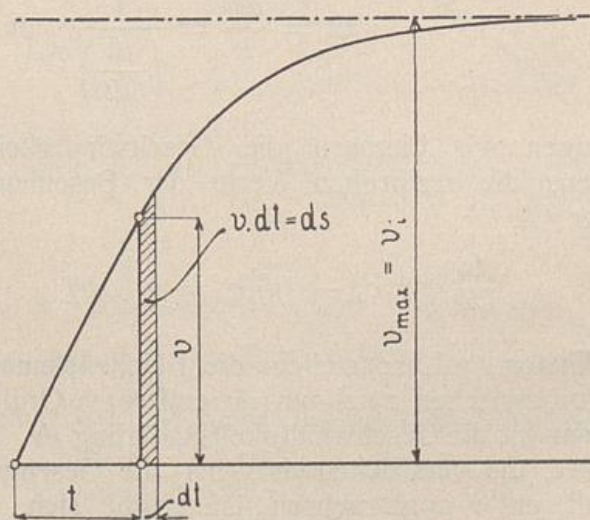


Fig. 4.

$v_{\max} = v_i$, die aus

$$v_i^2 \cdot a + v_i^{\frac{3}{2}} \cdot b = c_0$$

folgt (s. o.).

Aus der Kurve der Kolbengeschwindigkeiten (Fig. 4) erhält man zufolge der Beziehung

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad ds = v \cdot dt$$

den in der Zeit dt zurückgelegten Weg ds als Flächenelement unter der Kurve zwischen zwei um dt entfernten Ordinaten.

Daher ergibt sich der Weg s , der vom Kolben in der Zeit vom Bewegungsanfang bis nach Ablauf von t zurückgelegt worden ist, als die Fläche unter der Kurve zwischen Bewegungsanfang und t .

Wir erhalten schliesslich das gesuchte Kolbenwegdiagramm, wenn wir als Abszissen die Zeiten t und als Ordinaten die zugehörigen Werte s auftragen. (Fig. 5.)



Fig. 5.

Für die Beurteilung des Reguliervorganges ist die Asymptote der Kolbenweglinie von Bedeutung. (Vergl. Einleitung S. 4). Je kleiner der Neigungswinkel der Asymptote gegen die Zeitachse ist, desto kleiner ist die höchste Kolbengeschwindigkeit (Kolbengeschwindigkeit im Beharrungszustand), desto ungünstiger arbeitet das Relais (entspricht etwa grosser Schlusszeit). Je grösser ferner bei einem bestimmten Neigungswinkel der Asymptote der Abstand t_s zwischen Anfangspunkt des Wegdiagrammes und Schnittpunkt der Asymptote mit der Zeitachse ist, desto längere Zeit verstreicht, bis die Kolbengeschwindigkeit eine bestimmte Grösse erreicht oder bis der Treibkolben eine bestimmte Verstellung bewirkt. (Grosses t_s entspricht etwa grosser Spielraumzeit.)

Es soll nun eine Konstruktion für die Asymptote des Kolbenwegdiagrammes gegeben werden:

Die Tangente des Neigungswinkels φ der Asymptote (Fig. 6) entspricht der Geschwindigkeit $v_{\max}$. Es handelt sich noch um eine Bestimmung von t_s .

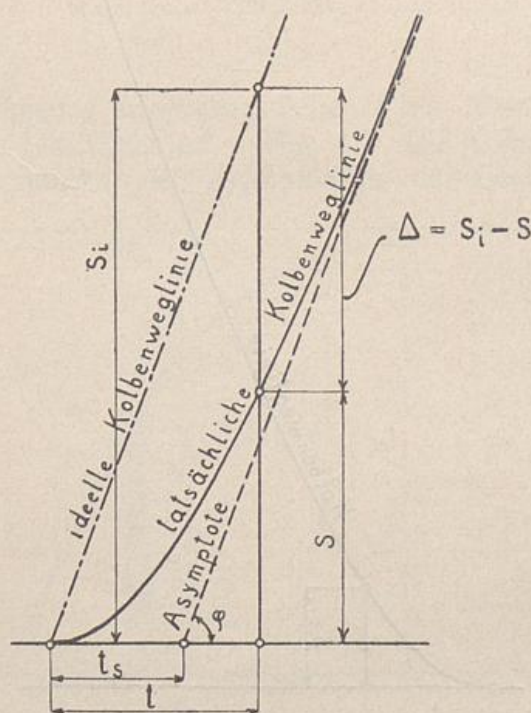


Fig. 6.

Ziehen wir durch den Anfangspunkt der Bewegung eine Gerade unter dem Winkel φ gegen die Zeitachse, so ist diese Gerade (parallel zur Asymptote) die „ideelle“ Kolbenweglinie, d. h. die Kolbenwege würden entsprechend dieser Geraden zunehmen, wenn keine Massen vorhanden wären. Der Unterschied zwischen dem ideellen Kolbenwege s_i und dem tatsächlichen Kolbenwege s zu einer Zeit t sei Δ , also

$$\Delta = s_i - s.$$

Für die Zeit $t = 0$ ist $\Delta = 0$, mit wachsendem t nimmt Δ zu und erreicht für $t = \infty$ einen Höchstwert $\Delta_{\max}$. Ist $\Delta_{\max}$ bekannt, so ist auch t_s bekannt, da

$$t_s = \frac{\Delta_{\max}}{\tan \varphi}$$

oder

$$t_s = \frac{\Delta_{\max}}{v_{\max}} \text{ ist.}$$

Nun ist der Zuwachs von Δ in der Zeit dt gleich der Differenz der gleichzeitigen Änderung von s_i und s , also

$$d\Delta = ds_i - ds.$$

Da die ideellen Kolbenwege mit konstanter Geschwindigkeit $v_i = v_{\max}$ zurückgelegt werden, so ist der Weg ds_i in der Zeit dt gleich $v_{\max} \cdot dt$. Ferner ist der tatsächliche Weg $ds = v \cdot dt$, also

$$d\Delta = (v_{\max} - v) dt.$$

Ferner ist

$$dt = \frac{1}{\left(\frac{dv}{dt}\right)} \cdot dv,$$

folglich

$$d\Delta = \frac{v_{\max} - v}{\frac{dv}{dt}} \cdot dv.$$

Aus Fig. 7 folgt:

$$\frac{v_{\max} - v}{\frac{dv}{dt}} = \cotg \delta,$$

also

$$d\Delta = \cotg \delta \cdot dv.$$

Trägt man also die zu verschiedenen v als Abszissen zugehörigen Werte $\cotg \delta$ als Ordinaten auf, so stellt

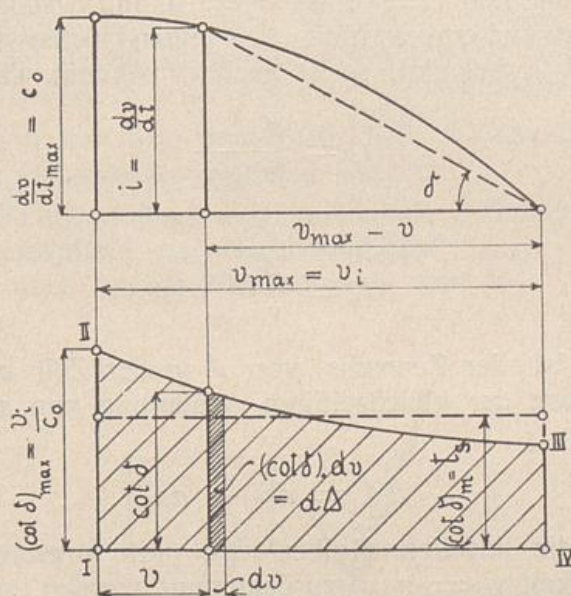


Fig. 7.

das Flächenelement unter der Kurve zwischen zwei um dv entfernten Ordinaten den Zuwachs $d\Delta$ während der Geschwindigkeitsänderung dv dar.

Wir suchen nun den Wert von Δ für $v_{\max}$; zu diesem Zwecke haben wir die $d\Delta$ von $v = 0$ bis $v = v_{\max}$ zu summieren; $\Delta_{\max}$ ist also gleich der ganzen schraffierten Fläche $I II III IV$.

Es war nun

$$t_s = \frac{\Delta_{\max}}{v_{\max}},$$

also ist t_s gleich Fläche $(I II III IV)$: $v_{\max}$ oder t_s gleich der mittleren Höhe der Fläche $I II III IV$ oder gleich dem Mittelwerte der $\cotg \delta$ von $v = 0$ bis $v = v_{\max}$.

t_s ist nun ein Maassstab für den schädlichen Einfluss der zu beschleunigenden Massen auf den Reguliervorgang (vergl. S. 4 und S. 22). Es soll daher untersucht werden, welche Verhältnisse zu wählen sind, damit bei Einhaltung einer bestimmten höchsten Kolbengeschwindigkeit t_s am kleinsten wird.

Nach dem oben Gesagten muss der Mittelwert der $\cotg \delta$ von $v = 0$ bis $v = v_{\max}$ möglichst klein werden. Für bestimmte Grössen von v sind nun die $\cotg \delta$ umgekehrt proportional den Beschleunigungen $i = \frac{dv}{dt}$, also muss der Mittelwert der i von $v = 0$ bis $v = v_{\max}$ möglichst gross werden. Nun nehmen die i mit wachsendem v ab, bis auf $i = 0$ bei $v_{\max}$. Daraus ergibt sich, dass die *Anfangsbeschleunigung* $i = \frac{dv}{dt_{\max}} = c_0$ (vergl. S. 18) *möglichst gross sein muss*.

Nach S. 17 ist nun

$$c_0 = \frac{C_0}{\mathfrak{M}} = \frac{p_0 + p_h - (p_{p_0} \pm k_0)}{\mathfrak{M}}.$$

Um daher bei gegebenem $v_{\max}$ ein möglichst kleines t_s zu erhalten, müssen wir

$$a) \quad p_0 + p_h - (p_{p_0} \pm k_0)$$

möglichst gross,

$$b) \quad \mathfrak{M} \text{ möglichst klein machen.}$$

a) Es ist $p_0 + p_h$ gleich dem gesamten zur Verfügung stehenden statischen Druck, $p_{p_0} \pm k_0$ gleich dem Widerstandsdruck des Regulierapparates einschliesslich der Kolben- und Stopfbüchsenreibung (für $v = 0$). Man wird daher die *Betriebspressung möglichst hoch wählen* und die von der Geschwindigkeit unabhängigen Regulierwiderstände so klein wie möglich zu halten suchen.

b) $\mathfrak{M}$ ist die gesamte wirksame Masse. Was die Getriebeteile betrifft, so ist deren wirksame Masse proportional $\sum m_y \cdot \phi_y^2$ (vergl. S. 15). Man wird daher die Getriebeteile, die verhältnismässig grosse Wege zurücklegen (deren ϕ_y gross ist), in der Masse möglichst klein zu halten suchen. Die zu beschleunigenden Flüssigkeitsmassen, die im allgemeinen weit mehr Einfluss

haben als die Massen des Getriebes, sind nach S. 14 proportional $\sum \frac{l_x}{f_x}$. Da die Leitungslängen l_x meist durch Konstruktionsrücksichten schon festgelegt sind, handelt es sich darum, *möglichst grosse Leitungsquerschnitte f_x zu wählen.*

Nun würden die unter a) und b) aufgestellten Bedingungen für kleines t_s (grosses c_0) gleichzeitig eine Bedingung für $v_{\max}$ bilden, da (nach Gleichung S. 18) $v_{\max}$ mit c_0 wächst. Soll daher eine bestimmte höchste Kolbengeschwindigkeit $v_{\max}$ eingehalten werden, so muss eine Vergrösserung von c_0 durch eine Vergrösserung der mit v verknüpften Koeffizienten ausgeglichen werden. Man wird also den Durchflusswiderstand erhöhen. Zu diesem Zwecke ist eine örtliche Verengung der Leitung (Drosselung) zu empfehlen, da hierdurch die zu beschleunigende Flüssigkeitsmasse (proportional $\sum \frac{l_x}{f_x}$) nicht oder doch nur sehr wenig vergrössert wird.

Fassen wir diese Bedingungen für kleines t_s zusammen, so ergibt sich als zweckmässig: *hohe Betriebs-
pressung, weite Leitungsquerschnitte, dabei, falls nötig,
Regelung der höchsten Kolbengeschwindigkeit durch
Drosselung an einer Stelle.*

Die rein analytische Behandlungsweise der Aufgabe, d. h. die Auflösung der Integrale für t , s und t_s mit Benutzung der Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = c_0 - (a v^2 + b v^{\frac{3}{2}}),$$

ist wenig übersichtlich, da bei Auflösung der Integrale umständliche Partialbruchzerlegungen nötig sind.

Doch lässt sich eine angenäherte analytische Lösung von genügender Genauigkeit und Einfachheit auf folgendem Wege ermöglichen:

Die Beschleunigungskurve

$$\frac{dv}{dt} = \text{Funktion}(v) \quad (\text{s. o.})$$

weicht im allgemeinen nur wenig von einer Parabel ab, die mit ihr für die Werte $v = 0$ und $v = v_{\max}$ die be-

züglichen Ordinaten c_0 und 0 gemeinsam hat. Wir dürfen daher mit genügender Annäherung setzen:

$$\frac{dv}{dt} = c_0 - a' v^2,$$

wobei a' aus der Bedingung folgt, dass für $v = v_{\max}$ $\frac{dv}{dt} = 0$ sein muss, also

$$a' = \frac{c_0}{(v_{\max})^2}$$

oder, da

$$c_0 = (v_{\max})^2 a + (v_{\max})^{\frac{3}{2}} \cdot b,$$

$$a' = a + \frac{b}{\sqrt{v_{\max}}}.$$

Wir setzen also an Stelle von $v^{\frac{3}{2}} \cdot b$ oder von $\frac{v^2 \cdot b}{\sqrt{v}}$ die Grösse: $\frac{v^2 \cdot b}{\sqrt{v_{\max}}}$. Aus dem Zusammenhang von b mit dem Durchflusskoeffizienten ζ_2 nach S. 16 und 17 ergibt sich, dass wir jetzt an Stelle des von v abhängigen Koeffizienten ζ_2 einen konstanten Koeffizienten eingesetzt haben und zwar in der für $v_{\max}$ geltenden Grösse.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir:

$$dt = \frac{dv}{\left(\frac{dv}{dt}\right)} = \frac{dv}{c_0 - a' v^2} \text{ (s. o.)},$$

$$t = \int_0^v \frac{dv}{c_0 - a' v^2} = \frac{1}{2 \sqrt{a' c_0}} \log \text{nat} \frac{\sqrt{a' c_0} + a' v}{\sqrt{a' c_0} - a' v}$$

und hieraus als analytische Form der Kolbengeschwindigkeitskurve:

$$v = \sqrt{\frac{c_0}{a'}} \cdot \frac{e^{\frac{2 \sqrt{a' c_0} \cdot t}{e}} - 1}{e^{\frac{2 \sqrt{a' c_0} \cdot t}{e}} + 1},$$

wobei e = Basis der natürl. Log.

Ferner ist

$$ds = v \cdot dt = \frac{v \cdot dv}{c_0 - a' v^2}.$$

Es folgt:

$$s = \int_0^v \frac{v \cdot dv}{c_0 - a' v^2} = \frac{1}{2 a'} \cdot \ln \frac{c_0}{c_0 - a' v^2},$$

und schliesslich mit obigem Werte für v :

$$s = \frac{1}{a'} \left(\ln \frac{e^{\frac{2 V_{a' c_0} \cdot t}{2}} + 1}{2} - t \sqrt{a' c_0} \right)$$

als *Gleichung der Kolbenweglinie*.

Für t_s erhalten wir nach S. 23

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{\Delta_{\max}}{v_{\max}} = \frac{\int_{v=0}^{v=v_{\max}} d\Delta}{v_{\max}} \\ &= \frac{1}{v_{\max}} \int_0^{v_{\max}} \frac{(v_{\max} - v) dv}{\frac{dv}{dt}} \\ &= \frac{1}{v_{\max}} \int_0^{v_{\max}} \frac{v_{\max} - v}{c_0 - a' v^2} \cdot dv \\ &= \int_0^{v_{\max}} \frac{dv}{c_0 - a' v^2} - \frac{1}{v_{\max}} \int_0^{v_{\max}} \frac{v \cdot dv}{c_0 - a' v^2} \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{a' c_0}} \ln \left| \frac{\sqrt{a' c_0} + a' v}{\sqrt{a' c_0} - a' v} \right| \Big|_{v=v_{\max}} \\ &\quad + \frac{1}{2 a' v_{\max}} \ln \left| \frac{c_0 - a' v^2}{c_0} \right| \Big|_{v=v_{\max}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2 \sqrt{a' c_0}} \cdot \ln \left| \frac{(\sqrt{a' c_0} + a' v) (c_0 - a' v^2)}{(\sqrt{a' c_0} - a' v) c_0} \right| \Big|_{v=v_{\max}}$$

$$t_s = \frac{1}{2 \sqrt{a' c_0}} \cdot \ln \left| \frac{c_0 a' v + c_0 \sqrt{a' c_0} - a'^2 v^3 - a' v^2 \sqrt{a' c_0}}{c \sqrt{a' c_0} - c_0 a' v} \right| \Big|_{v=v_{\max}}$$

Da für $v = v_{\max} = \sqrt{\frac{c_0}{a'}}$ der Ausdruck unter dem ln unbestimmt wird, so differenzieren wir dessen Zähler und Nenner, wodurch wir erhalten:

$$t_s = \frac{1}{2 \sqrt{a' c_0}} \ln \left| \frac{c_0 a' - 3 a'^2 v^2 - 2 a' v \sqrt{a' c_0}}{-c_0 a'} \right| \Big|_{v=v_{\max}}$$

Mit $v = \sqrt{\frac{c_0}{a'}}$ folgt nun:

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{1}{2 \sqrt{a' c_0}} \cdot \ln \left(-1 + \frac{3 a^2}{c_0 a'} \cdot \frac{c_0}{a'} + \frac{2 a' \sqrt{a' c_0}}{c_0 a'} \sqrt{\frac{c_0}{a'}} \right) \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{a' c_0}} \cdot \ln (-1 + 3 + 2) = \frac{1}{2 \sqrt{a' c_0}} \ln 4 \\ &= \frac{0,693145}{\sqrt{a' c_0}} = 0,693145 \cdot \frac{v_{\max}}{c_0}. \end{aligned}$$

Aus dieser Formel für t_s ergibt sich unmittelbar, dass bei bestimmtem $v_{\max}$ t_s umgekehrt proportional c_0 ist, dass daher c_0 , d. h. die Anfangsbeschleunigung $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\max}$ möglichst gross sein soll, wie bereits oben an Hand der graphischen Lösung entwickelt wurde.