Euklids Data

Euclides

Stuttgart, 1780

Die Data des Euklides.

Beweis des Satzes alsdann die Analy
des Problems wird.

Die Data des Euklides.

Definitionen.

I.

Räume, Linien und Winkel hei
der Größe nach gegeben, wenn Räum
Linien und Winkel, die ihnen gleich si
können gefunden werden.

II.

Eine Verhältnis heißt gegeben, we
eine ihr gleiche Verhältnis einer gegebe
Größe zu einer gegebenen Größe kann
funden werden.

III.

Rechtlinichte Figuren heißen d
Gattung nach gegeben, wenn jeder ih
Winkel gegeben ist, und die Verhältni
ihrer Seiten gegeben sind.

IV.

Punkte, Linien und Räume heiß
der Lage nach gegeben, wenn sie beständ
ein

einerley Lage haben, und entweder wirklich dargelegt werden, oder gefunden werden können.

V.

Ein Winkel heißt der Lage nach gegeben, wenn er zwischen geraden, der Lage nach gegebenen, Linien enthalten ist.

VI.

Ein Kreis heißt der Größe nach gegeben, wenn eine aus seinem Mittelpunkt an den Umfang gezogene gerade Linie der Größe nach gegeben ist.

VII.

Ein Kreis ist der Größe und Lage nach gegeben, wenn sein Mittelpunkt der Lage nach gegeben, und eine daraus an den Umfang gezogene gerade Linie der Größe nach gegeben ist.

VIII.

Kreis-Abschnitte heißen der Größe nach gegeben, wenn die Winkel darin, und ihre Grundlinien der Größe nach gegeben sind.

XI.

Kreis = Abschnitte heißen der Lag und Größe nach gegeben, wenn die Wi kel darin der Größe nach gegeben, un ihre Grundlinien beydes der Lage un Größe nach gegeben sind.

X.

Eine Größe heißt um eine gegeben Größe größer als eine andere, wenn na Wegnehmung der gegebenen Größe, da was übrig bleibt, der andern Größe glei ist.

XI.

Eine Größe heißt um eine gegeben Größe kleiner als eine andere, wenn na Hinzufügung dieser gegebenen Größe, da Ganze der andern Größe gleich ist.

Erklä

Erklärung der Zeichen.

$AB + BC$ deutet an, daß die zwo Größen AB und BC sollen zusammengefügt, und als Eine Größe angesehen werden.

$AB - BC$ deutet eine Größe an, die übrig bleibt, wenn man BC von AB wegnimmt.

$AB = BC$ deutet an, daß die Größe AB der Größe BC gleich ist.

$AB \times BC$ deutet nicht an, daß die Linie AB durch BC soll multipliciret werden, sondern bloß das Rechteck, das AB zur Grundlinie, und BC zur Höhe hat.

$AB : BC$ deutet nicht an, daß AB durch BC soll dividirt werden, sondern bloß die geometrische Verhältnis der Größe AB zu der Größe BC.

$AB > BC$, das ist, AB ist größer als BC.

$AB < BC$, das ist, AB ist kleiner als BC.

$(AB =) BC$, oder kürzer $(AB) BC$

muß gelesen werden, A B, das ist, die gleiche B C.

A B C deutet immer einen Winkel, △ A B ein Dreyek an.

A B q deutet ein, über der Linie A B beschriebenes Quadrat an.

Satz I. (*) 1.

Wenn zwo Größen gegeben sind, so ist ihre Verhältnis gegeben. Fig. 1.

Es seyen A, B zwo gegebene Größen; so ist A : B gegeben.

Weil A eine gegebene Größe ist, so läßt sich [a] eine ihr gleiche Größe finden; diese sey C. a 1. def. dat.
Eben so läßt sich, weil B gegeben ist, eine ihr gleiche Größe finden; diese sey D. Weil nun A = C, und B = D, so ist [b] A : B = b. 7. 5.
C : D; folglich ist die Verhältnis der gegebenen Größen C, D, die mit A : B einerley ist, gefunden.

Satz II. 2.

Wenn eine gegebene Größe zu einer andern eine gegebene Verhältnis hat, "und "wenn zu den zwo Größen, wodurch die ge"gebene Verhältnis ausgedrükt wird, und "der gegebenen Größe sich eine vierte Pro"portional = Größe finden läßt„; so ist die andere Größe gegeben. Fig. 2.

Die gegebene Größe A habe zu der Größe B eine gegebene Verhältnis; wenn zu den drey genannten Größen sich eine vierte Proportional-Größe finden läßt; so ist B der Größe nach gegeben.

(*) Die Ziffern an dem Rande deuten die Zahlen in den andern Ausgaben an.

a 1. def. Weil A gegeben ist, so läßt [a] sich eine i
gleiche Größe finden; diese sey C. Und we
A : B gegeben ist, so läßt sich eine ihr gleic
Verhältnis finden; es sey die Verhältnis der g
gebenen Größen E : F. Nun finde man zu d
Größen E, F, C eine vierte Proportion
Größe D, welches kraft der Hypothese mögli
ist. Da also A : B = E : F, und E : F =
b 11. 5. C : D; so ist [b] A : B = C : D. Nun i
c 14. 5. A = C, folglich [c] B = D. Mithin ist d
a 1. def. Größe B gegeben, [a] weil eine ihr gleiche D
gefunden worden.

3. ## Satz III.

Wenn gegebene Größen zu einander hin zugefügt werden, so ist ihre Summe gegeben. Fig. 3.

Die gegebenen Größen A B, B C seyen z einander hinzugefügt; so wird ihre Summe A C gegeben seyn.

a 1. def. Weil A B gegeben ist, so läßt [a] sich ei
ihr gleiche Größe finden; sie sey D E; und we
B C gegeben ist, so läßt sich eine ihr gleich
Größe finden; sie sey E F. Weil nun A B =
D E, und B C = E F ist, so ist (A B +
B C =) A C = (D E + E F =) D F;
folglich ist A C gegeben, weil die ihr gleich
D F ist gefunden worden.

Satz IV. 4.

Wenn eine gegebene Größe von einer gegebenen Größe weggenommen wird, so ist der Rest gegeben. Fig. 4.

Von der gegebenen Größe A B werde die gegebene A C weggenommen; so ist der Rest C B gegeben.

Weil A B gegeben ist, so läßt [a] sich eine ihr gleiche Größe finden; diese sey D E; und weil A C gegeben ist, so läßt sich eine ihr gleiche Größe finden; diese sey D F. Da nun A B = D E, A C = D F; so ist der Rest C B dem Rest F E gleich. Mithin ist C B gegeben [a], weil eine ihr gleiche F E ist gefunden worden. a 1. def.

Satz V. 12.

Wenn von drey Größen die erste samt der zweyten, und eben so die zweyte samt der dritten gegeben ist; so ist entweder die erste gleich der dritten, oder eine davon ist um eine gegebene Größe größer als die andere. Fig 5.

Die drey Größen seyen A B, B C, C D, wovon A B samt B C, das ist, A C gegeben sey; und gleicherweise sey B C samt C D, das ist, B D gegeben. Entweder ist A B = C D, oder eine davon ist um eine gegebene Größe größer als die andere.

Weil A C, B D, jede für sich, gegeb sind, so sind sie entweder einander gleich, od nicht. Gesezt, sie seyen einander gleich; weil nu A C = B D, so nehme man den gemeinschaf lichen Theil B C hinweg, so wird der Rest A dem Rest C D gleich seyn.

Wenn sie aber ungleich sind, so sey AC> B D, und man mache C E = B D. Demnach ist C E gegeben, weil B D gegeben ist; und die Ganze A C gegeben ist, so ist [a] der Re A E gegeben; und weil E C = B D, so (EC—BC=) EB = (BD—BC= C D. Weil nun A E gegeben ist, so ist A größer als E B, das ist, als C D, um die ge gebene Größe A E.

a 4. dat.

Satz VI.

5.

Wenn eine Größe eine gegebene Verhäl nis zu einem ihrer Theile hat, so wird auch zu dem andern Theil eine gegebene Ve hältnis haben. Fig. 6.

Die Größe A B habe zu A C, einem ihr Theile, eine gegebene Verhältnis, so wird auch zu dem andern Theil B C eine gegeb Verhältnis haben.

a 2. def. Weil A B : A C gegeben ist, so läßt [a] s eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Ve hältnis der gegebenen Größe D E zu der gegeb

n

nen DF. Weil nun D E, D F, gegeben sind, so ist[b] der Rest F E gegeben; und weil A B : A C ⎯⎯ D E : D F, so ist *convertendo*[c] A B : B C ⎯⎯ D E : E F; folglich ist A B : B C gegeben, weil die ihr gleiche Verhältnis der gegebenen Größen D E, E F ist gefunden worden. b 4. dat. c. 19. 5.

Zusatz. Hieraus folgt, daß die Theile A C, C B eine gegebene Verhältnis zu einander haben; denn A B : B C ⎯⎯ D E : E F, mithin *dividendo*[d] A C : C B ⎯⎯ D F : F E; da nun D F, F E gegeben sind, so ist[a] A C : C B gegeben. d 17. 5. a 2. def.

Satz VII. 6.

Wenn zwo Größen, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, zusammengefügt werden; so wird die gesammte Größe zu jeder von ihnen eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 7.

Die Größen A B, B C, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, seyen zusammengefügt; so wird die gesammte Größe A C zu jeder von den Größen A B, B C eine gegebene Verhältnis haben.

Weil A B : B C gegeben ist, so läßt[a] sich eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Verhältnis der gegebenen Größen D E, E F. Weil nun D E, E F gegeben sind, so ist die gesammte a 2. def.

b 3. dat. sammte D F gegeben[b] ; und weil AB : BC = DE : EF, so ist *componendo*[c] AC : CB = DF : FE, und *convertendo*[d] AC : AB = DF : DE; folglich weil AC zu jeder der Größen AB, BC sich verhält, wie DF zu jeder der andern DE, EF, so ist[a] AC : AB, und AC : BC gegeben.

c 18. 5.

d 19. 5.

a 2. def.

7.

Satz VIII.

Wenn eine gegebene Größe in zween Theile getheilt ist, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und wenn zu der Summe der zwo Größen, wodurch die gegebene Verhältnis ausgedrükt ist, zu einer von denselben, und zu der gegebenen Größe eine vierte Proportional-Größe kann gefunden werden; so ist jeder von den Theilen gegeben. Fig. 8.

Die gegebene Größe A B sey in die Theile A C, C B getheilt, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben; wenn zu den im Satze genannten Größen sich eine vierte Proportional-Größe finden läßt; so sind A C, C B, jede für sich, gegeben.

Weil die Verhältnis A C : C B gegeben ist;
a 7. dat. so ist[a] auch A B : B C gegeben, folglich läßt
b 2. def. sich[b] eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Verhältnis der gegebenen Größen DE, EF; weil nun die gegebene A B zu B C die gegebene

Ver-

Verhältnis DE:EF hat; so ist, wenn zu DE, EF, AB sich eine vierte Proportional-Größe finden läßt, BC gegeben[c]; und weil AB gegeben ist, so ist auch der übrige Theil AC gegeben.[d] c 2. dat. d 4. dat.

Gleicherweise und mit eben der Einschränkung, wenn AC, der Unterschied zweyer Größen AB, BC, die eine gegebene Verhältnis haben, gegeben ist; so ist jede der Größen AB, BC gegeben.

Satz IX. 8.

Größen, die zu ebenderselben Größe gegebene Verhältnisse haben, haben auch eine gegebene Verhältnis zu einander. Fig. 9.

A und C haben, jede für sich, eine gegebene Verhältnis zu B, so wird A eine gegebene Verhältnis zu C haben.

Weil A : B gegeben ist, so läßt sich[a] eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Verhältnis der gegebenen Größen D, E; und weil B:C gegeben ist, so läßt sich[a] eine ihr gleiche Verhältnis finden, es sey die Verhältnis der gegebenen Größen F, G. Zu F, G, E finde man, wenn es sich thun läßt, eine vierte Proportional-Größe H. Weil nun A:B = D:E, und B:C = (F:G =) E:H; so ist *ex æquo* A:C = D:H, folglich ist A:C gegeben[a], weil die ihr gleiche a 2. def.

gleiche D:H ist gefunden worden. Läßt sich ab
zu F, G, E keine vierte Proportional = Grö
finden, so kann man bloß sagen, daß A:C a
A : B und B : C, das ist, aus den gegeben
Verhältnissen D : E, und F : G zusammenges
sey.

9. ## Satz X.

Wenn zwo oder mehrere Größen gege ne Verhältnisse zu einander haben, und wen sie zu einigen andern Größen gegebene, wi wohl nicht einerley Verhältnisse haben; werden diese andere Größen auch gegeb Verhältnisse zu einander haben. Fig. 10.

Zwey oder mehrere Größen A, B, C, h ben gegebene Verhältnisse zu einander, und haben zu andern Größen D, E, F gegeben wie wohl nicht einerley Verhältnisse; so werd die Größen D, E, F auch gegebene Verhältni zu einander haben.

Weil A:B gegeben ist, und eben so A:D
a 9. dat. so ist[a] D : B gegeben; nun ist B : E gegeb folglich[a] ist D:E gegeben; und weil B:C, u eben so B:E gegeben ist, so ist[a] E:C gegeb nun ist C:F gegeben, folglich ist E : F gegeb folglich haben D, E, F gegebene Verhältnisse einander.

Sa

Satz XI. 22.

Wenn zwo Größen, jede für sich, eine gegebene Verhältnis zu einer andern Größe haben; so werden beyde zusammengenommen eine gegebene Verhältnis zu dieser andern haben. Fig. 11.

Die Größen AB, BC haben eine gegebene Verhältnis zu der Größe D; so wird AC zu ebenderselben D eine gegebene Verhältnis haben.

Weil AB, BC, jede für sich, eine gegebene Verhältnis zu D haben, so ist AB:BC gegeben[a], mithin ist AC:CB gegeben[b]; nun ist BC:D gegeben; folglich ist auch AC:D gegeben.

a 9. dat.
b 7. dat.

Satz XII.

Wenn das Ganze zu dem Ganzen eine gegebene Verhältnis hat, und die Theile zu den Theilen gegebene, aber nicht einerley Verhältnisse haben; so wird jedes davon, das Ganze oder der Theil, zu jedem eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 12.

Das Ganze AB habe zu dem Ganzen CD eine gegebene Verhältnis, und die Theile AE, EB haben gegebene, aber nicht einerley Verhältnisse zu den Theilen CF, FD; so wird jedes da-

von zu jedem, dem Ganzen oder dem Theil, ei
gegebene Verhältnis haben.

Weil AE : CF gegeben ist, so mache m
AE : CF = AB : CG, so ist AB : C
a 19. 5. gegeben, mithin ist EB : FG gegeben, wei
EB : FG = AB : CG. Nun ist EB : F
b 9. dat. gegeben, mithin ist FD : FG gegeben b; u
c 6. dat. *convertendo* FD : DG ist gegeben c; und w
AB zu jeder der Größen CD, CG eine gege
ne Verhältnis hat, so ist b CD : CG gegeb
folglich c ist CD : DG gegeben. Nun ist GD : D
d cor. 6. dat. gegeben, mithin b ist CD : DF, folglich d a
CF : FD gegeben; nun ist CF : AE, wie a
e 10. dat. FD : EB gegeben; folglich e ist AE : EB
f 7. dat. geben, wie auch f die Verhältnis von AB
jeder derselben; folglich ist die Verhältnis v
jeder zu jeder gegeben.

24. ## Satz XIII.

Wenn die erste von drey geraden Prop
tional = Linien zu der dritten eine gegeb
Verhältnis hat, so wird die erste auch z
zweyten eine gegebene Verhältnis hab
Fig. 13.

A, B, C seyen drey gerade Proportion
Linien, das ist A : B = B : C; wenn A :
eine gegebene Verhältnis ist, so wird auch A :
eine gegebene Verhältnis seyn.

We

Weil A : C gegeben ist, so läßt[a] sich eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Verhältnis der gegebenen geraden Linien D, E. Nun finde man[b] zwischen D und E eine mittlere Proportional-Linie F; so ist $D \times E = Fq$, und weil $D \times E$ wegen der gegebenen Seiten gegeben ist, so ist auch Fq, mithin die gerade Linie F, gegeben; und ferner weil $A : C = D : E$, und[c] $A : C = Aq : Bq$, so ist $D : E = Aq : Bq$; nun[c] ist $D : E = Dq : Fq$, folglich ist[d] $Aq : Bq = Dq : Fq$, folglich[e] $A : B = D : F$; mithin ist A : B gegeben[a], weil die ihr gleiche Verhältnis der gegebenen geraden Linien D, F ist gefunden worden.

a 2. def.
b 13. 6.
c 1, cor. 20. 6.
d 11, 5.
e 22. 6.
a 2. def.

Satz XIV. A.

Wenn zwo Größen, wovon die eine gegeben ist, zusammengenommen eine gegebene Verhältnis zu einer andern Größe haben; so hat der Ueberschuß dieser andern Größe über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu der erstern Größe; und wenn der Ueberschuß einer Größe über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu einer andern Größe hat; so hat diese andere Größe, mit einer gegebenen Größe zusammengenommen, eine gegebene Verhältnis zu der erstern Größe.

Fig. 14.

Die Größe A B samt der gegebenen Gr[illegible] BE, das ist AE, habe zu der Größe CD [illegible] gegebene Verhältnis; so wird der Ueberschuß [illegible] C D über eine gegebene Größe, eine gegeb[illegible] Verhältnis zu A B haben.

Weil A E : C D gegeben ist, so mache m[illegible] AE:CD = BE:FD; demnach ist BE:F[illegible] gegeben, und weil B E gegeben ist, so ist F[illegible]
a 2. dat. gegeben[a]. Ferner weil AE:CD = BE:F[illegible]
b 19. 5. so ist[b] A B : C F = A E : C D; nun AE : CD gegeben, folglich ist auch AB:C[illegible] gegeben; das ist, CF der Ueberschuß von C[illegible] über die gegebene Größe F D, hat eine gegeb[illegible] Verhältnis zu A B.

Nun setze man, der Ueberschuß der Gr[illegible] AB über die gegebene B E, das ist, AE h[illegible] eine gegebene Verhältnis zu der Größe C D; [illegible] hat C D, mit einer gegebenen Größe zusamm[illegible] genommen, eine gegebene Verhältnis zu A B[illegible]

Weil AE : CD gegeben ist, so mache m[illegible] AE : CD = BE : FD, mithin ist BE:F[illegible]
a 2. dat. gegeben; nun ist BE gegeben, folglich ist[a] F[illegible] gegeben; und weil AE:CD = BE:FD, s[illegible]
b 12. 5. *summando*[b] A B : C F = A E : C D; n[illegible] ist A E : C D gegeben, mithin ist A B : C[illegible] gegeben, das ist, CF, das der Größe CD s[illegible] der gegebenen D F gleich ist, hat eine gegeb[illegible] Verhältnis zu A B.

Si[illegible]

Satz XV. B.

Wenn eine Größe samt derjenigen, zu der eine andere Größe eine gegebene Verhältnis hat, gegeben ist; so wird die Summe dieser andern, und derjenigen, zu der die erste Größe eine gegebene Verhältnis hat, gegeben seyn. Fig. 15.

AB, CD seyen zwo Größen, wovon AB samt BE, zu welcher CD eine gegebene Verhältnis hat, gegeben ist; so wird CD samt der Größe, zu welcher AB eine gegebene Verhältnis hat, gegeben seyn.

Weil CD : BE gegeben ist, so mache man BE : CD = AE : FD, mithin ist AE : FD gegeben, und weil AE gegeben ist, so ist[a] FD gegeben; weil nun BE : CD = AE : FD, so ist[b] AB : FC = BE : CD, und weil BE : CD gegeben ist, so ist AB : FC gegeben; nun ist FD oder FC + CD gegeben, folglich ist CD samt FC, zu welcher AB eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

[a] 2. dat.
[b] cor 19. 5.

Satz XVI. 10.

Wenn der Ueberschuß einer Größe über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu einer andern Größe hat; so wird der Ueberschuß beyder zusammen über eine gege-

bene Größe, eine gegebene Verhältnis zu die-
ser andern haben: und wenn der Ueberschu[ß]
zwoer Größen mit einander über eine gege-
ne Größe, eine gegebene Verhältnis zu ein[er]
derselben hat; so hat entweder der Ueberschu[ß]
der andern über die gegebene Größe, eine g[e-]
gebene Verhältnis zu jener einten, oder d[ie]
andere samt der Größe, zu welcher jene ein[e]
eine gegebene Verhältnis hat, ist gegebe[n.]
Fig. 16.

Der Ueberschuß der Größe A B über ei[ne]
gegebene Größe habe zu der Größe B C eine g[e-]
gebene Verhältnis; so wird der Ueberschuß v[on]
A C, der Summe beyder Größen, über die g[e-]
gebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu B[C]
haben.

AD sey die gegebene Größe, und der U[e-]
berschuß von A B über dieselbe, das ist, D[B]
habe zu B C eine gegebene Verhältnis, weil nu[n]
a 7. dat. D B : B C gegeben ist, so ist [a] D C : C B geg[e-]
ben; nun ist A D gegeben, folglich hat D C
der Ueberschuß von A C über die gegebene AD
eine gegebene Verhältnis zu B C.

Nun aber setze man, der Ueberschuß zwo[er]
Größen A B, B C mit einander, über eine geg[e-]
bene Größe, habe eine gegebene Verhältnis z[u]
einer derselben B C; so wird entweder der Ueber-
schuß der andern, nämlich A B, über die geg[e-]
bene

bene Größe, eine gegebene Verhältnis zu B C haben, oder A B wird samt der Größe, zu welcher B C eine gegebene Verhältnis hat, gegeben seyn.

A D sey die gegebene Größe, und man nehme AD < AB an; weil nun DC, der Ueberschuß von AC über AD, eine gegebene Verhältnis zu B C hat, so ist[b] DB : BC gegeben, das ist, D B der Ueberschuß von A B über die gegebene Größe A D, hat eine gegebene Verhältnis zu B C. b cor. 6. dat.

Ist aber die gegebene Größe größer als AB, so mache man AE derselben gleich; weil nun E C, der Ueberschuß von A C über A E, eine gegebene Verhältnis zu B C hat, so ist[c] B C : B E gegeben; und weil A E gegeben ist, so ist AB samt BE, zu welcher B C eine gegebene Verhältnis hat, gegeben. c 6. dat.

Satz XVII.

XI.

Wenn der Ueberschuß einer Größe über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu einer andern Größe hat; so wird der Ueberschuß ebenderselben ersten Größe über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu den beyden Größen mit einander haben. Und wenn der Ueberschuß einer von zwo

Größen über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu beyden Größen mit einander hat; so wird der Ueberschuß ebenderselben Größe über eine gegebene, zu der andern eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 1

Der Ueberschuß der Größe A B über eine gegebene Größe habe zu der Größe B C eine gegebene Verhältnis; so wird der Ueberschuß von AB über eine gegebene Größe eine gegebene Verhältnis zu A C haben.

A D sey die gegebene Größe; weil nun DB, der Ueberschuß von A B über AD, eine
a 7. dat. gegebene Verhältnis zu B C hat, so ist[a] D C:DB gegeben. Nun mache man D C : D B = A D : D E, so ist A D : D E gegeben; und
b 2. dat. weil A D gegeben ist, so ist[b] D E, mithin auch der Rest A E gegeben; und weil A D : D E =
c 12. 5. D C : D B, so ist[c] A C : E B = D C : D B; nun ist D C : D B gegeben, mithin ist auch A C : E B gegeben; und weil E B : A C, wie auch A E, gegeben ist, so hat E B, der Ueberschuß von A B über die gegebene A E, eine gegebene Verhältnis zu A C.

Nun aber setze man, der Ueberschuß von A B über eine gegebene Größe habe zu A B + B C = A C eine gegebene Verhältnis; so hat der Ueberschuß von A B über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu B C.

A E

AE sey die gegebene Größe; weil nun EB, der Ueberschuß von AB über AE, eine gegebene Verhältnis zu AC hat, so mache man AC:EB = AD:DE, mithin ist AD:DE gegeben, wie auch[d] AD : AE; und weil AE gegeben ist, so ist[b] AD gegeben. Ferner weil AC:EB = AD:DE, so ist[e] DC:DB = AC : EB; nun ist AC : EB gegeben, mithin auch DC : DB, wie auch[f] DB : BC; nun ist AD gegeben, folglich hat DB, der Ueberschuß von AB über die gegebene Größe AD, eine gegebene Verhältnis zu BC.

d 6. dat.

e 19. 5.

f cor. 6. dat.

Satz XVIII. 14.

Wenn zu jeder von zwo Größen, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, eine gegebene Größe hinzugefügt wird; so werden entweder die Summen eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß der einen Summe über eine gegebene Größe, wird zu der andern eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 18.

Die zwo Größen AB, CD haben zu einander eine gegebene Verhältnis, und zu AB werde die gegebene Größe BE, zu CD die gegebene DF hinzugefügt; so werden entweder die Summen AE, CF eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß der einen über eine gegebene Größe, wird zu der andern ein gegebene Verhältnis haben.

Weil BE, DF, jede für sich, gegeben sind,
a 1. dat. so ist[a] ihre Verhältnis gegeben; wenn man
b 12. 5. BE : DF = AB : CD, so ist *summando*[b] AE : CF = BE : DF, mithin ist AE : CF gegeben.

Ist aber BE : DF mit AB : CD nicht einerley; so ist entweder BE : DF > AB : CD oder DF : BE > CD : AB. Es sey erstlich BE : DF > AB : CD, und man mache AB : CD = BG : DF; so ist, weil nach der Hypothese AB : CD gegeben ist, auch BG : DF
c 2. dat. gegeben; nun ist DF gegeben, folglich[c] ist BG gegeben; und weil BE : DF > (AB : CD =)
d 10. 5. BG : DF, so ist[d] BE > BG; ferner weil AB : CD = BG : DF, so ist[b] AG : CF = AB : CD; nun ist AB : CD gegeben, mithin ist AG : CF gegeben; und weil BE, BG, jede für sich, gegeben sind, so ist GE gegeben; mithin hat AG, der Ueberschuß von AE über eine gegebene Größe GE, eine gegebene Verhältnis zu CF. Der andere Fall läßt sich auf eben diese Art beweisen.

15. Satz XIX.

Wenn von jeder zwoer Größen, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben,

eine gegebene Größe weggenommen wird; so werden entweder die Reste eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß eines derselben über eine gegebene Größe, wird zu dem andern eine gegebene Verhältnis haben, Fig. 19.

Die Größen A B, C D haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und von A B werde die gegebene Größe A E, von C D die gegebene C F weggenommen; so werden entweder die Reste E B, F D eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß des einen derselben über eine gegebene Größe, wird eine gegebene Verhältnis zu dem andern haben.

Weil A E, C F, jede für sich, gegeben sind, so ist [a] ihre Verhältnis gegeben; und wenn diese Verhältnis mit AB : CD einerley ist, so ist [b] EB : FD = AB : CD; weil nun AB : CD gegeben ist, so ist die Verhältnis der Reste EB : FD gegeben.

a 1. dat.

b 19. 5.

Ist aber die Verhältnis A B : C D mit A E : C F nicht einerley, so ist entweder A B : CD > AE : CF, oder CD : AB > CF : AE. Es sey erstlich AB : CD > AE : CF, und man mache AB : CD = AG : CF, so ist AG : CF gegeben; nun ist CF gegeben, mithin [c] ist AG gegeben; ferner weil A B : C D, das ist, AG : CF > AE : CF, so ist [d] AG > AE; nun sind A G, A E gegeben, folglich ist der

c 2. dat.

d 10. 5.

Rest

Rest E G gegeben; weil nun A B : C D = A G : C F, so ist G B : F D = A B : CD mithin ist G B : F D gegeben; folglich hat GB der Ueberschuß von E B über die gegebene Größe E G, eine gegebene Verhältnis zu F D. Auf gleiche Art läßt sich der andere Fall beweisen.

16

Satz XX.

Wenn zu einer von zwo Größen, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, eine gegebene Größe hinzugefügt, und von der andern eine gegebene Größe hinweggenommen wird; so wird der Ueberschuß der Summe über eine gegebene Größe zu dem Rest eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 20.

Die zwo Größen AB, C D haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und zu AB werde die gegebene Größe E A hinzugefügt, von CD werde die gegebene C F weggenommen; so wird der Ueberschuß der Summe E B über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu dem Rest F D haben.

Weil AB : CD gegeben ist, so ist AB : CD = AG : CF; folglich ist AG : CF
a 2. dat. gegeben; nun ist C F gegeben, mithin [a] ist AG gegeben; ferner ist E A gegeben, folglich ist EA + AG = E G gegeben. Weil nun

AB

AB:CD = AG:CF, so ist[b] GB : FD = AB : CD; mithin weil AB : CD gegeben ist, so ist GB : FD gegeben. Nun ist EG gegeben, folglich hat GB, der Ueberschuß der Summe EB über die gegebene Größe EG, eine gegebene Verhältnis zu dem Rest FD. b 19. 5.

Satz XXI.

C.

Wenn zwo Größen eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und eine gegebene Größe zu der einen hinzugefügt, die andere aber von einer gegebenen Größe hinweggenommen wird; so ist die Summe samt der Größe, zu welcher der Rest eine gegebene Verhältnis hat, gegeben: und der Rest samt der Größe, zu welcher die Summe eine gegebene Verhältnis hat, ist gegeben. Fig. 21.

Die zwo Größen AB, CD haben eine gegebene Verhältnis zu einander; und zu AB werde die gegebene Größe BE hinzugefügt, CD aber werde von der gegebenen FD weggenommen: so ist die Summe AE samt der Größe, zu welcher der Rest FC eine gegebene Verhältnis hat, gegeben,

Weil AB : CD gegeben ist, so mache man AB : CD = GB : FD, mithin ist GB : FD gegeben; nun ist FD gegeben, mithin[a] auch a 2. dat.

GB

GB; und weil BE gegeben ist, so ist das Ganze GE gegeben; und weil AB : CD = GB : FD, so ist[b] GA : FC = AB : CD, mithin ist GA : FC gegeben; nun ist, weil GE gegeben ist, AE + GA gegeben; folglich ist die Summe AE + GA, zu welcher leztern Größe der Rest FC eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

b 19. 5.

Der zweyte Theil erhellet aus dem 15ten Saz.

D.

Saz XXII.

Wenn zwo Größen eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und von der einen eine gegebene Größe weggenommen, die andere aber von einer gegebenen Größe weggenommen wird; so ist jeder der Reste samt der Größe, zu welcher der andere Rest eine gegebene Verhältnis hat, gegeben. Fig. 22.

Die zwo Größen AB, CD haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und von AB werde die gegebene Größe AE weggenommen, CD aber werde von der gegebenen CF weggenommen: so ist der Rest EB samt der Größe, zu welcher der andere Rest DF eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

Weil AB : CD gegeben ist, so mache man AB : CD = AG : CF, so ist AG : CF gegeben

geben, und weil C F gegeben ist, so ist[a] A G gegeben; nun ist A E gegeben, mithin auch der Rest E G; und weil AB : CD = AG : CF, so ist[b] B G : D F = A B : C D, folglich ist BG : DF gegeben; und weil E G gegeben ist, so ist E B samt B G, zu welcher der andere Rest DF eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

a 2. dat.

b 19. 5.

Der andere Theil erhellet aus diesem und dem 15ten Satz.

Satz XXIII. 20.

Wenn von zwo gegebenen Größen, solche Größen genommen werden, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so werden entweder die Reste eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß des einen derselben über eine gegebene Größe, wird zu dem andern eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 23.

AB, CD seyen zwo gegebene Größen, und die Größen AE, CF, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, werden von ihnen weggenommen; so haben entweder die Reste EB, FD eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß des einen über eine gegebene Größe hat eine gegebene Verhältnis zu dem andern.

Weil

Weil AB, CD, jede für sich, gegeben sin
so ist AB : CD gegeben; und wenn AB : C
a 19. 5. = AE : CF, so ist[a] EB : FD = AB : CD
folglich ist die Verhältnis der Reste gegeben.

Ist aber AB : CD mit AE : CF nich
einerley, so ist entweder AB : CD > AE : CF
oder CD : AB > CF : AE; es sey das erste
und man mache AE : CF = AG : CD,
ist AG : CD gegeben, weil AE : CF gegeben
b 2. dat. ist; nun ist CD gegeben, mithin[b] auch AG; un
weil AB : CD > (AE : CF =) AG : CD
c 10. 5. so ist[c] AB > AG; nun sind AB, AG geg
ben, mithin ist der Rest BG gegeben; und we
d 19. 5. AE : CF = AG : CD, so ist[d] EG : FD =
AE : CF, mithin ist EG : FD gegeben; nu
ist GB gegeben, folglich hat EG, der Ueber
schuß von EB über eine gegebene Größe GB
eine gegebene Verhältnis zu FD.

Der andere Fall läßt sich auf eben die Art zeigen.

Satz XXIV.

Wenn von drey Größen die erste ein
gegebene Verhältnis zu der zweyten, un
der Ueberschuß der zweyten über eine gegebe
ne Größe, eine gegebene Verhältnis zu der
dritten hat; so wird der Ueberschuß der er
sten über eine gegebene Größe, zu der drit
ten auch eine gegebene Verhältnis haben.

Fig. 24. AB,

A B, C D, E, seyen die drey Größen, wovon AB eine gegebene Verhältnis zu CD habe, und der Ueberschuß von CD über eine gegebene Größe, habe eine gegebene Verhältnis zu E; so wird der Ueberschuß von A B über eine gegebene Größe eine gegebene Verhältnis zu E haben.

CF sey die gegebene Größe, und der Ueberschuß von CD über sie, nämlich FD, habe eine gegebene Verhältnis zu E; weil nun AB : CD gegeben ist, so mache man AB : CD = AG : CF; mithin ist AG : CF gegeben; nun ist CF gegeben, folglich [a] ist AG gegeben; und weil AB : CD = AG : CF, so ist [b] GB : FD = AB : CD, mithin ist GB : FD gegeben; nun ist FD : E gegeben, folglich [c] ist GB : E gegeben, und weil AG gegeben ist, so hat GB, der Ueberschuß von AB über die gegebene Größe AG, eine gegebene Verhältnis zu E.

a 2. dat.
b 19. 5.
c. 9. dat.

Zusatz. 1. Und wenn die erste eine gegebene Verhältnis zu der zweyten, und der Ueberschuß der ersten über eine gegebene Größe, ein gegebene Verhältnis zu der dritten hat; so wird der Ueberschuß der zweyten über eine gegebne Größe, eine gegebene Verhältnis zu der dritten haben. Denn wenn die zweyte genannt wird die dritte, und die erste die zweyte; so wird dieser Zusatz mit dem Satze einerley seyn.

Zusatz. 2. Gleicherweise wenn die erste ei[ne] gegebene Verhältnis zu der zweyten, und d[er] Ueberschuß der dritten über eine gegeb[ene] Größe auch eine gegebene Verhältnis zu d[er] zweyten hat; so wird eben dieser Ueberschu[ß] eine gegebene Verhältnis zu der ersten habe[n:] wie aus 9. dat. erhellt.

17.
Satz XXV.

Wenn es drey Größen gibt, die so be[-] schaffen sind, daß der Ueberschuß der erst[en] über eine gegebene Größe, eine gegeben[e] Verhältnis zu der zweyten, und der Ueber[-] schuß der dritten über eine gegebene Größe eine gegebene Verhältnis zu eben der zweyten hat; so wird entweder die erste eine gegeben[e] Verhältnis zu der dritten, oder der Ueber[-] schuß einer derselben über eine gegebene Größe, wird eine gegebene Verhältnis zu der andern haben. Fig. 25.

AB, C, DE seyen drey Größen, und de[r] Ueberschuß einer jeden der zwo AB, DE über eine gegebene Größe, habe zu C eine gegebene Verhältnis; so haben entweder AB, DE eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ue[-] berschuß einer derselben über eine gegebene Größe wird zu der andern eine gegebene Verhältnis haben.

FB der Ueberschuß von AB über die gegebene Größe AF, habe zu C eine gegebene Verhältnis, und GE der Ueberschuß von DE über eine gegebene Größe DG, habe zu C eine gegebene Verhältnis; weil nun FB, GE, jede für sich eine gegebene Verhältnis zu C haben, so haben sie [a] eine gegebene Verhältnis zu einander. Nun sind zu FB, GE die gegebenen Größen AF, DG hinzugefügt, folglich [b] haben entweder die Ganzen AB, DE eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene Größe, hat zu der andern eine gegebene Verhältnis.

a 9. dat.

b 18. dat.

Satz XXVI. 18.

Wenn es drey Größen gibt, die so beschaffen sind, daß die Ueberschusse der einen über gegebene Größen, gegebene Verhältnisse zu den zwo andern Größen haben; so werden entweder diese zwo eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene Größe, wird zu der andern eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 26.

AB, CD, EF seyen drey Größen, und GD, der Ueberschuß der einen CD über die gegebene Größe CG, habe zu AB eine gegebene Verhältnis; und gleicherweise habe KD, der Ueberschuß ebenderselben CD über eine gegebene Größe CK eine gegebene Verhältnis zu EF; so hat entw der AB eine gegebene Verhältnis zu EF, oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene Größe, hat eine gegebene Verhältnis zu der andern.

Weil GD eine gegebene Verhältnis zu AB hat, so mache man GD : AB = CG : HA mithin ist CG : HA gegeben; nun ist CG ge-
a 2. dat. geben, mithin[a] auch HA; und weil GD : AB
b 12. 15. = CG : HA, so ist[b] CD : HB = GD : AB
mithin ist CD : HB gegeben. Gleicherwei weil KD eine gegebene Verhältnis zu EF hat, so mache man KD : EF = CK : LE; mithin ist CK : LE gegeben; nun ist CK gegeben,
a 2. dat. mithin[a] auch LE; und weil KD : EF =
b 12. 5. CK : LE, so ist[b] CD : LF = KD : EF
mithin ist CD : LF gegeben; nun aber ist
c 9. dat. CD : HB gegeben, folglich[c] ist HB : LF gegeben: und wenn von HB, LF die gegebenen Größen HA, LE weggenommen werden, so haben entweder die Reste AB, EF eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß des einen davon über eine gegebene Größe, hat eine
d 19. dat. gegebene Verhältnis zu dem andern[d].

Anderer Beweis.

AB, C, DE seyen drey Größen, und die Ueberschnsse der einen davon C über gegebene Größen,

Größen, haben gegebene Verhältnisse zu A B und D E; so haben entweder A B, D E eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene Größe hat eine gegebene Verhältnis zu der andern.

Weil der Ueberschuß von C über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu A B hat, so hat[a] A B samt einer gegebenen Größe eine gegebene Verhältnis zu C; diese gegebene Größe sey A F, mithin ist F B : C gegeben; gleicherweise weil der Ueberschuß von C über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu D E hat, so hat[a] D E samt einer gegebenen Größe, eine gegebene Verhältnis zu C; diese gegebene Größe sey D G, mithin ist G E : C gegeben; nun ist F B : C gegeben, folglich[b] ist F B : G E gegeben; und wenn von F B, G E die gegebenen Größen A F, D G weggenommen werden, so haben entweder die Reste A B, D E eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß des einen davon über eine gegebene Größe, hat eine gegebene Verhältnis zu der andern[c].

a 14. dat.

b 9. def.

c 19. dat.

Satz XXVII. 19.

Wenn es drey Größen gibt, die so beschaffen sind, daß der Ueberschuß der ersten über eine gegebene Größe, eine gegebene Ver-

Verhältnis zu der zweyten, und der Ueberschuß der zweyten über eine gegebene Größe, auch eine gegebene Verhältnis zu der dritten hat: so wird der Ueberschuß der ersten über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu der dritten haben. Fig 27.

AB, CD, E seyen drey Größen, die so beschaffen sind, daß der Ueberschuß der ersten AB über die gegebene Größe AG, das ist GB, eine gegebene Verhältnis zu CD; und FD der Ueberschuß von CD über die gegebene Größe CF, eine gegebene Verhältnis zu E hat: so wird der Ueberschuß von AB über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu E haben.

Weil GB : CD gegeben ist, so mache man GB:CD = GH:CF, mithin ist GH : CF
a 2. dat. gegeben; nun ist CF gegeben, mithin[a] auch GH; und weil AG gegeben ist, so ist AH gegeben: weil nun GB : CD = GH : CF, so
b 19. 5. ist[b] GB : CD = HB : FD, folglich ist HB : FD gegeben; nun ist FD : E gegeben;
c 9. dat. mithin[c] auch HB : E; und weil AH gegeben ist, so hat HB, der Ueberschuß von AB über die gegebene Größe AH, eine gegebene Verhältnis zu E.

Anderer Beweis.

AB, C, D seyen drey Größen, und der Ueberschuß EB von der ersten AB über die gegebene

gebene Größe AE, habe eine gegebene Verhältnis zu C, und der Ueberschuß von C über eine gegebene Größe, habe eine gegebene Verhältnis zu D: so wird der Ueberschuß von AB über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu D haben.

Weil EB : C gegeben ist, und der Ueberschuß von C über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu D hat, so hat[d] der Ueberschuß von EB über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu D; diese gegebene Größe sey EF; mithin hat FB, der Ueberschuß von EB über EF, eine gegebene Verhältnis zu D; nun ist AF gegeben, weil AE, EF gegeben sind; folglich hat FB, der Ueberschuß von AB über eine gegebene Größe AF, eine gegebene Verhältnis zu D.

d 24. dat.

Satz XXVIII. 25.

Wenn zwo, der Lage nach gegebene, Linien einander schneiden, so sind der Punct oder die Puncte, worin sie sich schneiden, gegeben. Fig. 28.

Zwo der Lage nach gegebene Linien AB, CD schneiden sich in dem Punct E; so ist der Punct E gegeben.

Weil die Linien AB, CD der Lage nach gegeben sind, so haben sie immer einerley Lage[a], mithin haben der Punct, oder die Puncte, worinn sie einander schneiden, immer einerley Lage: und weil die Linien AB, CD sich finden lassen[a] so lassen sich der Punct oder die Puncte, worinn sie sich schneiden, gleicherweise finden, und sind daher der Lage nach gegeben[a].

a 4. def.

26.

Satz XXIX.

Wenn die Endpuncte einer geraden Linie der Lage nach gegeben sind, so ist die gerade Linie der Lage und Größe nach gegeben.

Weil die Endpuncte der geraden Linie gegeben sind, so lassen sie sich finden[a]: es seyen die Puncte A, B, zwischen denen sich eine gerade Linie AB ziehen läßt[b]; diese hat eine unveränderliche Lage, weil zwischen zween gegebenen Puncten sich nur Eine gerade Linie ziehen läßt: und wenn die gerade Linie AB gezogen ist, so ist ihre Größe zugleich dargelegt oder gegeben: folglich ist die gerade Linie AB der Lage und Größe nach gegeben.

a 4. def.

b 1. Postulatum.

27.

Satz XXX.

Wenn einer von den Endpuncten einer der Lage und Größe nach gegebenen geraden

Linie gegeben ist, so wird der andere Endpunct auch gegeben seyn. Fig. 29.

Der Punct A sey gegeben, nämlich einer von den Endpuncten einer der Größe nach gegebenen geraden Linie, und welcher in der geraden Linie A C, die der Lage nach gegeben ist, liege; so wird der andere Endpunct auch gegeben seyn.

Weil die gerade Linie der Größe nach gegeben ist, so läßt[a] sich eine ihr gleiche finden; a 1. def.
es sey die gerade Linie D; von der größern geraden Linie A C schneide man AB = D ab; mithin ist der andere Endpunct B von der geraden Linie AB gefunden; und der Punct B hat immer einerley Lage, weil jeder andere Punct in A C auf ebenderselben Seite von A, zwischen ihm und dem Punct A eine größere oder kleinere gerade Linie als AB, das ist, als D, abschneidet; mithin ist der Punct B gegeben[b]: und b 4. def.
es ist klar, daß ein anderer solcher Punct in der, auf der entgegengesezten Seite von A verlängerten A C sich finden läßt.

Satz XXXI. 28.

Wenn eine gerade Linie durch einen gegebenen Punct mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie parallel gezogen wird; so ist sie der Lage nach gegeben. Fig. 30.

A sey ein gegebener Punct, und BC eine der Lage nach gegebene gerade Linie; so wird die gerade Linie, durch A mit BC parallel gezogen, der Lage nach gegeben seyn.

a 31. I. Durch A ziehe man [a] die gerade Linie DAE parallel mit BC; so hat DAE immer einerley Lage, weil keine andere gerade Linie durch A mit BC parallel gezogen werden kann; folglich ist die gerade Linie DAE, die gefunden worden ist,
b 4. def. der Lage nach gegeben [b].

29. Satz XXXII.

Wenn an einem gegebenen Punct in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, eine gerade Linie gezogen wird, die einen gegebenen Winkel mit ihr macht; so ist diese gerade Linie der Lage nach gegeben. Fig. 31.

Es sey AB eine der Lage nach gegebene gerade Linie, und C ein gegebener Punct in ihr; so ist die an C gezogene gerade Linie, die einen gegebenen Winkel mit CB macht, der Lage nach gegeben.

a 1. def. Weil der Winkel gegeben ist, so läßt [a] sich einer finden, der ihm gleich ist; es sey der Winkel D; an dem Punct C in der gegebenen
b 23. I. geraden Linie AB mache man [b] den Winkel ECB gleich dem Winkel D; mithin hat die Linie EC

immer

immer einerley Lage, weil jede andere an den Punct C gezogene gerade Linie F C, einen grössern oder kleinern Winkel mit C B macht, als E C B, oder D; folglich ist die gerade Linie E C, die gefundnn worden, der Lage nach gegeben.

Es ist zu bemerken, daß es auf einer Seite von A B zwo gerade Linien E C, G C giebt, die gleiche Winkel mit ihr machen, und die, auf die andere Seite verlängert, auch gleiche Winkel mit ihr machen.

Satz XXXIII. 30.

Wenn eine gerade Linie von einem gegebenen Punct an eine der Lage nach gegebene gerade Linie gezogen wird, und mit ihr einen gegebenen Winkel macht; so ist sie der Lage nach gegeben. Fig. 32.

Von dem gegebenen Punct A werde die gerade Linie A D an die der Lage nach gegebene gerade Linie B C gezogen, und mache mit ihr einen gegebenen Winkel A D C; so ist A D der Lage nach gegeben.

Durch den Punct A ziehe man[a] die gerade Linie E A F parallel mit B C; weil nun B C der Lage nach gegeben ist, so ist[b] E A F der Lage nach gegeben: und weil die Linie A D die Parallel-Linien B C, E F berührt, so ist[c] E A D

a 31. 1.
b 31. dat.
c 29. 1.

==

= ADC; nun ist ADC gegeben, mithin ist auch EAD gegeben, folglich weil die Linie DA an einen gegebenen Punct A in der, der Lage nach gegebenen, geraden Linie EF gezogen ist, und einen gegebenen Winkel EAD mit ihr macht, d 32. dat. so ist [d] AD der Lage nach gegeben.

31.

Satz XXXIV.

Wenn von einem gegebenen Punct an eine der Lage nach gegebene gerade Linie, eine andere gezogen wird, die der Größe nach gegeben ist; so wird sie auch der Lage nach gegeben seyn. Fig. 33.

A sey ein gegebener Punct, und BC eine der Lage nach gegebene gerade Linie, so ist eine von dem Punct A an BC gezogene, der Größe nach gegebene Linie, auch der Lage nach gegeben.

Weil die gerade Linie der Größe nach gegeben ist, so läßt [a] sich eine finden, die ihr a 1. def. gleich ist; es sey die gerade D; von dem Punct A ziehe man AE senkrecht auf BC, und weil AE die kürzeste von allen geraden Linien ist, die von dem Punct A an BC können gezogen werden, so kann die gerade D, nicht kleiner seyn als AE, weil von A an BC eine ihr gleiche gezogen werden soll. Wenn daher D = AE ist, so ist AE die von A an BC gezogene, der Größe nach gegebene, gerade Linie; und es ist evident[b], daß AE der Lage nach gegeben ist, weil sie von dem gegebenen Punct A an die der Lage nach gegebene BC gezogen ist, und mit BC den gegebenen Winkel AEC macht.

b 33. dat.

Ist aber die gerade Linie D nicht gleich AE, so muß sie größer seyn als AE: man verlängere AE, und mache AF = D; und von dem Mittelpunct A mit dem Halbmesser AF beschreibe man den Kreisbogen GFH, und ziehe AG, AH; weil nun der Kreisbogen GFH,[c] und die gerade Linie BC, der Lage nach gegeben sind, so ist[d] ihr Durchschnitt G gegeben; nun ist der Punct A gegeben, folglich ist AG der Lage nach gegeben[e], das ist, die gerade Linie AG, die, wegen ihrer Gleichheit mit D, der Größe nach gegeben, und von dem Pnnct A an die der Lage nach gegebene BC gezogen ist, ist auch der Lage nach gegeben: und gleicherweise ist AH der Lage nach gegeben; folglich giebt es in diesem Fall zwo gerade Linien von einerley gegebenen Größe, die von einem gegebenen Punct A an eine der Lage nach gegebene gerade Linie B können gezogen werden.

c 6. def.
d 28. dat.
e 29. dat.

Satz XXXV. 32.

Wenn eine gerade Linie zwischen zwo geraden der Lage nach gegebenen, Parallel-

Linien gezogen wird, und mit ihnen gegebene Winkel macht; so ist sie der Größe nach gegeben. Fig. 34.

Die gerade Linie EF sey zwischen den, der Lage nach gegebenen, Parallel-Linien AB, CD gezogen, und mache mit ihnen die gegebenen Winkel BEF, EFD; so ist EF der Größe nach gegeben.

In CD nehme man den Punct G, und
a 31. I. durch G ziehe man[a] GH parallel mit EF; weil
nun CD die Parallel-Linien GH, EF berührt,
b 29. I. so ist[b] EFD = HGD; nun ist EFD gegeben, mithin ist auch HGD gegeben; und weil HG an den gegebenen Punct G in der, der Lage nach gegebenen, geraden Linie CD gezogen ist, und mit ihr den gegebenen Winkel HGD
c 32. dat. macht, so ist[c] die gerade Linie HG der Lage nach gegeben; nun ist AB der Lage nach gegeben,
d 28. dat. mithin ist der Punct H gegeben[d]; und weil der Punct G auch gegeben ist, so ist GH
e 29. dat. der Größe nach gegeben[e]; folglich weil EF = GH, so ist EF der Größe nach gegeben.

33. Satz XXXVI.

Wenn eine, der Größe nach gegebene, gerade Linie zwischen zwo geraden, der Lage nach gegebenen, Parallel-Linien gezogen wird,

wird, so wird sie mit den Parallel-Linien gegebene Winkel machen. Fig. 35.

Die der Größe nach gegebene gerade Linie EF sey zwischen den Parallel-Linien AB, CD, die der Lage nach gegeben sind, gezogen, so werden die Winkel AEF, EFC gegeben seyn.

Weil EF der Größe nach gegeben ist, so läßt[a] sich eine ihr gleiche gerade Linie finden; sie sey G. In AB nehme man einen gegebenen Punct H, und von ihm ziehe man[b] HK senkrecht auf CD; demnach kann die gerade Linie G, das ist, EF nicht kleiner seyn als HK; und wenn G = HK, so ist auch EF = HK; mithin macht EF rechte Winkel mit CD, sonst würde EF größer seyn als HK, welches ungereimt ist; demnach ist EFD ein rechter, folglich gegebener, Winkel.

a 1. def.
b 12. 1.

Ist aber die gerade Linie G nicht gleich HK, so muß sie größer als HK seyn. Man verlängere HK, und nehme HL = G, und aus dem Mittelpunct H mit dem Halbmesser HL beschreibe man den Kreisbogen MLN, und vereinige HM, HN; weil nun der Kreis[c] MLN, und die gerade Linie CD der Lage nach gegeben sind, so sind die Puncte M, N gegeben[d]; und weil der Punct H gegeben ist, so sind[e] die Linien HM, HN der Lage nach gegeben; nun ist CD der Lage nach gegeben; mithin sind die

c 6. def.
d 28. dat.
e 29. dat.

Winkel

f 5 def. Winkel HMN, HNM der Lage nach gegeben! Von den geraden Linien HM, HN sey HN diejenige, die mit EF nicht parallel ist, denn EF kann nicht mit beyden parallel seyn, und man
g 34. I. ziehe EO parallel mit HN; so ist[g] EO = HN, das ist, = G; und weil EF = G, so ist EO = EF, und EFO = EOF,
h 29. I. das ist[h], = dem gegebenen Winkel HNM, und weil HNM (= EFO oder EFD) ist
k I. def. gefunden worden, so ist[k] EFD, das ist, AEF der Größe nach gegeben, folglich auch der Winkel EFC.

E.

Satz XXXVII.

Wenn eine der Größe nach gegebene gerade Linie von einem Punct an eine der Lage nach gegebene gerade Linie unter einem gegebenen Winkel gezogen wird; so wird die gerade Linie, die durch diesen Punct mit der, der Lage nach gegebenen, geraden Linie parallel gezogen ist, der Lage nach gegeben seyn. Fig. 36.

Die der Größe nach gegebene Linie AD sey von dem Punct A an die der Lage nach gegebene BC, unter dem gegebenen Winkel ADC, gezogen; so wird die Linie EAF, die durch A mit BC parallel gezogen ist, der Lage nach gegeben seyn.

In BC nehme man einen gegebenen Punct G, und ziehe GH parallel mit AD; weil nun HG an einen gegebenen Punct G in einer der Lage nach gegebenen Linie BC, unter einem gegebenen Winkel HGC (denn[a] HGC ist gleich dem gegebenen Winkel ADC) gezogen ist; so ist[b] HG der Lage nach gegeben; nun ist HG auch der Größe nach gegeben, weil sie[c] der, der Größe nach, gegebenen AD gleich ist; mithin weil G, einer von den Endpuncten der, der Lage und Größe nach, gegebenen Linie GH gegeben ist, so ist[d] der andere Endpunct H gegeben, folglich ist die gerade Linie EAF, die durch den gegebenen Punct H mit der, der Lage nach, gegebenen BC parallel gezogen ist, der Lage nach gegeben[e].

a 29. I.
b 32. dat.
c 34. I.
d 30. dat.
e 31. dat.

Satz XXXVIII. 34.

Wenn eine gerade Linie von einem gegebenen Punct an zwo, der Lage nach gegebene, gerade Parallel-Linien gezogen wird; so ist die Verhältnis der, zwischen dem gegebenen Punct und den Parallel-Linien liegenden Segmente gegeben. Fig. 37.

Die gerade Linie EFG sey von dem gegebenen Punct E an die Parallel-Linien AB, CD gezogen; so ist EF : EG gegeben.

Von dem Punct E ziehe man EHK senkrecht auf CD; weil nun von einem gegebenen Punct E die gerade EK an die der Lage nach gegebene C D, unter einem gegebenen Winkel

a 33. dat. EKC, gezogen ist; so ist [a] EK der Lage nach gegeben; nun sind AB, CD der Lage nach ge-

b 28. dat. geben, mithin [b] sind die Puncte H, K gegeben

c 29. dat. und weil der Punct E gegeben ist, so sind

d 1. dat. EH, EK der Größe nach gegeben, folglich ist ihre Verhältnis gegeben. Nun ist, weil AB, CD mit einander parallel sind, EH : EK = EF : EG; folglich ist EF : EG gegeben.

35. 36.

Satz XXXIX.

Wenn die Verhältnis der Segmente einer geraden Linie, die zwischen einem in ihr gegebenen Punct und zwo Parallel-Linien liegen, gegeben ist; so ist, wenn eine von den Parallel-Linien der Lage nach gegeben ist, auch die andere der Lage nach gegeben. Fig. 38.

Von dem Punct A sey die gerade Linie AED an die zwo Parallel-Linien F G, BC gezogen, und die Verhältnis der Segmente AE: AD sey gegeben; so wird, wenn eine von den Parallel-Linien BC der Lage nach gegeben ist, auch die andere F G der Lage nach gegeben seyn.

Ver-

Von dem Punct A ziehe man AH senkrecht auf BC, und AH schneide FG in K; weil nun AH von dem gegebenen Punct A an die der Lage nach gegebene BC gezogen ist, und mit ihr einen gegebenen Winkel AHD macht, so ist[a] AH der Lage nach gegeben; und weil BC auch der Lage nach gegeben ist, so ist[b] der Punct H gegeben; nun ist auch der Punct A gegeben, mithin[c] ist AH der Größe nach gegeben; und weil FG, BC parallel sind, so ist AE : AD = AK : AH; nun ist AE : AD gegeben, folglich auch AK : AH; und weil AH der Größe nach gegeben ist, so ist[d] AK der Größe nach gegeben; nun ist sie auch der Lage nach gegeben, und der Punct A ist gegeben, mithin[e] ist der Punct K gegeben. Und weil die gerade Linie FG durch den gegebenen Punct K mit der, der Lage nach gegebenen, BC parallel gezogen ist, so ist[f] FG der Lage nach gegeben.

a 33. dat.
b 28. dat.
c 29. dat.
d 2. dat.
e 30. dat.
f 31. dat.

Satz XL. 37. 38.

Wenn die Verhältnis der Segmente einer geraden Linie, in die sie durch drey gerade Parallel-Linien geschnitten worden, gegeben ist; so wird, wenn zwo von den Parallel-Linien der Lage nach gegeben sind, auch die dritte der Lage nach gegeben seyn. Fig. 39.

AB, CD, HK seyen drey gerade Parallel-Linien, wovon AB, CD der Lage nach gegeben seyn, und die Verhältnis der Segmente GE, GF, in die die gerade Linie GEF durch die drey Parallel-Linien geschnitten worden, sey gegeben; so wird die dritte Parallel-Linie HK der Lage nach gegeben seyn.

In AB nehme man einen gegebenen Punct L, und ziehe LM senkrecht auf CD, so daß sie der HK in N begegne; weil nun LM von dem gegebenen Punct L an die der Lage nach gegebene CD gezogen ist, und einen gegebenen Winkel LMD mit ihr macht, so ist[a] LM der Lage nach gegeben; nun ist CD der Lage nach gegeben, mithin[b] ist der Punct M gegeben; und weil der Punct L gegeben ist, so ist[c] LM der Größe nach gegeben; und weil GE : GF gegeben ist, und GE:GF = NL:NM, so ist NL:NM gegeben; folglich ist[d] ML : LN gegeben; nun ist LM der Größe nach gegeben; mithin[e] ist LN der Größe nach gegeben; und weil sie auch der Lage nach gegeben, und der Punct L gegeben ist, so[f] ist der Punct N gegeben; folglich weil die gerade Linie HK durch den gegebenen Punct N mit der, der Lage nach, gegebenen CD parallel gezogen ist, so ist sie[g] der Lage nach gegeben.

a 33. dat.
b 28. dat.
c 29. dat.
d cor. 6. oder 7. dat.
e 2. dat.
f 30. dat.
g 31. dat.

Satz XLI. F.

Wenn eine gerade Linie drey der Lage nach gegebene gerade Parallel-Linien schneidet; so haben die Segmente derselben, die zwischen den Parallel-Linien liegen, eine gegebene Verhältnis. Fig. 40.

Die geraden Parallel-Linien AB, CD, EF, die der Lage nach gegeben sind, seyen durch die gerade Linie GHK geschnitten; so wird die Verhältnis GH : HK gegeben seyn.

In AB nehme man einen gegebenen Punct L, und ziehe LM senkrecht auf CD, so daß sie EF in N begegne; demnach[a] ist LM der Lage a 33. dat.
nach gegeben; nun sind CD, EF der Lage nach gegeben, mithin sind die Puncte M, N gegeben; und weil der Punct L gegeben ist, so sind[b] die b 29. dat.
geraden Linien LM, MN der Größe nach gegeben, folglich ist[c] LM : MN gegeben, nun ist c 1. dat.
LM : MN = GH : HK, folglich ist GH : HK gegeben. (*)

(*) Daß LM : MN = GH : HK läßt sich beweisen, wenn man von G zu N eine Linie zieht, aus 4. 6. und 19. 5. Ueb.

39. ## Satz XLII.

Wenn jede von den Seiten eines Dreyeks der Größe nach gegeben ist; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben, (*triangulum specie datum.*) Fig. 41.

Es sey jede von den Seiten des △ ABC der Größe nach gegeben; so ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

a 22. I. Man mache[a] ein △ DEF, dessen Seiten, jede, den gegebenen geraden Linien AB, BC, CA gleich seyen; welches sich thun läßt, weil zwo zusammengenommen größer seyn müßen, als die dritte; nun sey DE = AB, EF = BC, FD = CA; weil also die zwo Seiten ED, DF jede für sich gleich sind den zwo Seiten BA, AC, und die Grundlinie EF
b 8. I. gleich der Grundlinie BC, so ist[b] der Winkel EDF gleich dem Winkel BAC; folglich weil
c I. def. EDF = BAC ist gefunden worden, so ist[c] BAC gegeben; gleicherweise sind die Winkel B, C gegeben. Und weil die Seiten AB, BC,
d I. dat. CA gegeben sind, so sind[d] ihre Verhältnisse zu
e 3. def. einander gegeben, folglich[e] ist △ ABC der Gattung nach gegeben.

Satz LXIII. 40.

Wenn jeder von den Winkeln eines Dreyeks der Grösse nach gegeben ist, so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 42.

Jeder von den Winkeln des △ ABC sey der Grösse nach gegeben; so ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

Man ziehe eine, der Lage und Grösse nach, gegebene gerade Linie DE, und an den Endpuncten D, E mache man [a] den Winkel EDF = BAC, und den Winkel DEF = ABC; so wird auch der Winkel EFD = BCA seyn; weil nun jeder der Winkel an den Puncten A, B, C, gegeben ist, so ist auch jeder an den Puncten D, E, F gegeben; und weil die gerade Linie FD an den gegebenen Punct D in der, der Lage nach gegebenen DE, gezogen ist, und den gegebenen Winkel EDF macht, so ist [b] DF der Lage nach gegeben. Gleicherweise ist EF der Lage nach gegeben; mithin ist der Punct F gegeben; und weil die Puncte D, E gegeben sind, so ist [c] jede der Linien DE, EF, FD der Grösse nach gegeben; folglich [d] ist das △ DEF der Gattung nach gegeben; und weil es dem △ ABC ähnlich ist [e], so ist △ ABC der Gattung nach gegeben.

a 23. 1.
b 23. dat.
c 29. dat.
d 42. dat.
e 4. 6. 1. def. 6.

41. ## Satz XLIV.

Wenn einer von den Winkeln eines Dreyeks gegeben ist, und die anliegenden Seiten eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 43.

Das △ A B C habe einen seiner Winkel B A C gegeben, und die anliegenden Seiten BA, AC haben eine gegebene Verhältnis zu einander; so wird das △ ABC der Gattung nach gegeben seyn.

Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie DE, und an dem Punct D mache man E D F gleich dem gegebenen Winkel BAC; demnach ist EDF gegeben; und weil die gerade FD an einen gegebenen Punct D in der, der Lage nach, gegebenen ED gezogen ist,
a 32. dat. und den gegebenen Winkel EDF macht, so ist[a] FD der Lage nach gegeben. Ferner weil BA:AC gegeben ist, so mache man BA : AC = ED : DF, und ziehe EF; weil nun ED:DF
b 2. dat. gegeben ist, und E D gegeben ist, so ist[b] DF der Größe nach gegeben; nun ist sie auch der Lage nach gegeben, und der Punct D ist gege-
c 30. dat. ben, folglich[c] ist der Punct F gegeben; nun sind
d 29. dat. die Puncte D, E gegeben, mithin sind[d] DE,
e 42. dat. EF, FD der Größe nach gegeben; folglich[e] ist

das

das △ DEF der Gattung nach gegeben; und weil in den △ △ ABC, DEF, der Winkel BAC = EDF und BA : AC = ED : DF, so[f] sind die Dreyecke einander ähnlich; nun ist das △ DEF der Gattung nach gegeben, folglich auch das △ ABC. f 6. 6.

Satz XLV. 42.

Wenn die Seiten eines Dreyeks gegebene Verhältnisse zu einander haben, so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 44.

Die Seiten des △ ABC haben gegebene Verhältnisse zu einander; so ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie D; weil nun AB : BC gegeben ist, so mache man AB : BC = D : E; mithin ist[a] wegen der gegebenen D auch E gegeben. a 2. dat.
Weil ferner BC : CA gegeben ist, so mache man BC : CA = E : F, wo, weil E gegeben ist, auch[a] F gegeben ist. Weil nun AB : BC = D : E so ist *componendo* AB + BC : BC = D + E : E; nun ist BC : CA = E : F, folglich *ex æquo*[b] AB + BC : CA = b 22. 5.
D + E : F; mithin, weil[c] AB + BC > CA, c 20. 1.
so ist[d] D + E > F; und so sind je zwey und d def. 5. 5.
zwey von den drey Linien D, E, F, zusammen-

 genommen

genommen größer als die dritte. Nun mache
e 22. I. man[e] ein △ GHK, dessen Seiten den Linien D, E, F gleich seyn, so daß GH = D, HK = E, GK = F; und weil jede der Linien D, E, F gegeben ist, so ist auch jede der Seiten GH, HK, GK der Größe nach gegeben;
f 42. dat. mithin[f] ist das △ GHK der Gattung nach gegeben; nun ist AB : BC = (D : E =) GH:HK; ferner BC:CA = (E : F =) HK : GK; folglich *ex æquo* AB : AC =
g 5. 6. GH : GK. Mithin ist[g] △ ABC mit dem △ GHK gleichwinklicht und ähnlich; nun ist das △ GHK der Gattung nach gegeben, folglich ist auch △ ABC der Gattung nach gegeben.

Zusatz. Wenn man fodert, daß ein Dreyek soll verfertiget werden, dessen Seiten eben die Verhältnisse unter einander haben, wie drey gegebene gerade Linien; so ist nothwendig, daß je zwey und zwey derselben zusammengenommen größer seyn als die dritte.

43.
Satz XLVI.

Wenn die Seiten eines rechtwinklichten Dreyeks, die einen der spitzigen Winkel einschließen, eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 45.

Die

Die Seiten A B, B C, die den spitzigen Winkel A B C des in A rechtwinklichten △ A B C einschließen, haben eine gegebene Verhältnis zu einander; so ist das △ A B C der Gattung nach gegeben.

Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie DE; weil nun AB : BC gegeben ist, so mache man A B : B C = DE : EF; so ist DE : EF gegeben; und weil DE gegeben ist, so ist[a] E F gegeben. Ferner weil in der Proportion AB : BC = DE : EF, AB < BC[b], so ist[c] DE < EF. Von dem Punct D ziehe man D G unter einem rechten Winkel an DE, und aus dem Mittelpunct E beschreibe man mit dem Halbmesser E F einen Kreis, der D G in zween Puncten schneiden wird: einer davon sey G, und man ziehe E G; demnach ist der Umfang des Kreises der Lage nach gegeben[d]; nun ist[e] die gerade DG der Lage nach gegeben, weil sie an den gegebenen Punct D in der, der Lage nach, gegebenen DE, unter einem gegebenen Winkel gezogen ist; mithin[f] ist der Punct G gegeben; und weil die Puncte D, E gegeben sind, so sind[g] DE, EG, GD der Größe nach gegeben, und das △ DEG ist der Gattung nach gegeben[h]. Und weil in den △△ ABC, DEG, der Winkel B A C = EDG, und die einschließenden Seiten der Winkel ABC, DEG proportionell sind, und jeder

a 2. dat.
b 19. 1.
c def. 5. 5.
d 6. def.
e 32. dat.
f 28. dat.
g 29. dat.
h 42. dat.

der

der andern Winkel BCA, EGD kleiner ist als
i 7. 6. ein rechter; so ist i △ ABC gleichwinklicht und
ähnlich dem △ DEG; nun ist △ DEG der
Gattung nach gegeben, folglich ist auch △ ABC
der Gattung nach gegeben; und das Dreyek,
das entsteht, wenn man von E an den andern
Punct, wo der Kreis DG schneidet, eine gerade
Linie zieht, ist gleicherweise der Lage nach gegeben.

44. ## Satz XLVII.

Wenn der schiefe Winkel eines Dreyeks gegeben ist; und wenn die Seiten, die einen andern Winkel einschließen, eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben Fig. 46.

In dem △ ABC sey einer seiner schiefen Winkel ABC gegeben, und die Seiten BA, AC, die einen andern Winkel BAC einschließen, haben eine gegebene Verhältnis zu einander; so ist △ ABC der Gattung nach gegeben.

Es sey erstlich die gegebene Verhältnis eine
Gleichheits-Verhältnis, das ist, es sey BA =
AC, mithin der Winkel ABC = ACB;
weil nun ABC gegeben ist, so ist ACB, mit-
a 23. 1. hin a auch der dritte Winkel BAC gegeben;
folglich

folglich ist △ A B C[b] der Gattung nach gegeben; und es ist evident, daß in diesem Fall der gegebene schiefe Winkel spitzig seyn muß. b 43. dat.

Zweytens sey die gegebene Verhältnis eine Verhältnis des Kleinern zum Größern, das ist, es sey die an dem gegebenen Winkel liegende Seite AB kleiner als die Seite AC. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie DE, und mache den Winkel DEF = ABC, so ist wegen des gegebenen ABC auch DEF gegeben, mithin[c] ist E F der Lage nach gegeben; und weil B A : A C gegeben ist, so mache man B A : A C = ED : D G; so wird, weil ED : DG, und E D gegeben sind, auch[d] DG gegeben seyn; nun ist BA < AC, folglich[e] ist auch E D < D C. Aus dem Mittelpunct D mit dem Halbmesser D G beschreibe man den Kreis GF, der EF in F begegne, und ziehe DF; weil nun[f] der Kreis, wie auch die gerade EF, der Lage nach gegeben sind, so ist[g] der Punct F gegeben; und weil auch die Puncte D, E gegeben sind, so sind[h] die geraden Linien D E, EF, FD der Größe nach gegeben, und[i] △ DEF ist der Gattung nach gegeben; und weil BA < AC, so ist[k] der Winkel ACB < ABC, folglich[l] ist A C B < als ein rechter Winkel. Gleicherweise weil E D < D G oder DF, so ist der Winkel DFE < als ein rechter; und weil in den △ △ ABC, DEF, der Winkel ABC = DEF, und die Seiten, die den Win-

c 32. dat.
d 2. dat.
e def. 5. 5.
f 6. def.
g 28. dat.
h 29. dat.
i 42. dat.
k 18. 1.
l 32. 1.

Winkel BAC, EDF einschließen, proportional sind, und jeder der übrigen Winkel ACB, DEF kleiner ist als ein rechter Winkel; so
m 7. 6. sind[m] die △ △ ABC, DEF einander ähnlich; und weil DEF der Gattung nach gegeben ist, so ist auch △ ABC der Gattung nach gegeben.

Drittens sey die gegebene Verhältnis des Größern zum Kleinern, daß ist, die an dem gegebenen Winkel liegende Seite AB sey größer als AC; so nehme man, wie in dem lezten Fall, eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie DE, und mache den Winkel DEF
c 32. dat. gleich dem gegebenen ABC; mithin ist[c] EF der Lage nach gegeben. Nun ziehe man DG senkrecht auf EF; wenn demnach BA : AC = ED : DG, so sind[m] die △ △ ABC, DEG einander ähnlich, weil ABC = DEG, und DGE ein rechter Winkel ist (*). Folglich ist ACB ein rechter Winkel, und △
b 43. dat. ABC ist[b] der Gattung nach gegeben.

Wenn

(*) In dem 7ten Satze des 6ten Buches der *Elementorum* muß nach den Worten: *reliquorum vero simul utrumque aut minorem aut non minorem recto*, hinzugefügt werden: *aut unum ex illis rectum*; wie sich leicht *per impossibile* beweisen läßt. Ueb.

Wenn aber in dem leztern Fall BA : AC nicht einerley ist mit ED : DG, das ist, mit der Verhältnis von BA zu der von A auf BC senkrecht gezogenen AM; so muß BA : AC $<$ BA : AM seyn°, weil AC $>$ AM. Man mache BA : AC $=$ ED : DH; mithin ist ED : DH $<$ (BA : AM $=$) ED : DG, folglich p ist DH $>$ DG; und weil BA $>$ AC, so ist e ED $>$ DH. Aus dem Mittelpunct D mit dem Halbmesser DH beschreibe man den Kreis KHF, der der Linie EF nothwendig in zween Puncten begegnen wird, weil DH $>$ DG und $<$ DE. Es geschehe in den Puncten F, K, die, wie im vorhergehenden Fall gezeigt worden, gegeben sind; und wenn DF, DK gezogen werden, so sind die $\triangle\triangle$ DEF, DEK der Gattung nach gegeben, wie ebenfalls gezeigt worden ist. Aus dem Mittelpunct A mit dem Halbmesser AC beschreibe man einen Kreis, der der Linie BC wiederum in L begegne; so muß, wenn ACB kleiner ist als ein rechter Winkel, ALB größer als ein rechter seyn, und umgekehrt. Gleicherweise wenn der Winkel DFE kleiner ist als ein rechter, so muß DKE größer als ein rechter seyn, und umgekehrt. Nun sey jeder der Winkel ACB, DFE entweder kleiner oder größer als ein rechter; demnach weil in den $\triangle\triangle$ ABC, DEF, der Winkel ABC $=$ DEF, und die Seiten BA, AC und ED, DF, die die zween andere Winkel einschließen,

o 8. 5.
p 10. 5.
e def. 5. 5.

pro-m 7. 6. proportionell sind, so ist[m] △ ABC dem △ DEF ähnlich. Gleicherweise ist △ ABL dem △ DEK ähnlich. Weil nun die △ △ DEF, DEK der Gattung nach gegeben sind, so sind auch die △ △ ABC, ABL der Gattung nach gegeben. Hieraus ist evident, daß es in diesem dritten Fall immer zwey Dreyecke von verschiedener Gattung giebt, denen die in dem Satz gegebenen Dinge zukommen können.

45. ## Satz XLVIII.

Wenn einer von den Winkeln eines Dreyeks gegeben ist, und wenn die beyden Seiten, die diesen Winkel einschließen, zusammengenommen, eine gegebene Verhältnis zu der dritten Seite haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 47.

In dem △ ABC sey der Winkel BAC gegeben, und die Verhältnis BA + AC : BC sey gegeben; so ist △ ABC der Gattung nach gegeben.

a 9. 1. Man theile[a] den Winkel BAC durch die gerade Linie AD in zween gleiche Theile, so ist
b 3. 6. die Hälfte BAD gegeben. Weil nun[b] BA : AC = BD : DC, so ist *permutando* AB : BD
c 12. 5. = AC : DC, und *summando*[c] AB + AC : BC

$BC = AB : BD$. Nun ist $AB + AC : BC$ gegeben, folglich ist auch $AB : BD$ gegeben; und weil BAD gegeben ist, so ist[d] △ ABD der Gattung nach gegeben, mithin ist der Winkel ABD gegeben; und weil auch der Winkel BAC gegeben ist, so ist[e] △ ABC der Gattung nach gegeben.

d 47. dat.

e 43. dat.

Ein Dreyek, das die in dem Satz gegebene Dinge haben soll, läßt sich folgendermaaßen finden. EFG sey der gegebene Winkel, und $H : K$ sey die gegebene Verhältnis, die die Summe der zwo, den Winkel EFG einschließenden, Seiten zu der dritten Seite des Dreyeks haben soll; weil nun die Summe zwoer Seiten eines Dreyeks größer ist, als die dritte Seite, so muß $H : K$ die Verhältnis des Größern zum Kleinern seyn. Man theile[a] EFG durch eine gerade FL in zween gleiche Theile, und finde nach dem 47sten Satz ein Dreyek, das EFL zu einem seiner Winkel habe, und in dem die Verhältnis der Seiten, die den, der Linie FL entgegen stehenden Winkel einschließen, einerley sey mit $H : K$; welches sich folgendermaaßen bewerkstelligen läßt: man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene FE, und ziehe EL senkrecht auf FL; wenn nun $FE : EL = H : K$, so verlängere man EL, bis sie FG in P begegne; so ist FEP das gesuchte Dreyek; denn es hat den gegebenen Winkel EFG; und weil dieser Winkel durch FL

a 9. I.

b 3. 6. in zween gleiche Theile getheilt ist, so ist[b] EF + FP : EP = FE : EL = H : K.

Wenn aber H:K nicht einerley ist mit FE: EL, so muß sie kleiner seyn, wie in dem 47sten Satz gezeigt worden; und in diesem Fall giebt es zwey Dreyecke, wovon jedes den gegebenen Winkel EFL hat, und worin die Verhältniß der Seiten, die den, der Linie FL entgegenstehenden, Winkel einschließen, mit H:K einerley ist. Man finde aus dem 47sten Satz diese △ △ EFM, EFN, wovon jedes EFL zum Winkel hat, und worin FE : EM (oder EN) = H:K. Nun sey der Winkel EMF größer, und ENF kleiner als ein rechter. Dennach

f 18. 1. weil H > K, so ist EF > EN, folglich[f] ist der Winkel EFN, das ist, NFG < ENF. Zu jedem dieser Winkel füge man die Winkel NEF, EFN hinzu, so ist NEF + EFG < NEF + EFN + FNE, das ist, als zween rechte Winkel; folglich müßen die zwo geraden Linien EN, FG, verlängert einander begeg-

g ax. 12. 1. nen[g]; es geschehe in O, und man ziehe EM bis in G; so hat jedes von den △ △ EFG, EFO die in dem Satz gegebenen Dinge; denn jedes hat den gegebenen Winkel EFG, und weil dieser Winkel durch die gerade FMN in zween gleiche Theile getheilt ist, so ist EF + FG : EG = (FE : EM =) H : K; gleicherweise EF + FO : EO = H : K.

Satz

Satz XLIX. 46.

Wenn einer von den Winkeln eines Dreyeks gegeben ist, und wenn die zwo Seiten, die einen andern Winkel einschliessen, zusammengenommen eine gegebene Verhältnis zu der dritten Seite haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 48.

In dem △ ABC sey der Winkel ABC gegeben, und BA + AC, die den Winkel BAC einschließen, haben eine gegebene Verhältnis zu BC; so ist △ ABC der Gattung nach gegeben.

Man setze, BAC sey durch die gerade AD in zween gleiche Theile getheilt; so ist[a] BA + AC : BC = AB : BD. Nun ist BA + AC : BC gegeben, folglich auch AB : BD; und weil der Winkel ABD gegeben ist, so ist[b] △ ABD der Gattung nach gegeben; folglich ist der Winkel BAD, und der doppelte Winkel BAC gegeben; und weil auch ABC gegeben ist, so ist[c] △ ABC der Gattung nach gegeben.

a 3. 6. & 12. 5.

b 44. dat.

c 43. dat.

Ein Dreyek, das die im Satz gegebenen Dinge habe, läßt sich folgendermaaßen finden. EFG sey der gegebene Winkel, und H:K die gegebene Verhältnis; nun finde man durch den 44sten Satz das △ EFL, das EFG zu einem

seiner Winkel habe, und worin die Verhältnis der Seiten, die diesen Winkel einschließen, nämlich EF : FL = H : K; und mache den Winkel LEM = FEL. Weil nun H : K die Verhältnis ist, die die Summe zwoer Seiten des Dreyeks zu der dritten hat, so muß H > K seyn; und weil EF : FL = H : K, so ist EF > FL, und der Winkel FEL, das ist, LEM < ELF. Daher sind, wie im vorhergehenden Satze gezeigt worden, die Winkel
dax. 12. 1. LFE + FEM < als zween rechte, folglich [d] müßen FL, EM verlängert einander begegnen: es geschehe in G, so ist △ EFG das gesuchte Dreyek; denn EFG ist einer seiner Winkel, und weil der Winkel FEG durch EL in zween gleiche Theile getheilt worden, so ist FE + EG : FG = EF : FL = H : K.

76. ## Satz L.

Wenn von dem Scheitelpunct eines der Gattung nach gegebenen Dreyeks, eine gerade Linie auf die Grundlinie unter einem gegebenen Winkel gezogen wird; so wird sie eine gegebene Verhältnis zu der Grundlinie haben. Fig. 49.

Von dem Scheitelpunct A des △ ABC, das der Gattung nach gegeben ist, werde AD auf die Grundlinie BC unter einem gegebenen Winkel ADB gezogen; so ist AD : BC gegeben.

Weil

Weil △ ABC der Gattung nach gegeben ist, so ist der Winkel ABD gegeben; und weil ADB gegeben ist, so ist[a] △ ABD der Gattung nach gegeben; folglich ist AD : AB gegeben. Nun ist AB : BC gegeben; folglich[b] ist AD : BC gegeben.

a 43. dat.

b 9. dat.

Satz LI. 47.

Geradlinichte Figuren, die der Gattung nach gegeben sind, lassen sich in Dreyecke theilen, die der Gattung nach gegeben sind. Fig. 50.

Die geradlinichte Figur ABCDE sey der Gattung nach gegeben; so läßt sich ABCDE in Dreyecke theilen, die der Gattung nach gegeben sind.

Man ziehe BE, BD; weil nun ABCDE der Gattung nach gegeben ist, so ist[a] der Winkel BAE gegeben, und[a] BA : BE ist gegeben; mithin[b] ist △ BAE der Gattung nach gegeben, folglich ist der Winkel AEB gegeben[a]. Nun ist der ganze Winkel AED gegeben, mithin auch der andere Winkel BED; und weil AE : EB, wie auch AE : ED gegeben ist, so ist[c] BE : ED gegeben. Nun ist der Winkel BED gegeben, mithin[b] ist das △ BED der Gattung nach gegeben. Gleicherweise ist das

a 3. def.

b 44. dat.

c 9. dat.

△ BDC der Gattung nach gegeben: folglich lassen sich geradlinichte Figuren, die der Gattung nach gegeben sind, in Dreyecke theilen, die auch der Gattung nach gegeben sind.

48. ## Satz LII.

Wenn zwey, der Gattung nach gegebene, Dreyecke über ebenderselben geraden Linie beschrieben werden; so haben sie eine gegebene Verhältnis zu einander. Fig. 51.

Die der Gattung nach gegebenen △△ ABC, ABD seyen über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben; so ist △ ABC : △ ABD gegeben.

Durch den Punct C ziehe man CE parallel mit AB, so daß sie der verlängerten DA in E begegne; dann ziehe man BE. Weil nun △ ABC der Gattung nach gegeben ist, so ist der Winkel BAC, das ist, ACE gegeben; und weil △ ABD der Gattung nach gegeben ist, so ist der Winkel DAB, das ist, AEC gegeben.
a 43. dat. Folglich ist[a] △ ACE der Gattung nach gegeben;
b 3. def. mithin[b] ist EA : AC gegeben; nun ist CA : AB, wie auch BA : AD gegeben,
c 9. dat. folglich[c] ist EA : AD gegeben; ferner ist[d]
d 37. I.
e I. 6. △ ACB = △ AEB, und[e] △ AEB oder ACB

ACB : △ ADB = EA : AD; folglich weil EA : AD gegeben ist, so ist auch △ ACB : △ ADB gegeben.

Aufgabe.

Die Verhältnis zweyer △△ ABC, ABD zu finden, die der Gattung nach gegeben, und über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben sind.

Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie FG, und weil die Winkel der △△ ABC, ABD gegeben sind, so mache man[f] an den Endpuncten F, G der geraden Linie FG, die Winkel GFH, GFK gleich BAC, BAD; und FGH, FCK gleich ABC, ABD. Mithin sind die △△ ABC, ABD gleichwinklicht mit den △△ FGH, FGK. Durch den Punct H ziehe man HL parallel mit FG, so daß sie der verlängerten KF in L begegne. Weil nun BAC = GFH, BAD = GFK, so ist ACE = FHL, AEC = FLH, und das △ AEC ist gleichwinklicht mit dem △ FLH. Mithin ist EA : AC = LF : FH, und CA : AB = HF : FG, und BA : AD = GF : FK, folglich *ex æquo*, EA : AD = LF : FK, Nun ist, wie gezeigt worden, △ ABC : △ ABD = EA : AD, das ist, = LF : FK. Mithin ist die Verhältnis

f. 23. 1.

LF : FK, die mit der Verhältnis der △△ ABC, ABD einerley ist, gefunden worden.

49. Satz LIII.

Wenn zwo der Gattung nach gegebene geradlinichte Figuren über ebenderselben geraden Linie beschrieben werden; so haben sie eine gegebene Verhältnis zu einander. Fig. 52.

Zwo geradlinichte Figuren ABCDE, ABFG, die der Gattung nach gegeben sind, seyen über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben; so wird ihre Verhältnis zu einander gegeben seyn.

a 51. dat. Man ziehe AC, AD, AF, so ist[a] jedes der △△ AED, ADC, ACB, AGF, ABF der Gattung nach gegeben; und weil die, der Gattung nach gegebenen △△ ADE, ADC über ebenderselben Linie AD beschrieben sind,
b 52. dat. so ist[b] △ EAD : △ DAC gegeben, und *com-*
c 7. dat. *ponendo*[c] EACD : △ DAC ist gegeben. Nun ist[b] △ DAC : △ CAB gegeben, weil sie über ebenderselben Linie AC beschrieben sind;
d 9. dat. mithin ist EACD : △ ACB gegeben[d], und *componendo* ABCDE : △ ABC ist gegeben. Gleicherweise ist ABFG : △ ABF gegeben. Nun ist △ ABC : △ ABF gegeben, folglich[b] weil

weil ABCDE:△ABC, wie auch △ ABC: △ ABF, und △ ABF : ABFG gegeben sind, so ist[d] auch ABCDE : ABFG gegeben.

Aufgabe.

Die Verhältnis zwoer geradlinichter Figuren zu finden, die der Gattung nach gegeben, und über ebenderselben geraden Linie beschrieben sind.

ABCDE, ABFG seyen zwo geradlinichte Figuren, der Gattung nach gegeben, und über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben, und man ziehe AC, AD, AF. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie HK, und durch den 52sten Satz finde man die Verhältnis △ ADE : △ ADC, und mache ihr gleich HK : KL. Gleicherweise finde man die Verhältnis △ ACD : △ ACB, und mache ihr gleich KL : LM. Ferner finde man die Verhältnis △ ABC : △ ABF, und mache ihr gleich LM : MN; endlich finde man die Verhältnis △ AFB : △ AFG, und mache ihr gleich MN : NO. So wird die Verhältnis ABCDE : ABFG mit HM : MO einerley seyn.

Weil △ EAD:△DAC = HK:KL; und △ DAC : △ CAB = KL : LM; so ist *componendo*, so oft es die Anzahl der Dreyecke erfodert, ABCDE : △ ABC = HM : ML. Gleicherweise weil △ GAF : △ FAB = ON : NM, so ist *componendo*, ABFG : △ FAB = MO : MN, und *invertendo*, △ ABF : ABFG = NM : MO; nun ist △ ABC : △ ABF = LM : MN, folglich weil ABCDE : △ ABC = HM : ML, und △ ABC : △ ABF = LM : MN, und △ ABF : ABFG = MN : MO, so ist ex *æquo* ABCDE : ABFG = HM : MO.

50.
Satz LIV.

Wenn zwo gerade Linien eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so haben die ähnlichen geradlinichten Figuren, die über denselben auf eine ähnliche Art beschrieben werden, eine gegebene Verhältnis zu einander. Fig. 53.

Die geraden Linien AB, CD haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und die ähnlichen und ähnlich = liegenden geradlinichten Figuren E, F seyen über denselben beschrieben; so wird E : F gegeben seyn.

Man mache AB : CD = CD : G, so ist weil AB : CD gegeben ist, auch CD : G gegeben, folglich [a] ist AB : G gegeben. Nun ist [b] AB : G = E : F; folglich ist E : F gegeben.

a 9. dat.
b 2. cor. 20. 6.

Auf-

Aufgabe.

Die Verhältnis zwoer ähnlichen geradlinichten Figuren E, F zu finden, welche über den geraden Linien AB, CD, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, auf eine ähnliche Art beschrieben sind.

G sey eine dritte Proportional-Linie zu AB, CD. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade H; weil nun AB : CD gegeben ist, so mache man AB : CD = H : K, so ist wegen der gegebenen H, auch K gegeben; Man mache ferner H : K = K : L, so wird E : F = H : L seyn. Denn weil AB : CD = H : K, und AB : CD = CD : G, so ist CD : G = K : L, und *ex æquo* AB : G = H : L; nun ist [b] E : F = AB : G, das ist, = H : L.

[b] 2. cor. 20. 6.

Satz LV. 51.

Wenn zwo gerade Linien eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so werden die der Gattung nach gegebenen geradlinichten Figuren, die über denselben beschrieben sind, eine gegebene Verhältnis zu einander haben. Fig. 54.

AB, CD seyen zwo gerade Linien, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, so werden die der Gattung nach gegebenen geradlinichten Figuren E, F, die über denselben beschrieben sind, eine gegebene Verhältnis zu einander haben.

Ueber der geraden AB beschreibe man die Figur AG, die der Figur F ähnlich sey, und ähnlich mit ihr liege: weil nun F der Gattung nach gegeben ist, so ist auch AG der Gattung nach gegeben; demnach, weil die der Gattung nach gegebenen Figuren E, AG, über ebenderselben geraden AB beschrieben sind, so ist[a] E: AG gegeben; und weil AB : CD gegeben ist, und über diesen Linien die ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren AG, F beschrieben sind, so ist[b] AG : F gegeben; nun ist AG : E gegeben, folglich ist E : F gegeben[c].

a 53. dat.
b 54. dat.
c 9. dat.

Aufgabe.

Die Verhältnis zwoer geradlinichter Figuren E, F zu finden, welche der Gattung nach gegeben, und über den geraden Linien AB, CD, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, beschrieben sind.

Man

Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H; und weil die geradlinichten Figuren E, AG der Gattung nach gegeben, und über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben sind, so finde man aus dem 53sten Satz ihre Verhältnis, und mache derselben gleich H : K; so ist K gegeben: und weil die ähnlichen geradlinichten Figuren AG, F, über den geraden Linien AB, CD, die eine gegebene Verhältnis haben, beschrieben sind, so finde man aus dem 54sten Satz' ihre Verhältnis, und mache derselben gleich K : L; so wird E : F = H : L. Denn *per constr.* E : A G = H : K, und AG : F = K : L, folglich *ex æquo* E : F = H : L.

Satz LVI. 52.

Wenn eine der Gattung nach gegebene geradlinichte Figur über einer der Größe nach gegebenen geraden Linie beschrieben wird; so ist die Figur der Größe nach gegeben. Fig. 55.

Die der Gattung nach gegebene geradlinichte Figur ABCDE sey über der, der Gattung nach gegebenen geraden Linie AB beschrieben; so ist ABCDE der Größe nach gegeben.

Ueber AB sey das Quadrat AF beschrieben, folglich ist AF der Gattung und Größe nach gegeben; und weil die der Gattung nach gegebenen Figuren ABCDE, AF über eben
a 53. dat. derselben AB beschrieben sind, so ist[a] ABCDE: AF gegeben; nun ist AF der Größe nach gegeben, folglich ist auch ABCDE der Größe nach
b 2. dat. gegeben[b].

Aufgabe.

Die Größe einer geradlinichten Figur zu finden, die der Gattung nach gegeben, und über einer der Größe nach gegebenen geraden Linie beschrieben ist.

Man nehme die gerade Linie GH gleich der gegebenen AB, und finde durch den 53sten Satz die Verhältnis des Quadrates AF über AB, zu ABCDE, und mache ihr gleich GH:HK, und über GH beschreibe man das Quadrat GL, und vollende das Parallelogram LHKM; so ist ABCDE = LHKM; denn AF:ABCDE = GH:HK = GL:HM; weil nun AF
c 14. 5. = GL, so ist[c] ABCDE = HM.

53.

Satz LVII.

Wenn zwo geradlinichte Figuren der Gattung nach gegeben sind, und wenn die

Seite

Seite einer derselben eine gegebene Verhältniß zu einer Seite der andern hat; so sind die Verhältnisse der übrigen Seiten zu den übrigen Seiten gegeben. Fig. 56.

AC, DF seyen zwo der Gattung nach gegebene geradlinichte Figuren, und die Verhältniß der Seite AB zu der Seite DE sey gegeben; so sind auch die Verhältnisse der übrigen Seiten zu den übrigen Seiten gegeben.

Weil AB : DE gegeben ist, wie auch [a] AB : BC und DE : EF, so ist [b] BC : EF gegeben. Gleicherweise sind die Verhältnisse der übrigen Seiten zu den übrigen Seiten gegeben.

a 3. def.
b 10. dat.

Die Verhältniß BC : EF läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene Linie G, und weil BC : BA gegeben ist, so mache man BC : BA = G : H; eben so mache man AB : DE = H : K; ferner DE : EF = K : L; so ist *ex æquo* BC : EF = G : L, folglich ist G : L, die mit BC : EF einerley ist, gefunden worden.

Satz LVIII.

Wenn zwo ähnliche geradlinichte Figuren eine gegebene Verhältniß zu einander haben, so haben ihre correspondirende Seiten auch eine gegebene Verhältniß zu einander. Fig. 57.

Die

Die zwo ähnliche geradlinichte Figuren A, B haben eine gegebene Verhältnis zu einander; so werden ihre correspondirende Seiten auch eine gegebene Verhältnis zu einander haben.

CD sey correspondirend mit EF; und zu CD, EF sey G eine dritte Proportional-Linie. Demnach[a] ist CD:G = A:B; nun ist A:B gegeben, mithin auch CD:G; nun ist CD:EF = EF:G, folglich[b] ist CD:EF gegeben.

a 2. cor. 20. 6.
b 13. dat.

Die Verhältnis CD:EF läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H; und weil A:B gegeben ist, so mache man A:B = H:K, und nach Anleitung des 13ten Satzes finde man zwischen H und K eine mittlere Proportional-Linie L; so wird CD:EF der gefundenen H:L gleich seyn. Denn es sey CD:EF = EF:G, so ist CD:G = (A:B =) H:K; und CD:EF = H:L, wie im 13ten Satz ist gezeigt worden.

54. Satz LIX.

Wenn zwo der Gattung nach gegebene geradlinichte Figuren eine gegebene Verhältnis zu einander haben, so werden ihre Seiten gleicherweise eine gegebene Verhältnis zu einander haben. Fig. 58.

Die

Die zwo geradlinichten Figuren A, B, die der ~~Lage~~ nach gegeben sind, haben eine gegebene Verhältnis zu einander; so werden ihre Seiten auch gegebene Verhältnisse zu einander haben. Gattung

Wenn die Figur A der Figur B ähnlich ist, so werden, kraft des vorhergehenden Satzes, ihre correspondirenden Seiten eine gegebene Verhältnis zu einander haben: und weil die Figuren der Gattung nach gegeben sind, so haben[a] die Seiten von jeder derselben gegebene Verhältnisse zu einander; folglich[b] hat jede Seite von einer derselben zu jeder Seite der andern eine gegebene Verhältnis.

[a] 3. def.

[b] 9. dat.

Ist aber die Figur A der Figur B nicht ähnlich, so seyen CD, EF irgend zwo von ihren Seiten, und über EF denke man sich die Figur EG ähnlich und ähnlich-liegend mit A, so daß CD, EF die correspondirenden Seiten seyen; demnach ist EG der Gattung nach gegeben, und weil B der Gattung nach gegeben ist, so ist[c] B : EG gegeben; nun ist A : B gegeben; mithin[b] ist A : EG gegeben, und weil A der EG ähnlich ist, so ist[d] CD : EF gegeben; folglich[b] sind die Verhältnisse der übrigen Seiten zu den übrigen Seiten gegeben.

[c] 53. dat.

[d] 58. dat.

Die Verhältnis C D : E F läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H; und weil A : B gegeben ist, so mache man A : B = H : K. Aus dem 53sten Satz finde man B : E G, und mache ihr gleich K : L. Endlich mache man H : M = M : L; so wird C D : E F = H : M, mithin gefunden seyn. Denn weil A : B = H : K, und B : E G = K : L, so ist ex *æquo* A : E G = H : L; nun sind A, E G ähnliche Figuren, und M ist eine mittlere Proportional = Linie zwischen H und L; folglich ist, wie im vorhergehenden Satz bewiesen worden, C D : E F = H : M.

55. Satz LX.

Wenn eine geradlinichte Figur der Gattung und Größe nach gegeben ist, so werden ihre Seiten der Größe nach gegeben seyn. Fig. 59.

Die geradlinichte Figur A sey der Gattung und Größe nach gegeben, so sind ihre Seiten der Größe nach gegeben.

Man nehme eine der Lage und Größe nach
a 18. 6. gegebene gerade Linie B C, und beschreibe[a] darüber die Figur D ähnlich und ähnlich = liegend

mit

mit der Figur A, und E F sey mit B C correspondirend, so ist D der Gattung nach gegeben: und weil die der Gattung nach gegebene D über der gegebenen Linie B C beschrieben ist, so ist[b] D der Größe nach gegeben; und weil A der Größe nach gegeben ist, so ist[c] A : D gegeben; und weil A der D ähnlich ist, so ist[d] EF : BC gegeben; nun ist B C gegeben, folglich ist[e] EF gegeben; und weil E F : E G gegeben ist, so ist[f] EG gegeben. Eben so läßt sich beweisen, daß jede der andern Seiten der Figur A gegeben ist.

b 56. dat.
c 1. dat.
d 58. dat.
e 2. dat.
f 3. def.

Aufgabe.

Eine geradlinichte Figur A zu beschreiben, die einer gegebenen Figur D ähnlich, und einer andern gegebenen H gleich sey. Es ist der 25ste S. des 6ten B. der Elem.

Weil jede der Figuren D, H gegeben ist, so ist ihre Verhältnis gegeben; wenn man nämlich[g] über der gegebenen B C das Prllgr. BK = D, und über seiner Seite CK, das Prllgr. KL = H macht, so daß der Winkel K C L = MBC ist; so wird D:H, das ist, BK : KL = BC : CL seyn. Und weil D, A einander ähnlich sind, und D : A (H) = BC : CL, so ist nach dem 58sten Satz die Verhältnis der correspondirenden Seiten BC, EF einer-

g cor. 45. 1.

ley mit der Verhältnis von BC zu einer mittlern Proportional = Linie zwischen BC und CL. Diese Linie EF finde man; so ist EF die Seite der zu beschreibenden Figur, correspondirend mit BC, der Seite von D; und die Figur selbst läßt sich nach dem 18ten Satz des 6ten Buches der Elem. beschreiben. Sie wird der Verzeichnung nach, der Figur D ähnlich seyn; und weil D:A
h 2. cor. 20. 6. = BC : CL[h] = BK : KL, und D =
i 45. 1. BK, so ist[i] A = KL = H.

57.

Satz LXI.

Wenn in einem, der Größe nach gegebenen Parallelogramm, eine seiner Seiten und einer seiner Winkel der Größe nach gegeben sind, so ist auch die andere Seite gegeben. Fig. 60.

In dem Prllgr ABDC, das der Größe nach gegeben ist, sey die Seite AB und der Winkel BAC der Größe nach gegeben; so ist auch die andere Seite AC gegeben.

Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie EF; weil nun das Prllgr
a 1. def. AD der Größe nach gegeben ist, so läßt sich[a] eine ihm gleiche geradlinichte Figur finden, und
b cor. 45. 1. ein, dieser Figur gleiches, Prllgr läßt[b] sich über

der

der gegebenen EF unter einem, dem gegebenen BAC gleichen Winkel beschreiben. Es sey dieß das Prllgr EFHG, das den Winkel FEG = BAC habe. Weil nun AD = EH, und A = E, so sind [c] die anliegenden Seiten in umgekehrter Verhältnis, das ist, AB:EF = EG:AC; nun sind AB, EF, EG gegeben, folglich [d] auch AC. Hieraus erhellet, wie AC zu finden ist.

c 14. 6.
d 12. 6.

Satz XLII. H.

Wenn ein Parallelogramm einen gegebenen Winkel hat, so hat das Rechtek, das durch die anliegenden Seiten formirt wird, eine gegebene Verhältnis zu dem Parallelogramm. Fig. 61.

Das Prllgr ABCD habe den gegebenen Winkel ABC; so hat AB × BC eine gegebene Verhältnis zu ABCD.

Von dem Punct A fälle man AE senkrecht auf BC; weil nun der Winkel ABC gegeben ist, wie auch AEB, so ist △ ABE der Gattung nach gegeben [a]; mithin ist BA : AE gegeben. Nun ist BA : AE = AB × BC : AE × BC [b], folglich ist AB × BC : AE × BC, das ist [c], AB × BC : ADCD gegeben.

a 43. dat.
b 1. 6.
c 35. 1.

Und es ist klar, wie die Verhältnis des Rechteks zu dem Prllgr kann gefunden werden; man mache nämlich den Winkel FHG = ABC, und ziehe von irgend einem Punct F in einer seiner Seiten, FK senkrecht auf die andere GH; so ist GF : FK = BA : AE = AB × BC : ABCD.

66. Zusatz. Und wenn △ ABC einen gegebenen Winkel ABC hat, so wird das Rechtek AB × BC, das durch die anliegenden Seiten formirt wird, eine gegebene Verhältnis zu dem △ ABC haben.

Man vollende das Prllgr ABCD, so ist, kraft dieses Satzes, AB × BC : ABCD gegeben; nun ist[d] ABCD : △ ABC gegeben; folglich ist[e] AB × BC : △ ABC gegeben.

d 14. 1.
e 9. dat.

Und die Verhältnis des Rechteks zu dem Dreyek läßt sich folgendermaaßen finden. Man mache △ FGK, wie gezeigt worden; so ist AB × BC : △ ABC = GF : $\frac{1}{2}$ FK. Denn, wie gezeigt worden, so ist GF : FK = AB × BC : ABCD; folglich GF : $\frac{1}{2}$ FK = AB × BC : $\frac{1}{2}$ ABCD, das ist, △ ABC.

Satz

Satz LXIII. 56.

Wenn zwey Parallelogramme gleichwinklicht sind, so verhält sich eine Seite des ersten zu einer Seite des zweyten, wie die andere Seite des zweyten zu einer geraden Linie, zu der die andere Seite des ersten eben die Verhältnis hat, wie das erste Parallelogramm zu dem zweyten. Und folglich, wenn die Verhältnis des ersten Parallelogrammes zu dem zweyten gegeben ist, so ist die Verhältnis der andern Seite des ersten zu dieser geraden Linie gegeben; und wenn die Verhältnis der andern Seite des ersten zu dieser geraden Linie gegeben ist, so ist die Verhältnis des ersten Parallelogrammes zu dem zweyten gegeben. Fig. 62.

AC, DF seyen zwey gleichwinklichte Parallelogramme, so verhält sich BC, eine Seite des ersten, zu EF einer Seite des zweyten, wie DE, die andere Seite des zweyten, zu der geraden Linie, zu welcher AB, die andere Seite des ersten, eben die Verhältnis hat, wie AC zu DF.

Man verlängere AB, und mache BC : EF = DE : BG, und vollende das Prllgr BGHC; weil nun (BC) GH : EF = DE : BG, so sind die anliegenden Seiten der gleichen Winkel

BGH, DEF, in umgekehrter Verhältnis; folglich[a] ist Prllgr BH = DF; nun ist AB : BG = AC : BH, folglich AB : BG = AC : DF; nun ist BC : EF = DE : BG, folglich ist BG die gerade Linie, die die im Satz gemeldten Eigenschaften hat.

a 14. 6.

Und wenn AC : DF gegeben ist, so ist AB : BG gegeben; und hinwiederum, wenn AB : BG gegeben ist, so ist AC : DF gegeben.

74. 73.

Satz XLIV.

Wenn zwey Parallelogramme ungleiche, aber gegebene Winkel haben, und wenn eine Seite des ersten zu einer Seite des zweyten sich verhält, wie die andere Seite des zweyten zu einer gewißen geraden Linie; so wird, wenn die Verhältnis des ersten Parallelogrammes zu dem zweyten gegeben ist, die Verhältnis der andern Seite des ersten zu jener geraden Linie gegeben seyn: Und wenn die Verhältnis der andern Seite des ersten zu jener geraden Linie gegeben ist, so wird die Verhältnis des ersten Parallelogrammes zu dem zweyten gegeben seyn. Fig. 63.

ABCD, EFGH seyen zwey Prllgr, welche die ungleichen aber gegebenen Winkel ABC, EFG haben; und man setze BC : FG = EF : M.

Wenn

Wenn die Verhältnis der Prllgre AC, EG gegeben ist, so ist AB : M gegeben.

An B, dem Endpunct der Linie BC, mache man den Winkel CBK = EFG, und vollende das Prllgr KBCL. Weil nun AC : EG gegeben ist, und[a] Prllgr AC = KC, so ist KC : EG gegeben; nun sind KC, EG gleichwinklicht, folglich ist[b] BC zu FG wie EF zu der geraden Linie, zu welcher KB eine gegebene Verhältnis hat, nämlich eben die, die das Prllgr KC zu EG hat; nun aber ist BC : FG = EF : M; mithin ist M die gerade Linie, zu welcher KB eine gegebene Verhältnis hat, oder KB : M ist gegeben; nun ist AB : BK gegeben, weil △ ABK der Gattung nach gegeben ist[c]; folglich ist[d] AB : M gegeben.

a 35. I.
b 63. dat.
c 43. dat.
d 9. dat.

Und wenn AB : M gegeben ist, so ist Prllgr AC : EG gegeben. Denn weil KB : BA, wie auch AB : M gegeben ist, so ist KB : M gegeben[d]; und weil Prllgr KC, EG gleichwinklicht sind, so ist[b] BC zu FG wie EF zu der geraden Linie, zu welcher KB eben die Verhältnis hat, wie Prllgr KC zu EG; nun ist KB : M gegeben, folglich ist Prllgr (KC) AC : EG gegeben.

b 63. dat.

75. Zusaz. Und wenn zwey Dreyecke ABC, EFG zween gleiche, oder ungleiche, aber gegebene Winkel ABC, EFG haben, und wenn BC, eine Seite des ersten, sich zu FG, einer Seite des zweyten, verhält, wie EF, die andere Seite des zweyten, zu einer geraden Linie M; so wird, wenn die Verhältnis der Dreyecke gegeben ist, die Verhältnis der andern Seite des ersten zu der geraden M gegeben seyn.

Denn man vollende Prllgr ABCD, EFGH; weil nun △ ABC : △ EFG gegeben
e 15. 5. ist, so ist[e] Prllgr AC : EG gegeben[f] und weil
f 41. 1. BC : FG = EF : M, so ist kraft des 63sten Satzes AB : M gegeben, wenn die Winkel ABC, EFG gleich sind; sind sie ungleich, aber gegeben, so ist AB : M kraft dieses Satzes gegeben.

Und wenn AB : M gegeben ist, so ist Prllgr AC : EG kraft eben dieser Sätze gegeben; folglich ist △ ABC : △ EFG gegeben.

68.

Satz LXV.

Wenn zwey gleichwinklichte Parallelogramme eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und wenn eine Seite eine gegebene Verhältnis zu einer Seite hat; so wird auch die andere Seite zu der andern Seite eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 64.

Die

Die zwey gleichwinklichte Prllgr AB, CD haben eine gegebene Verhåltnis zu einander, und die Seite EB habe zu der Seite FD eine gegebene Verhåltnis; so wird auch die andere Seite AE eine gegebene Verhåltnis zu der andern CF haben.

Weil die zwey Prllgr AB, CD gleichwinklicht sind, und AB : CD gegeben ist, so ist[a] EB zu FD wie FC zu der geraden Linie, zu welcher AE eben die gegebene Verhåltnis hat wie Prllgr AB zu CD. Diese gerade Linie sey EG; folglich ist AE : EG gegeben; und weil EB:FD = FC:EG, so ist, weil EB:FD gegeben ist, auch FC : EG gegeben; und weil AE : EG, wie auch FC : EG gegeben ist, so ist[b] AE : CF gegeben.

a 63. dat.

b 9. dat.

Die Verhåltnis AE : CF låßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Grôße nach gegebene gerade Linie H; und weil Prllgr AB : CD gegeben ist, so mache man H:K dieser Verhåltnis gleich; und weil FD : EB gegeben ist, so mache man K : L derselben gleich; so wird AE : CF = H : L, mithin gefunden seyn. Denn weil EB:FD = FC:EG, so ist FD : EB = EG : FC; nun ist[a] AE : EG = (Prllgr AB:CD =) H:K, und EG : FC = (FD : EB =) K : L; folglich *ex æquo* AE : FC = H : L.

Satz

Satz XLVI.

69. **Wenn zwey Parallelogramme ungleiche, aber gegebene Winkel, und eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so wird, wenn eine Seite eine gegebene Verhältnis zu einer Seite hat, auch die andere Seite eine gegebene Verhältnis zu der andern Seite haben.** Fig. 65.

Die zwey Prllgr ABCD, EFGH, worin die ungleichen Winkel ABC, EFG gegeben sind, haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und es sey BC:FG gegeben; so wird auch AB : EF gegeben seyn.

An B, dem Endpunct der geraden Linie BC mache man den Winkel CBK gleich dem gegebenen EFG, und vollende das Prllgr BKLC; weil nun jeder der Winkel BAK, AKB
a 43. dat. gegeben ist, so ist[a] das △ ABK der Gattung nach gegeben; mithin ist AB : BK gegeben; und weil (hyp.) Prllgr AC : EG gegeben ist,
b 35. 1. und[b] AC = BL, so ist BL : EG gegeben; und weil BL mit EG gleichwinklicht, und
c 65. dat. (hyp.) BC : FG gegeben ist, so ist[c] KB : EF gegeben; nun ist KB : BA gegeben; folglich
d 9. dat. ist[d] AB : EF gegeben.

Die

Die Verhältnis AB : EF läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme die, der Lage und Größe nach gegebene, Linie MN, und mache den Winkel NMO gleich dem gegebenen BAK, und den Winkel MNO gleich dem gegebenen EFG oder AKB; weil nun Prllgr BL mit EG gleichwinklicht ist und eine gegebene Verhältnis zu ihm hat, und BC : FG gegeben ist, so finde man aus dem 65sten Satz die Verhältnis KB : EF, und mache NO : OP derselben gleich; dann wird AB:EF = MO:OP, mithin gefunden seyn. Denn weil △ ABK mit △ MON gleichwinklicht ist, so ist AB : BK = MO : ON, und weil KB : EF = NO : OP, so ist *ex æquo* AB : EF = MO : OP.

Satz LXVII. 70.

Wenn die Seiten zweyer gleichwinklichten Parallelogramme gegebene Verhältnisse zu einander haben; so werden die Parallelogramme eine gegebene Verhältnis zu einander haben. Fig. 66.

Die zwey Prllgr ABCD, EFGH seyen gleichwinklicht, und AB : EF, wie auch BC : FG seyen gegeben; so ist Prllgr AC : EG gegeben.

Man

Man nehme eine der Größe nach gegebene K, und weil AB : EF gegeben ist, so mache
a 2. dat. man AB : EF = K : L; mithin [a] ist L gegeben; und weil BC : FG gegeben ist, so mache man BC : FG = L : M; mithin [a] ist M ge-
b 1. dat. geben; nun ist K gegeben, folglich auch [b] K : M. Endlich ist Prllgr AC : EG = K : M, wie in dem 23sten S. des 6ten Buches der Elem. bewiesen ist; folglich ist AC : EG gegeben.

Hieraus erhellet, wie die Verhältnis zweyer gleichwinklichten Prllgr kann gefunden werden, wenn die Verhältnisse ihrer Seiten gegeben sind.

70. Satz LXVIII.

Wenn die Seiten zweyer Parallelogramme, die ungleiche, aber gegebene Winkel haben, gegebene Verhältnisse zu einander haben, so wird die Verhältnis der Parallelogramme gegeben seyn. Fig. 67.

In den zwey Prllgr ABCD, EFGH, die die gegebenen ungleichen Winkel ABC, EFG haben, seyn die Verhältnisse ihrer Seiten, nämlich AB : EF, und BC : FG, gegeben; so wird Prllgr AC : EG gegeben seyn.

An B, dem Endpunct von BC, mache man den Winkel CBK gleich dem gegebenen EFG, und vollende Prllgr KBCL. Weil nun jeder der Winkel BAK, BKA, gegeben ist, so ist[a] △ ABK der Gattung nach gegeben; mithin ist AB : BK gegeben; und weil AB : EF gegeben ist, so ist[b] BK : EF gegeben; nun ist BC : FG gegeben, und der Winkel KBC = EFG, folglich[c] ist Prllgr KC : EG gegeben; und weil Prllgr KC = AC[d], so ist AC : EG gegeben.

a 43. dat.
b 9. dat.
c 67. dat.
d 35. I.

Die Verhältnis der Prllgr AC, EG läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme die, der Lage und Größe nach gegebene MN, und mache den Winkel MNO gleich dem gegebenen KAB, und NMO gleich dem gegebenen AKB oder FEH; weil nun AB : EF gegeben ist, so mache man AB : EF = NO : P; gleicherweise mache man BC : FG = P : Q; so wird Prllgr AC : EG = MO : Q.

Denn weil KAB = MNO, und AKB = NMO, so ist △ AKB mit △ NMO gleichwinklicht; folglich ist KB : BA = MO : ON; und weil BA : EF = NO : P, so ist *ex æquo*, KB : EF = MO : P; ferner weil BC : FG = P : Q, und die Prllgr KC, EG gleichwinklicht sind, so ist, wie im 67sten §. gezeigt worden, Prllgr (KC) AC : EG = MO : Q.

Zusatz.

71. Zusatz. 1. Wenn zwey △ △ ABC, DEF zween gleiche, oder zween ungleiche, aber gegebene Winkel ABC, DEF haben, und wenn die Verhältnisse der anliegenden Seiten, nämlich AB : DE, und BC : EF gegeben sind; so wird die Verhältnis der Dreyecke gegeben seyn. Fig. 68.

Denn man vollende die Prllgr BG, EH,
a 67. oder 68. dat. so ist[a] BG : EH gegeben; nun ist[b] $\frac{1}{2}$ BG
b 34. 1. = △ ABC, und $\frac{1}{2}$ EH = △ EDF,
c 15. 5. folglich[c] ist △ ABC : EDF gegeben.

72. Zusatz. 2. Wenn die Grundlinien BC, EF zweyer △ △ ABC, DEF eine gegebene Verhältnis zu einander haben; und wenn auch die geraden Linien AG, DH, die von den entgegengesetzten Winkeln auf die Grundlinien, entweder unter gleichen, oder ungleichen aber gegebenen Winkeln AGC, DHF gezogen werden, eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so wird △ ABC : △ DEF gegeben seyn. Fig. 69.

Denn man ziehe BK, EL parallel mit AG, DH, und vollende die Prllgr KC, LF. Weil nun die Winkel AGC, DHF, oder KBC, LEF entweder gleich, oder ungleich, aber gegeben sind, und AG : DH, das ist, KB : LE, wie auch BC : EF gegeben sind; so ist[a] Prllgr KC:LF, folglich auch[b] △ABC: △DEF gegeben. a 67. oder 68. dat. b {41. 1. 15. 5.}

Satz LXIX. 61.

Wenn ein Parallelogramm, das einen gegebenen Winkel hat, an die Seite einer der Gattung nach gegebenen geradlinichten Figur angelegt wird; so wird, wenn die Figur eine gegebene Verhältnis zu dem Parallelogramm hat, das Parallelogramm der Gattung nach gegeben seyn. Fig. 70.

ABCD sey eine der Gattung nach gegebene geradlinichte Figur, und an eine ihrer Seiten AB werde das Prllgr ABEF, das den gegebenen Winkel ABE hat, angelegt; so wird, wenn ABCD eine gegebene Verhältnis zu dem Prllgr BF hat, BF der Gattung nach gegeben seyn.

Durch den Punct A ziehe man AG parallel mit BC, und durch den Punct C ziehe man CG parallel mit AB, und verlängere GA, CB bis zu den Puncten H, K; weil nun[a] der Winkel ABC, wie auch AB:BC in der, der Gattung nach gegebenen ABCD gegeben ist, so ist[a] Prllgr BG der Gattung nach gegeben. Und weil die zwo, der Gattung nach gegebenen, geradlinichten Figuren BD, BG über ebenderselben ge- a 3 def.

b 53. dat. raden Linie AB beschrieben sind, so ist[b] BD : BG gegeben; nun ist (*hyp.*) BD : BF gegeben, folglich[c] ist (BF) BH : BG gegeben,
c 9. dat.
d 1. 6. mithin[d] ist die Verhältnis der geraden Linie KB : BC gegeben; und weil BC : BA gegeben ist, so ist[c] KB : BA gegeben. Ferner weil der Winkel ABC gegeben ist, so ist der Nebenwinkel ABK gegeben; und weil ABE gegeben ist, ist der Rest KBE gegeben; auch ist EKB gegeben, weil er gleich ABK ist; folglich ist △ BKE der Gattung nach gegeben; mithin ist EB : BK gegeben; nun ist KB : BA gegeben, mithin[c] ist EB : BA gegeben; und weil der Winkel ABE gegeben ist, so ist[a] Prllgr BF der Gattung nach gegeben.

Ein dem Prllgr BF ähnliches Prllgr läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene LM; weil nun die Winkel ABK, ABE gegeben sind, so mache man NLM = ABK, und NLO = ABE. Ferner weil BF : BD gegeben ist, so mache man BF : BD = LM : P; und weil die Verhältnis der Figuren BD : BG gegeben ist, so finde man diese Verhältnis aus dem 53sten S. und mache derselben P : Q gleich. Ferner weil CB : BA gegeben ist, so mache man derselben Q : R gleich, und nehme LN = R; durch den Punct M ziehe man OM parallel mit LN, und vollende das Prllgr N L O S; so wird NLOS dem Prllgr BF ähnlich seyn.

Denn weil der Winkel ABK = NLM, und ABE = NLO, so ist KBE = MLO, nun ist BKE = LMO, weil ABK = NLM; mithin sind die △ △ BKE, LMO gleichwinklicht; folglich ist BE : BK = LO : LM; ferner weil BF : BD = LM : P, und BD : BG = P : Q, so ist *ex æquo*, (BF)[e] BH : BG = LM : Q; nun ist[f] BH : BG = KB : BC, folglich KB : BC = LM : Q; weil nun BE : BK = LO : LM, und BK : BC = LM : Q, und BC : BA = Q : R, so ist *ex æquo* BE : BA = LO : R = LO : LN; nun ist der Winkel ABE = NLO, folglich ist das Prllgr BF dem LS ähnlich.

e 35. I.
f 1. 6.

Satz LXX.

Wenn zwo gerade Linien eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und über der einen davon, eine der Gattung nach gegebene geradlinichte Figur, über der andern aber ein Parallelogramm, das einen gegebenen Winkel hat, beschrieben wird; so ist, wenn die Figur eine gegebene Verhältnis zu dem Parallelogramm hat, das Parallelogramm der Gattung nach gegeben. Fig. 71.

Die zwo gerade Linien AB, CD haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und über AB sey die der Gattung nach gegebene Figur AEB, über CD aber das Prllgr DF, das den gegebenen Winkel FCD hat, beschrieben; so ist, wenn △ AEB : Prllgr DF gegeben ist, das Prllgr DF der Gattung nach gegeben.

Ueber der geraden Linie AB denke man sich das Prllgr AG, dem Prllgr FD ähnlich, und ähnlich mit ihm liegend beschrieben. Weil nun AB : CD gegeben ist, und über AB und CD die ähnlichen geradlinichten Figuren AG, FD
a 54. dat. beschrieben sind, so ist [a] AG : FD gegeben; nun
b 9. dat. ist FD : △ AEB gegeben; mithin [b] ist △ AEB : AG gegeben; ferner ist der Winkel ABG gegeben, weil er gleich FCD ist; weil demnach das Prllgr AG, das einen gegebenen Winkel ABG hat, an die Seite AB einer, der Gattung nach gegebenen Figur AEB angelegt,
c 69. dat. und △ AEB : AG gegeben ist, so ist [c] Prllgr AG der Gattung nach gegeben; nun aber ist FD dem AG ähnlich, folglich ist FD der Gattung nach gegeben.

Ein dem FD ähnliches Prllgr läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H; weil nun △ AEB : FD gegeben ist, so mache man ihr die Verhältnis H : K gleich; eben so, weil CD : AB

AB gegeben ist, finde man aus dem 54sten S. die Verhältnis, die die, über CD beschriebene Figur FD, zu der über AB beschriebenen ähnlichen Figur AG hat, und mache derselben K:L gleich; weil nun H:K, und K:L gegeben sind, so ist[b] H:L gegeben; weil demnach △ AEB : FD = H:K, und FD : AG = K:L, so ist *ex æquo* △ AEB : AG = H:L; mithin ist △ AEB : AG gegeben; weil nun △ AEB der Gattung nach gegeben, und das Prllgr AG an die Seite AB unter einem gegebenen Winkel ABG angelegt ist, so läßt sich aus dem 69sten Satz ein dem AG ähnliches Prllgr finden; es sey Prllgr MN; MN ist also dem FD ähnlich; denn (*constr.*) MN ist dem AG ähnlich, und AG ist dem FD ähnlich; folglich ist FD dem MN ähnlich.

b 9. dat.

Satz LXXI. 81.

Wenn die äussersten von drey geraden Proportional-Linien gegebene Verhältnisse zu den äussersten von drey andern Proportional-Linien haben, so werden auch die mittlern eine gegebene Verhältnis zu einander haben. Und wenn eine äusserste eine gegebene Verhältnis zu einer äussersten, und die mittlere eine gegebene Verhältnis zu der mittlern hat; so

wird auch die andere äusserste eine gegebene Verhältnis zu der andern äussersten haben. Fig. 72.

A, B, C seyen drey gerade Proportional-Linien, und D, E, F drey andere; und A : D, wie auch C : F seyen gegeben; so wird auch B : E gegeben seyn.

Weil A : D, wie auch C : F gegeben ist, so ist[a] A × C : D × F gegeben; nun ist[b] Bq = A × C, und[b] Eq = D × F; mithin ist Bq : Eq gegeben; folglich[c] ist auch B : E gegeben.

a 67. dat.
b 17. 6.
c 58. dat.

Nun setze man, A : D und B : E seyen gegeben, so wird auch C : F gegeben seyn.

Denn weil B : E gegeben ist, so ist[d] Bq : Eq gegeben; folglich[b] ist A × C : D × F gegeben; nun ist A : D gegeben, folglich[e] ist auch C : F gegeben.

d 54. dat.
e 65. dat.

Zusatz. Und wenn die äussersten von vier Proportional-Linien zu den äussersten von vier andern, gegebene Verhältnisse haben, und eine von den mittlern eine gegebene Verhältnis zu einer von den mittlern hat; so wird die andere mittlere eine gegebene Verhältnis zu der andern mittlern haben, wie sich auf eben die Art, wie im Satze zeigen läßt.

Satz

Satz LXXII. 82.

Wenn vier gerade Linien proportionell sind, so wird, wie sich die erste zu der geraden Linie verhält, zu welcher die zweyte eine gegebene Verhältnis hat, sich die dritte zu einer geraden Linie verhalten, zu welcher die vierte eine gegebene Verhältnis hat. Fig. 73.

A, B, C, D seyen vier Proportional = Linien, es sey nämlich A : B = C : D; so wird, wie sich verhält A zu der geraden Linie, zu welwelcher B eine gegebene Verhältnis hat, sich C verhalten zu einer geraden Linie, zu welcher D eine gegebene Verhältnis hat.

Es sey E die gerade Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältnis hat; und man mache B : E = D : F, weil nun (*hyp.*) B : E gegeben ist, so ist D : F gegeben; und weil A : B = C : D, und B : E = D : F, so ist *ex æquo* A : E = C : F; nun ist E die gerade Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältnis hat, und F die, zu welcher D eine gegebene Verhältnis hat; folglich wie sich A verhält zu der geraden Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältnis hat, so verhält sich C zu einer Linie, zu welcher D eine gegebene Verhältnis hat.

83. ## Satz LXXIII.

Wenn vier gerade Linien proportionell sind; so wird, wie sich die erste zu der geraden Linie verhält, zu welcher die zweyte eine gegebene Verhältnis hat, die gerade Linie, zu welcher die dritte eine gegebene Verhältnis hat, sich zu der vierten verhalten. Fig. 74.

Es sey A : B = C : D; so wird, wie sich verhält A zu der geraden Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältnis hat, eine gerade Linie, zu welcher C eine gegebene Verhältnis hat, sich zu D verhalten.

Es sey E die gerade Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältnis hat, und man mache B : E = F : C; weil nun B : E gegeben ist, so ist F : C gegeben; und weil A : B = C : D, und B : E = F : C, so ist *ex æquo & perturbatim*[a] A : E = F : D, das ist, A verhält sich zu E, zu welcher B eine gegebene Verhältnis hat, wie F, zu welcher C eine gegebene Verhältnis hat, sich zu D verhält.

a 23. 5.

64. ## Satz LXXIV.

Wenn ein Dreyek einen gegebenen stumpfen Winkel hat; so wird der Ueberschuß des

des Quadrates der Seite, die dem stumpfen Winkel gegenüber steht, über die Quadrate der anliegenden Seiten, eine gegebene Verhältnis zu dem Dreyek haben. Fig. 75.

Das △ ABC habe einen gegebenen stumpfen Winkel ABC; und man verlängere die gerade Linie CB, und von dem Punct A fälle man AD senkrecht auf BC; so hat ACq — (ABq + BCq) das ist[a] 2 DB × BC eine gegebene Verhältnis zu dem △ ABC. a 12. 2.

Weil der Winkel ABC gegeben ist, so ist auch ABD gegeben; weil nun auch ADB gegeben ist, so ist[b] das △ ABD der Gattung nach gegeben, folglich ist AD : DB gegeben. b 43. dat.

Nun ist[c] AD : DB = AD × BC : DB × BC, mithin ist AD × BC : DB × BC, wie auch 2 DB × BC : AD × BC gegeben; nun ist AD × BC : △ ABC gegeben, weil[d] AD × BC = 2 △ ABC; folglich[e] ist 2 DB × BC : △ ABC gegeben; nun aber ist 2 DB × BC = ACq — (ABq + BCq), folglich hat ACq — (ABq + BCq) eine gegebene Verhältnis zu dem △ ABC. c 1. 6. d 41. 1. e 9. dat.

Die Verhältnis dieses Ueberschusses zu dem △ ABC läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie EF; weil nun der Winkel ABC gegeben ist, so mache man an dem Punct F der Linie EF, den Winkel EFG = ABC; man verlängere GF, und fälle EH senkrecht auf FG; so ist ACq — (ABq + BCq) : △ ABC = 4 HF : HE.

Denn weil der Winkel ABD = EFH, und ADB = EHF, so ist △ ADB gleichwinklicht mit dem △ EHF, folglich[f] ist BD : DA = FH : HE, mithin[g] 4 BD : DA = 4 FH : HE; nun ist[c] 2 BD : DA = 2 BD × BC : DA × BC, und DA : $\frac{1}{2}$ DA = AD × BC : ($\frac{1}{2}$ AD × BC) △ ABC, mithin *ex æquo*, 2 BD : $\frac{1}{2}$ DA, das ist, 4 BD : DA, das ist, 4 FH : HE = 2 BD × BC : △ ABC.

f 4. 6.
g Cor. 4. 5.

65. Satz LXXV.

Wenn ein Dreyek einen gegebenen spitzigen Winkel hat; so wird der Raum, um den das Quadrat der, dem spitzigen Winkel gegenüberstehenden Seite kleiner ist als die Quadrate der anliegenden Seiten, eine gegebene Verhältnis zu dem Dreyek haben. Fig. 76.

Das △ ABC habe einen gegebenen spitzigen Winkel ABC, und man fälle AD senkrecht auf BC; so hat ABq + BCq — ACq, das ist

ist[a], $2\,CB \times BD$ eine gegebene Verhältnis zu $\triangle ABC$. a 13. 2.

Weil die Winkel ABD, ADB, jeder für sich, gegeben sind, so ist $\triangle ABD$ der Gattung nach gegeben; mithin ist $BD : DA$ gegeben; nun ist $BD : DA = CB \times BD : CB \times DA$; folglich ist $CB \times BD : CB \times DA$ gegeben, wie auch $2\,CB \times BD : CB \times DA$; nun ist $CB \times DA : \triangle ABC$ gegeben, folglich[b] ist $2\,CB \times BD : \triangle ABC$ gegeben; nun aber ist $2\,CB \times BD = ABq + BCq - ACq$, folglich ist die Verhältnis dieses Raumes zu dem Dreyek gegeben; und sie läßt sich wie im vorhergehenden Satze finden. b dat.

Lehnsatz.

Wenn von dem Scheitelpunct A eines gleichschenklichten Dreyeks ABC irgend eine gerade Linie AD auf die Grundlinie BC gezogen wird; so ist das Quadrat der Seite AB gleich dem Rechtek aus BD, DC, den Segmenten der Grundlinie, samt dem Quadrat von AD; wird aber AD auf die verlängerte Grundlinie gezogen, so ist das Quadrat von AD gleich dem Rechtek aus BD, DC, samt dem Quadrat von AB. Fig. 77.

Fall. 1. Man theile die Grundlinie BC in zween gleiche Theile in E, und ziehe AE, die[a] auf BC senkrecht seyn wird: demnach[b] ist ABq a 8. I. b 47. I.

$=$

c 5. 2. $= AEq + EBq$; nun ist[c] $EBq = BD \times DC + DEq$; folglich ist $ABq = (AEq + DEq =)^b ADq + BD \times DC$.

Der andere Fall ist auf eben diese Art in 6. 2. Elem. gezeigt worden.

67. Satz LXXVI.

Wenn ein Dreyek einen gegebenen Winkel hat, so wird der Ueberschuß des Quadrates der geraden Linie, die den zwo anliegenden Seiten zusammengenommen gleich ist, über das Quadrat der dritten Seite, eine gegebene Verhältnis zu dem Dreyek haben. Fig. 78.

Das $\triangle ABC$ habe den gegebenen Winkel BAC, so wird $(BA + AC)q - BCq$ zu $\triangle ABC$ eine gegebene Verhältnis haben.

Man verlängere BA, und nehme $AD = AC$; man ziehe DC, und verlängere sie; durch den Punct B ziehe man BE parallel mit AC; dann ziehe man AE, und mache AF auf DC senkrecht.

Weil nun $AD = AC$, so ist $BD = BE$; ferner weil BC von dem Scheitelpunct B des gleichschenklichten $\triangle DBE$ gezogen worden, so so ist, kraft des Lehnsatzes, BDq, das ist, $(BA + AC)q = DC \times CE + BCq$; mithin ist $(BA + AC)q - BCq = DC \times CE$. Dieses Rechtek hat eine gegebene Verhältnis zu dem $\triangle ABC$. Denn der Winkel BAC ist gegeben, folglich auch der Nebenwinkel CAD; ferner ist jeder von den Winkeln ADC, DCA gegeben, weil jeder die Hälfte des gegebenen BAC ist[a], mithin ist $\triangle ADC$ der Gattung nach gegeben[b]; und weil AF von dem Scheitelpunct auf die Grundlinie unter einem gegebenen Winkel gezogen ist, so ist[c] $AF : CD$ gegeben; nun ist[d] $CD : AF = DC \times CE : AF \times CE$, und $AF \times CE : \triangle ACE$ ist gegeben[e]; folglich[f] ist $DC \times CE : \triangle ACE$, das ist[g], $\triangle ABC$ gegeben; und weil $DC \times CE = (BA + AC)q - BCq$, so ist die Verhältnis dieses Ueberschusses zu dem $\triangle ABC$ gegeben.

a 5 & 32. 1.
b 43. dat.
c 50. dat.
d 1. 6.
e 41. 1.
f 9. dat.
g 37. 1.

Die Verhältnis $DC \times CE : \triangle ABC$ läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene Linie GH, und an dem Punct G mache man den Winkel HGK gleich dem gegebenen CAD, und nehme $GK = GH$, vereinige KH, und ziehe GL senkrecht darauf; so wird $DC \times CE : \triangle ABC = HK : \frac{1}{2} GL$ seyn. Denn weil die Scheitelwinkel HGK, DAC in den gleichschenklichten Dreyecken einander gleich sind, so sind diese

Drey=

Dreyecke einander ähnlich; und weil GL, AF auf den Grundlinien HK, DC senkrecht sind, so ist h HK : GL = DC : AF = DC × CE : AF × CE; nun ist GL : $\frac{1}{2}$ GL = AF × CE : ($\frac{1}{2}$ AF × CE) △ ACE oder △ ABC; folglich *ex æquo* HK : $\frac{1}{2}$ GL = DC × CE : △ ABC.

h {4. 6. / 22. 9.

Zusatz. Und wenn ein Dreyek einen gegebenen Winkel hat, so wird der Raum, um den das Quadrat der anliegenden Seiten kleiner ist als das Quadrat der dritten Seite, eine gegebene Verhältnis zu dem Dreyek haben. Dieß läßt sich vermittelst des zweyten Falles des Lehnsatzes auf gleiche Weise, wie im vorhergehenden Satze, beweisen.

Satz LXXVII.

Wenn das von einem gegebenen Winkel eines Dreyeks auf die gegenüberstehende Seite, oder Grundlinie, herabgefällte Loth, eine gegebene Verhältnis zu der Grundlinie hat; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 79.

Das △ ABC habe den gegebenen Winkel BAC, und das auf die Grundlinie BC herabgegefällte Loth AD habe eine gegebene Verhältnis zu ihr; so ist △ABC der Gattung nach gegeben.

Wenn △ ABC ein gleichschenklichtes Dreyek ist, so ist evident[a], daß wenn einer seiner Winkel gegeben ist, auch die übrigen, jeder für sich gegeben sind; folglich ist das Dreyek der Gattung nach gegeben, ohne die Verhältnis des Lothes zur Grundlinie in Betracht zu ziehen, als welche in diesem Fall nach dem 50sten Satz gegeben ist. a 5 & 32. I.

Wenn aber △ ABC kein gleichschenklichtes Dreyek ist, so nehme man eine der Lage und Größe nach gegebene EF, und beschreibe darüber[b] einen des gegebenen Winkels BAC fähigen Kreis-Abschnitt EGF; aus H, der Mitte von EF richte man HG senkrecht auf, und ziehe EG, GF. Weil nun der Winkel EGF dem gegebenen BAC gleich, und △ EGF ein gleichschenklichtes Dreyek, △ BAC aber keines ist, so ist der Winkel FEG dem CBA nicht gleich. Man ziehe EL, so daß FEL = CBA; man vereinige FL, und fälle LM senkrecht auf EF. Weil nun die △△ ELF, BAC, wie auch die △△ MLE, DAB, gleichwinklicht sind, so ist ML : LE = DA : AB, und LE : EF = AB : BC, folglich *ex æquo* LM : EF = AD : BC; weil nun AD : BC gegeben ist, so ist auch LM : EF gegeben; und weil EF gegeben b 33. 3.

c 2. dat. geben ist, so ist[c] LM gegeben. Man vollende das Prllgr LMFK; weil nun LM gegeben ist, so ist FK der Größe nach gegeben; sie ist aber auch der Lage nach gegeben, und der Punct F ist
d 30. dat. gegeben; folglich[d] ist der Punct K gegeben; und weil die gerade Linie KL durch K mit der, der Lage nach gegebenen, EF parallel gezogen ist,
e 31. dat. so ist[e] KL der Lage nach gegeben; und weil der
f 28. dat. Bogen ELF der Lage nach gegeben ist, so ist[f] der Punct ~~F~~L gegeben. Weil nun die Puncte L,
g 29. dat. E, F gegeben sind, so sind[g] die Linien LE,
h 42. dat. EF, FL der Größe nach gegeben; mithin[h] ist △ LEF der Gattung nach gegeben; und weil △ ABC dem △ LEF ähnlich ist, so ist △ ABC der Gattung nach gegeben.

Weil LM < GH, so muß LM:EF, das ist, die gegebene Verhältnis AD : BC kleiner seyn als GH : EF, das ist, kleiner als die Verhältnis, welche die gerade Linie, wodurch die Grundlinie eines des gegebenen Winkels fähigen Kreis-Abschnittes, in zween gleiche Theile getheilt wird, zu dieser Grundlinie hat.

Zusatz. 1. Wenn in zwey △△ ABC, LEF der Winkel BAC = ELF, und wenn das Loth AD sich zur Grundlinie BC verhält, wie das Loth LM zu der Grundlinie EF; so sind die △△ ABC, LEF einander ähnlich.

Man

Man beschreibe um das △ ELF den Kreis EGF, und ziehe LN parallel mit EF; man vereinige EN, NF, und ziehe NO senkrecht auf EF. Weil nun ENF = ELF, und EFN = FNL (*angulo alterno*) das ist, FEL, der auf eben dem Bogen steht; so ist △ NEF dem △ LEF ähnlich; und in dem Abschnitt EGF kann es über der Grundlinie EF kein anderes Dreyek geben, worin die Verhältnis des Lothes zu EF mit der Verhältnis von LM oder NO zu EF einerley wäre, weil das Loth entweder größer oder kleiner seyn muß als LM oder NO. Nun aber kann, wie im vorhergehenden Beweise gezeigt worden, in dem Kreis-Abschnitt EGF über EF ein dem △ ABC ähnliches Dreyek beschrieben werden, und die Verhältnis seines Lothes zu der Grundlinie ist, wie gezeigt worden, einerley mit AD : BC, das ist, LM : EF; folglich muß dieses Dreyek entweder △ LEF oder △ NEF seyen, die daher dem △ ABC ähnlich sind.

Anmerkung des Uebersetzers: Dieser Beweis läßt sich auch auf folgende, vielleicht faßlichere Art vortragen.

Man beschreibe um das △ ELF den Kreis EGF, und mache den Winkel NEF = ABC, und ziehe NF, so wird, weil ENF = (ELF) BAC (*hyp.*), das △ ENF dem △ BAC

ähnlich seyn; nun fälle man von N das Loth NO auf EF, so ist, wie im Satze bewiesen worden, AD : BC = NO : EF; nun ist (*hyp.*) AD : BC = LM : EF, folglich NO : EF = LM : EF, mithin ist NO = LM. Man
i 33. I. ziehe NL, so ist[i] NL mit OM parallel; mithin ist der Winkel NLE = LEF; nun ist NLE = NFE, folglich ist NFE = LEF, folglich ist das △ NEF dem △ ELF ähnlich; nun ist es dem △ BAC ähnlich gemacht worden, folglich ist das △ ELF dem △ BAC ähnlich.

Zusatz. 2. Wenn ein △ ABC einen gegebenen Winkel BAC hat, und wenn die Linie AR, von dem gegebenen Winkel an die gegenüberstehende Seite, unter einem gegebenen Winkel ARC gezogen, eine gegebene Verhältnis zu BC hat; so ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

Man ziehe AD senkrecht auf BC, so ist △ ARD der Gattung nach gegeben; mithin ist AD : AR gegeben, und weil (*hyp.*) AR:BC
k 9. dat. gegeben ist, so ist[k] AD : BC gegeben; folglich[l]
l 77. dat. ist ABC der Gattung nach gegeben.

Zusatz. 3. Wenn in zwey △ △ ABC, LEF der Winkel BAC = ELF, und wenn die

von

von diesen Winkeln auf die Grundlinien, unter gegebenen und gleichen Winkeln, gezogenen geraden Linien einerley Verhältnis zu den Grundlinien haben; so sind die Dreyecke einander ähnlich. Denn wenn man von den gleichen Winkeln Lothe auf die Grundlinien herabfällt, so verhält sich ein Loth zu seiner Grundlinie, wie das andere zu seiner Grundlinie m; folglich nach Zus. 1. sind die Dreyecke ähnlich.

m {4. 6. / 22. 5.

Ein dem △ A B C ähnliches Dreyek läßt sich folgendermaaßen finden. Nachdem man den Kreis-Abschnitt EGF beschrieben, und die Linie GH gezogen, wie in dem Satze gewiesen worden, so finde man FK, die zu EF die gegebene Verhältnis AD : BC hat; und von dem Punct F richte man FK senkrecht über EF auf. Weil nun, wie gezeigt worden, AD:BC, das ist, FK : EF kleiner seyn muß als GH : EF; so ist FK kleiner als GH; folglich muß die, durch den Punct K mit EF parallel gezogene Linie den Bogen des Kreis-Abschnittes in zween Puncten berühren; einer davon sey L, und man ziehe EL, LF, und LM senkrecht auf EF; so wird, weil der Winkel BAC = ELF, und AD:BC = (KF) LM:EF, das △ ABC dem △ LEF ähnlich seyn, kraft des 1. Zus.

80. Satz LXXVIII.

Wenn ein Dreyek einen gegebenen Winkel hat, und wenn die Verhältnis des Rechteckes der anliegenden Seiten zu dem Quadrate der dritten Seite gegeben ist; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 80.

Das △ ABC habe den gegebenen Winkel BAC, und die Verhältnis BA × AC : BCq sey gegeben; so ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

Von dem Punct A fälle man AD senkrecht
a 41. 1. auf BC, so ist[a] AD × BC : △ ABC, (das Ganze zu der Hälfte), gegeben; und weil der
b Cor. 62. dat. Winkel BAC gegeben ist, so ist[b] △ ABC : BA × AC gegeben; nun ist (*hyp.*) BA ×
c 9. dat. AC : BCq gegeben, folglich[c] ist AD × BC :
d 1. 6. BCq, das ist[d], AD : BC gegeben; folg-
e 77. dat. lich[e] ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

Ein dem △ ABC ähnliches Dreyek läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine, der Lage und Größe nach, gegebene Linie EF, und mache FEG gleich dem gegebenen Winkel BAC, und ziehe FH senkrecht auf EG, und BK senkrecht auf AC; folglich sind die △△ ABK,

ABK, EFH einander ähnlich; und AD × BC, oder das ihm gleiche BK × AC : BA × AC = BK : BA = FH : FE. Nun setze man, die gegebene Verhältnis BA × AC : BCq sey gleich EF : FL; so ist *ex æquo* AD × BC : BCq, das ist, AD : BC = HF : FL; und weil AD nicht größer ist, als die Linie MN, welche in dem, um das △ ABC beschriebenen Kreis-Abschnitt auf der Mitte von BC senkrecht steht, so muß AD : BC, das ist, HF : FL, nicht größer seyn als MN : BC. Dem sey so, und man finde aus dem 77sten S. ein △ OPQ, das einen seiner Winkel POQ gleich dem gegebenen BAC habe; und die Verhältnis des von diesem Winkel auf die Grundlinie PQ gesenkten Lothes sey gleich HF : FL; so wird das △ ABC dem △ OPQ ähnlich seyn. Denn, wie gezeigt worden, AD : BC = (HF : FL, das ist *per constr.* =) OR : PQ; nun ist der Winkel BAC = POQ; folglich[f] ist △ ABC dem △ POQ ähnlich.

[f] 1. Cor. 77. dat.

Anderer Beweis.

Das △ ABC habe den gegebenen Winkel BAC, und BA × AC : BCq sey gegeben; so ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

a 76. dat. Weil der Winkel BAC gegeben ist, so ist[a]
die Verhältnis von $(BA + AC)q - BCq$
zu $\triangle ABC$ gegeben. Es sey $(BA + AC)q$
$- BCq = D$, so ist $D : \triangle ABC$ gege-
ben, und weil der Winkel BAC gegeben ist, so
b Cor. 62. dat. ist[b] $\triangle ABC : BA \times AC$ gegeben; nun ist
c 10. dat. (*hyp.*) $BA \times AC : BCq$ gegeben, folglich[c]
d 7. dat. ist $D : BCq$ gegeben, und *componendo*[d] $D +$
$BCq : BCq$ ist gegeben; nun aber ist $D + BCq$
$= (BA + AC)q$, mithin ist $(BA +$
e 59. dat. $AC)q : BCq$ gegeben, folglich auch[e] $(BA$
$+ AC) : BC$; und weil der Winkel BAC ge-
f 48. dat. geben ist, so ist[f] das $\triangle ABC$ der Gattung nach
gegeben.

Die hieraus fließende Composition, die von den Compositionen des 76 und 48sten S. abhangt, ist verwickelter als die nächstvorhergehende, die von der des 77sten S. abhangt, welche leicht zu bewerkstelligen ist.

K. Satz LXXIX.

Wenn ein Dreyek einen gegebenen Winkel hat, und wenn die, von diesem Winkel auf die Grundlinie gezogene, und einen gegebenen Winkel mit ihr machende Linie, die Grundlinie in Segmente theilt, die eine ge-

gegebene Verhältnis zu einander haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 81.

Das △ ABC habe den gegebenen Winkel BAC, und die gerade Linie AD, die, auf die Grundlinie BC gezogen, den gegebenen Winkel ADB macht, theile BC in die Segmente BD, DC, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so wird △ ABC der Gattung nach gegeben seyn.

Man beschreibe[a] um das Dreyek den Kreis ABC, und aus dem Mittelpunct E ziehe man EA, EB, EC, ED. Weil nun der Winkel BAC gegeben ist, so ist der doppelte am Mittelpunct[b] gegeben; und weil BE = EC, so ist BE : EC gegeben; mithin[c] ist △ BEC der Gattung nach gegeben, und EB : BC ist gegeben; ferner weil (*hyp.*) BD : DC gegeben ist, so ist[d] CB : BD gegeben; mithin[e] ist EB : BD gegeben, und weil der Winkel EBC gegeben ist, so ist[c] das △ EBD der Gattung nach gegeben, mithin ist EB, das ist, EA : ED gegeben, nun ist der Winkel EDA gegeben, weil jeder der Winkel BDE, BDA gegeben ist; folglich[f] ist das △ AED der Gattung nach gegeben, und der Winkel AED ist gegeben; nun ist, weil jeder der Winkel BED, BEC gegeben

a 5. 4.
b 20. 3.
c 44. dat.
d 7. dat.
e 9. dat.
f 47. dat.

ben ist, auch DEC gegeben; mithin ist der Winkel AEC gegeben; nun ist wegen der Gleichheit, AE : EC gegeben; folglich [c] ist △ AEC der Gattung nach gegeben, und der Winkel ECA ist gegeben; weil nun auch ECB gegeben ist, so ist der Winkel ACB gegeben; nun ist (*hyp.*)
g 43. dat. BAC gegeben; folglich [g] ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

Ein dem △ ABC ähnliches Dreyek läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie, und theile sie in zween Theile, die die gegebene Verhältnis BD : DC haben; alsdann beschreibe man über ihr einen Kreis-Abschnitt, der des gegebenen Winkels BAC fähig sey, und nachdem man von dem Theilungs-Punct unter dem gegebenen Winkel ADB eine gerade Linie gezogen hat, so ziehe man von dem Punct, wo sie den Umfang begegnet, Linien an die Endpuncte der angenommenen Linie; so wird man ein Dreyek haben, das dem △ ABC ähnlich ist; wie sich leicht zeigen läßt.

Der Beweis läßt sich auch auf eben die Art machen, wie der in dem 77sten S. und der im 77sten S. wie der in diesem.

Satz

Satz LXXX. L.

Wenn zwo Seiten eines Dreyeks eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und wenn das, von dem eingeschlossenen Winkel auf die Grundlinie gefällte Loth eine gegebene Verhältnis zu der Grundlinie hat; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 82.

Die Seiten BA, AC in dem △ ABC haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und das Loth AD habe eine gegebene Verhältnis zu der Grundlinie BC; so wird das △ ABC der Gattung nach gegeben seyn.

Es sey erstlich AB = AC, so theilt[a] das Loth AD die Grundlinie BC in zween gleiche Theile; folglich weil (*hyp.*) AD : BC gegeben ist, so ist auch AD : DB gegeben, und weil ADB gegeben ist, so ist[b] das △ ABD, folglich auch △ ABC der Gattung nach gegeben.[c]

a 26. 1.

b 44. dat.

c. 43. dat.

Wenn aber die Seiten ungleich sind, und BA > AC; so mache man den Winkel CAE = ABC; weil nun der Winkel AEB den beyden △ △ AEB, CEA gemein ist, so sind sie einander ähnlich; mithin ist AB : BE

= CA : AE, und *permutando* BA : AC = BE : EA = EA : EC; nun ist BA : AC gegeben, folglich auch BE : EA, und EA : EC, wie auch [d] BE : EC; folglich [e] ist EB : BC gegeben; nun ist (*hyp.*) AD : BC gegeben, mithin [d] ist AD : BE gegeben; ferner ist, wie gezeigt worden, BE : EA gegeben, folglich ist AD : AE gegeben, und weil ADE ein rechter Winkel ist, so ist △ ADE der Gattung nach gegeben [f], und der Winkel AEB ist gegeben; gleicherweise ist BE : EA gegeben, folglich ist [b] △ ABE der Gattung nach gegeben, und der Winkel EAB, wie auch ABE, das ist, CAE ist gegeben; mithin ist der Winkel BAC gegeben; und weil auch ABC gegeben ist, so ist [g] △ ABC der Gattung nach gegeben.

d 9. dat.
e 6. dat.
f 46. dat.
g 43. dat.

Wie sich ein Dreyek finden läßt, das die in dem Satz gegebenen Dinge hat, ist evident im ersten Fall. Um es in dem zweyten Fall desto leichter zu finden, muß man bemerken, daß, wenn man die Linie EF gleich EA auf EB nach B zu, legt, der Punct F die Grundlinie in die Segmente BF, FC theilt, die sich zu einander verhalten wie BA : AC. Denn weil, wie gezeigt worden, BE : (EA) EF = EF : EC so ist* BF : FC = BE : (EF) EA, das ist, BA : AC; nun kann AE nicht kleiner seyn als die Höhe des △ ABC, aber sie kann derselben gleich

* 19. 5.

gleich seyn: ist dieses; so läßt sich in diesem Fall das Dreyek, wie auch die Verhältnis der Seiten folgendermaaßen finden, wenn nämlich (*hyp.*) die Verhältnis des Lothes zur Grundlinie gegeben ist. Man nehme die der Lage und Größe nach gegebene GH zur Grundlinie des zu findenden Dreyeks, und die gegebene Verhältnis des Lothes zur Grundlinie sey $K : GH$, das ist, K sey dem Lothe gleich; nun setze man, GLH sey das zu findende Dreyek; demnach, wenn man den Winkel $HLM = LGH$ gemacht hat, so wird erfodert, daß LM senkrecht auf GM, und gleich K sey; und weil $GM : ML = ML : MH$, so wie vorhin $BE : EA = EA : EC$ war, so ist $GM \times MH = MLq$. Nun theile man GH in N in zween gleiche Theile, so ist[h] $GM \times HM + NHq = NMq$, oder h 6. 2.
$MLq + NHq = NMq$; da nun ML oder K, und NH gegeben sind, so ist NM, deren Quadrat den beyden Quadraten von ML und von NH gleich ist, gegeben, und der Punct M ist gegeben. Man richte also $ML = K$ senkrecht über GM auf; demnach weil ML der Lage und Größe nach gegeben ist, so ist der Punct L gegeben. Man ziehe LG, LH, so wird $\triangle$ LGH das gesuchte Dreyek seyn.

Denn (*constr.*) NMq = NHq + MLq; nun ist [h] GM × MH + NHq = NMq; folglich GM × MH = MLq; mithin GM :
i 6. 6. ML = ML : MH, mithin ist [i] △ LGM mit △ HLM gleichwinklicht, und der Winkel HLM = LGM. Demnach ist die von dem Scheitelpunct des Dreyeks gezogene ML gleich der gegebenen K, sie steht senkrecht auf der Grundlinie, und macht den Winkel HLM = LGH; wie gefodert war. Endlich verhält sich GL zu LH, wie GM zu ML, das ist, wie die, aus GN, der Hälfte der Grundlinie, und NM, deren Quadrat den Quadraten von GN und von K gleich ist, zusammengesezte Linie sich zu der Linie K verhält.

Ob nun GM : ML grösser oder kleiner sey als die Verhältnis der Seiten irgend eines andern Dreyeks, das auf der Grundlinie GH steht, und dessen Höhe der geraden Linie K gleich ist, das ist, dessen Scheitelpunct in der, durch L mit GH parallel gezogenen Linie liegt; das läßt sich also finden. Eines solcher Dreyecke sey △ OGH, und man ziehe OP so daß der Winkel HOP = OGH; mithin ist wie vorhin, GP : PO = PO : PH, und PO kann nicht gleich seyn LM, weil sonst GP × PH gleich seyn würde GM × MH, welches unmöglich ist; denn der Punct P kann nicht auf M fallen, weil alsdann O auf L fallen würde

würde: auch kann PO nicht kleiner seyn als LM; folglich ist sie größer; folglich ist (POq) $GP \times PH >$ (LMq) $GM \times MH$, mithin ist $GP > GM$; nun (*) ist $GM : MH > GP : PH$, folglich[k] $GMq : MLq < GPq : POq$, mithin ist $GM : ML > GP : PO$; nun aber ist $GM : ML = GL : LH$, und $GP : PO = GO : OH$; mithin ist $GL : LH > GO : OH$; folglich ist $GL : LH$ die gröste unter allen, folglich muß die gegebene Verhältnis der größern Seite zu der kleinern nicht größer seyn als diese Verhältnis. k 20. 6.

Wenn also die Verhältnis der Seiten nicht einerley ist mit der größten Verhältnis $GM : ML$, so muß sie nothwendigerweise kleiner seyn als dieselbe. Es sey irgend eine kleinere Verhältnis gegeben, und man nehme wie vorhin an, daß GH die Grundlinie, und K der Höhe des Dreyeks gleich sey; so läßt sich das Dreyek folgendermaassen finden. Man theile GH in dem Punct Q, so

(*) Dieß beruht auf folgendem Satz: Wenn $A > B$, und C irgend eine dritte Größe, so ist $A : B > (A + C) : (B + C)$. Denn es sey $A : B = C : D$, so ist, weil $A > B$, auch $C > D$; und $A : B = A + C : B + D$; nun ist $B + D < B + C$, folglich[l] $A + C : B + D > A + C : B + C$, folglich $A : B > A + C : B + C$. l 8. 5.

so daß $GQ : QH$ gleich sey der gegebenen Ver-
hältnis der Seiten; ferner setze man $GQ : QH$
m 19. 5. $= GP : PQ$ mithin[m] $GP : PQ = PQ :$
PH; mithin $GPq : PQq = GP : PH$; und
weil $GM : ML = ML : MH$, so ist $GMq :$
$MLq = GM : MH$; nun ist $GQ : QH$,
das ist, $GP : PQ < GM : ML$; mithin auch
$GPq : PQq < GMq : MLq$; folglich $GP :$
$PH < GM : MH$, und *dividendo* $GH : HP$
n 10. 5. $< GH : HM$; folglich[n] ist $HP > HM$, und
$GP \times PH$, das ist, $PQq > GM \times MH$, das
ist, MLq, mithin ist $PQ > ML$. Nun ziehe
man LR parallel mit GP, und von P richte man
PR senkrecht über GP auf; weil nun $PQ > ML$
oder PR, so muß der aus dem Mittelpunct P
mit dem Halbmesser PQ beschriebene Kreis, die
Linie LR in zween Puncten schneiden; sie seyen
O, S, und man ziehe OG, OH, SG, SH;
so hat jedes von den Dreyecken OGH, SGH
die in dem Satz gegebenen Dinge. Denn man
ziehe OP; weil nun $GP : (PQ)\,PO = PO :$
PH, so ist $\triangle OGP$ mit $\triangle HOP$ gleichwink-
licht; mithin ist $OG : GP = HO : OP$, und
permutando $GO : OH = GP : PO = GP :$
$PQ = GQ : QH$. Folglich ist in dem
$\triangle OGH$ die Verhältnis der Seiten $GO : OH$
einerley mit der gegebenen Verhältnis $GQ : QH$;
und das Loth hat zur Grundlinie die gegebene
Verhältnis $K : GH$, weil das Loth gleich LM
oder

oder K ist. Eben dieses läßt sich auf eben die Art von dem △ SGH beweisen.

Diese Verzeichnung, wodurch △ OGH ist gefunden worden, ist kürzer, als die, welche sich aus dem Beweise des Datum herleiten ließe; weil nämlich die Grundlinie GH der Lage und Größe nach gegeben ist, welches in dem Beweise nicht angenommen war. Eben das ist in dem nächstfolgenden Satze zu bemerken.

Satz LXXXI.

Wenn zwo Seiten eines Dreyeks ungleich sind und eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und wenn das von dem eingeschlossenen Winkel auf die Grundlinie gefällte Loth dieselbe in Segmente theilt, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 83.

ABC sey ein Dreyek, dessen Seiten um den Winkel BAC ungleich seyen, und eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und das auf die Grundlinie BC gefällte Loth AD theile dieselbe in die Segmente BD, DC, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so wird △ ABC der Gattung nach gegeben seyn.

Es sey AB > AC, und man mache den Winkel CAE = ABC, so werden, wegen des gemeinschaftlichen Winkels AEB, die △△
a 4. 6. ABE, CAE gleichwinklicht seyn; folglich [a] AB : BE = CA : AE, und *permutando* AB : AC = BE : EA = EA : EC; nun ist BA : AC gegeben, mithin ist BE : EA,
b 9. dat. wie auch EA : EC gegeben, folglich [b] ist BE :
c cor. 6. dat. EC, wie auch [c] EC : CB gegeben; ferner weil
d 7. dat. BD : DC gegeben ist (*hyp.*) so ist [d] BC : CD gegeben; mithin [b] ist EC : CD, folglich [d] auch DE : EC gegeben; nun ist angezeigter maaßen EC : EA gegeben, folglich [b] ist DE : EA gegeben; folglich weil ADE ein rechter Winkel ist,
e 46. dat. so ist [e] △ ADE der Gattung nach gegeben, und der Winkel AED ist gegeben; mithin, weil CE :
f 44. dat. EA gegeben ist, so ist [f] △ AEC der Gattung nach gegeben, folglich ist ACE, wie auch der Nebenwinkel ACB gegeben. Gleicherweise, weil BE : EA gegeben ist, so ist △ BEA der Gattung nach gegeben, mithin ist der Winkel ABE gegeben; und weil der Winkel ACB gegeben ist,
g 43. dat. so ist [g] △ ABC der Gattung nach gegeben.

Allein die Verhältnis der größern Seite BA zu der andern AC, muß kleiner seyn als die Verhältnis des größern Segments BD zu DC. Denn BAq : ACq = BDq + DAq : DCq +
h 81. dat. not. (*) DAq; nun ist [h] BDq + DAq : DCq + DAq

$\lessdot$ BDq : DCq, weil BDq $\gtrdot$ DCq; mithin ist BAq : ACq $\lessdot$ BDq : DCq, folglich BA : AC $\lessdot$ BD : DC.

Da diesem so ist, so läßt sich ein Dreyek, das die in dem Satz gegebenen Dinge haben wird, und dem das $\triangle$ BBC ähnlich ist, folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie GH, und theile sie in K so, daß GK : KH gleich sey der gegebenen BA : AC; ferner theile man GH in L so, daß GL : LH gleich sey der gegebenen BD : DC, und richte LM senkrecht über GH auf. Weil nun, wie gezeigt worden, die Verhältnis der Seiten eines Dreyeks kleiner ist, als die Verhältnis der Segmente der Grundlinie, so ist GK : KH $\lessdot$ GL : LH, mithin muß der Punct L zwischen K und H fallen; nun mache man GK : KH $=$ GN : NK, so ist [i] GN : NK $=$ NK : NH. Nun beschreibe man aus dem Mittelpunct N mit dem Halbmesser NK einen Kreis, dessen Umfang dem Loth LM in O begegne, und ziehe OG, OH; so ist $\triangle$ OGH das gesuchte Dreyek. Denn weil GN : (NK) NO $=$ NO : NH, so ist $\triangle$ OGN mit $\triangle$ HON gleichwinklicht, mithin OG : GN $=$ HO : ON, und *permutando* GO : OH $=$ GN : (NO) NK $=$ GK : KH, das ist, gleich der gegebenen Verhältnis der Seiten, und GL, LH haben

i 19. 5.

(*constr.*) zu einander die gegebene Verhältniß der Segmente der Grundlinie.

60. Satz LXXXII.

Wenn ein der Gattung und Größe nach gegebenes Parallelogramm um einen der Größe nach gegebenen Gnomon (*) vermehrt oder vermindert wird; so sind die Seiten des Gnomons der Größe nach gegeben. Fig. 84.

Es werde erstlich das der Gattung und Größe nach gegebene Prllgr AB um den gegebenen Gnomon ECBDFG vermehrt; so ist jede der geraden Linien CE, DF gegeben.

Weil AB der Gattung und Größe nach, und der Gnomon ECBDFG der Größe nach gegeben ist, so ist der ganze Raum AG der Größe nach gegeben; nun ist AG auch der Gattung nach ge-
a {2 def. 2 & 14.6. geben, weil es [a] dem Prllgr AB ähnlich ist,
b 60. dat. mithin sind [b] die Seiten von AG gegeben; folglich

(*) Man muß sich aus *2. def. 2. Elem.* erinnern, daß, wenn man durch einen Punct der Diagonale eines Parallelogrammes Linien zieht, die mit den Seiten parallel sind, der Gnomon drey Parallelogramme begreift, durch deren zwey die Diagonale nicht geht. Uebers.

lich ist jede der geraden Linien AE, AF gegeben; und da jede der Linien CA, AD gegeben ist[b], so ist[c] jeder der Reste EC, DF gegeben. [c] 4. dat.

Zweytens werde das, der Gattung und Größe nach, gegebene Prllgr AG um den gegebenen Gnomon ECBDFG vermindert; so wird jede der geraden Linien CE, DF gegeben seyn.

Weil das Prllgr AG, so wie sein Gnomon ECBDFG gegeben ist, so ist der Rest AB der Größe nach gegeben; nun ist er auch der Gattung nach gegeben, weil [a] er dem Prllgr AG ähnlich[a] ist; mithin [b] sind seine Seiten CA, AD gegeben; nun ist jede der Linien EA, AF gegeben; folglich ist jede der Linien EC, DF gegeben. [a] 2 def. 2.&24.5. [b] 60. dat.

Der Gnomon und seine Seiten CE, DF lassen sich im ersten Fall folgendermaaßen finden. Es sey H der gegebene Raum, dem der Gnomon soll gleich gemacht werden, und man finde [d] ein Prllgr, das dem AB ähnlich, und den Figuren AB + H gleich sey, und lege seine Seiten AE, AF von dem Punct A auf die geraden Linien AC, AD, und vollende das Prllgr AG, das um eben die Diagonale liegt [e] wie AB; weil nun AG = AB + H, so wird, wenn man von beyden Seiten AB wegnimmt, der Gnomon ECBDFG gleich H seyn; folglich ist ein der [d] 25. 6. [e] 26. 6.

Figur H gleicher Gnomon, samt seinen Seiten CE und DF gefunden worden. Auf gleiche Weise lassen sich diese Dinge in dem zweyten Falle finden, wo die gegebene Figur H kleiner seyn muß als die Figur FE, wovon sie soll weggenommen werden.

58.
Satz LXXXIII.

Wenn ein Parallelogramm, das einem gegebenen Raume gleich ist, auf einem Segment einer gegebenen geraden Linie steht, und wenn das Parallelogramm, das auf dem andern Segmente steht, und die Verlängerung des ersten ausmacht, der Gattung nach gegeben ist; so sind die Seiten dieses leztern Parallelogrammes gegeben. Fig. 85.

Das Prllgr AC, das einem gegebenen Raume gleich ist, stehe auf dem Segment AD der gegebenen Linie AB, und das Prllgr BDCL, das auf dem andern Segmente DB steht, und die Verlängerung des ersten ist, sey der Gattung nach gegeben; so wird jede der Linien CD, DB gegeben seyn.

Man theile AB in zween gleiche Theile in E, so ist EB der Größe nach gegeben; über EB
a 18. 6. beschreibe man a das Prllgr EF, das dem Prllgr

DL

DL ähnlich sey und ähnlich mit ihm liege; so ist EF der Gattung nach gegeben, und es liegt um eben die Diagonale [b] wie DL. Es sey BCG diese Diagonale, und man verzeichne die Figur; weil nun die der Gattung nach gegebene Figur EF über der gegebenen Linie EB beschrieben ist, so ist [c] EF der Größe nach gegeben, und der Gnomon ELH ist gleich [d] der gegebenen Figur AC; weil nun [e] EF um den gegebenen Gnomon ELH vermindert ist, so sind die Seiten des Gnomons EK, FH gegeben; nun ist EK = DC, und FH = DB; folglich sind CD, DB, jede für sich, gegeben.

b 26. 6.
c 56. dat.
d 36 & 43. 1.
e 82. dat.

Dieser Beweis ist die Analysis der Aufgabe des 28sten S. 6. B. und die Verzeichnung und der Beweis dieses Satzes ist die Composition der Analysis; und weil der gegebene Raum AC, oder der ihm gleiche Gnomon ELH, soll weggenommen werden von der Figur EF, die der BC ähnlich und über der Hälfte von AB beschrieben ist, so muß AC nicht größer seyn als EF, wie in dem 27sten S. 6. B. gezeigt worden.

Satz XXXIV. 59.

Wenn ein Parallelogramm, das einem gegebenen Raume gleich ist, auf dem gegebenen Segment einer geraden Linie steht, und wenn das Parallelogramm, das auf dem andern Segmente steht und die Verlängerung des ersten ausmacht, der Gattung nach gegeben ist; so sind die Seiten des leztern Parallelogrammes gegeben. Fig. 86.

Das Prllgr AC, das einem gegebenen Raume gleich ist, stehe auf dem gegebenen Segment AB der Linie AD, und das Prllgr BDCL, das auf dem andern Segmente steht, und die Verlängerung des ersten ist, sey der Gattung nach gegeben; so wird jede der Linien CD, DB gegeben seyn.

Man theile AB in zween gleiche Theile in E, so ist EB der Größe nach gegeben; über EB
a 18. 6. beschreibe man [a] ein Prllgr EF, das dem Prllgr LD ähnlich sey und ähnlich mit ihm liege; mithin ist EF der Gattung nach gegeben, und es
b 26. 6. liegt [b] um eben die Diagonale wie LD. Es sey CBG diese Diagonale, und man verzeichne die Figur; weil nun die der Gattung nach gegebene Figur EF über der gegebenen Linie EB beschrie-
c 56. dat. ben ist, so ist [c] EF der Größe nach gegeben, und
d 36. & 43. 1. der Gnomon ELH ist gleich [d] der gegebenen Fi-
e 82. dat. gur AC; weil nun [e] EF um den gegebenen Gnomon ELH vermehrt ist, so sind die Seiten des Gnomons EK, FH gegeben; nun ist EK =

CD,

CD, und FH = BD; folglich sind CD, DB, jede für sich, gegeben.

Dieser Beweis ist die Analysis der Aufgabe in dem 29sten S. 6. B. deren Verzeichnung und Beweis die Composition der Analysis ist.

Zusatz. Wenn ein der Gattung nach gegebenes Parallelogramm auf einer geraden Linie steht, wovon ein Segment gegeben ist, und wenn das Parallelogramm, das auf dem andern Segmente steht und einen Theil des ersten ausmacht, einem gegebenen Raume gleich ist: so sind die Seiten des erstern gegeben.

Das der Gattung nach gegebene Prllgr ADCE stehe auf der geraden Linie AD, wovon das Segment AB gegeben ist, und das Prllgr BDCG, das auf dem andern Segmente steht, sey einem gegebenen Raume gleich; so werden die Seiten AD, DC des erstern gegeben seyn.

Man ziehe die Diagonale DE des Prllgr AC, und verzeichne die Figur. Weil nun [a] Prllgr AK gleich dem gegebenen BC ist, so ist AK gegeben; und weil BK dem AC ähnlich ist [b], so ist BK der Gattung nach gegeben. Weil demnach das, der Größe nach gegebene Prllgr AK auf der Linie AD steht, wovon das Segment AB gegeben ist, und das Prllgr BK,

a 43. I.

b 24. 6.

das auf dem andern Segmente steht, der Gattung nach gegeben ist; so sind, zu Folge dieses Satzes, BD, DK, die Seiten des leztern Parallelogramms, gegeben; mithin, weil die Linie AB gegeben ist, so ist das Ganze AD, wie auch DC, die zu AD eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

Aufgabe.

An AB, das gegebene Segment einer Linie ein Parallelogramm anzulegen, das einem gegebenen ähnlich, und dessen Theil, der auf dem andern Segmente steht, einem gegebenen Raume gleich sey.

c 29. 6. An die gegebene Linie AB lege man c das Prllgr AK, das einem gegebenen Raume gleich, und dessen Theil BK einem gegebenen Prllgr ähnlich sey. Man ziehe DF, die Diagonale von BK, und durch den Punct A ziehe man AE parallel mit BF, bis sie der verlängerten DF in E begegne, und vollende das Prllgr AC.

Das Prllgr BC ist gleich a dem AK, das ist, dem gegebenen Raum; und Prllgr AC ist b dem BK ähnlich; und dieß ist es was gesucht worden ist.

Satz

Satz LXXXV. 84.

Wenn zwo gerade Linien ein der Größe nach gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen; so wird, wenn der Unterschied der geraden Linien gegeben ist, jede derselben gegeben seyn. Fig. 87.

AB, BC schließen das der Größe nach gegebene Prllgr AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und BC — AB sey gegeben; so wird jede der Linien AB, BC gegeben seyn.

Es sey DC = BC — AB, mithin BD = BA. Man vollende das Prllgr AD; weil nun AB = BD, so ist AB : BD gegeben; und weil der Winkel ABD gegeben ist, so ist das Prllgr AD der Gattung nach gegeben; mithin weil das gegebene Prllgr AC an dem gegebenen Segment DC liegt, und Prllgr AD, das ein Theil davon ist, der Gattung nach gegeben ist, so sind [a] die Seiten dieses leztern gegeben; mithin ist BD gegeben; nun ist DC gegeben, mithin ist das Ganze BC gegeben; und weil auch AB gegeben ist, so ist jede der Linien AB, BC gegeben.

a 84. dat.

85. Satz LXXXVI.

Wenn zwo gerade Linien ein der Größe nach gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen; so wird, wenn die Summe der geraden Linien gegeben ist, jede derselben gegeben seyn. Fig. 88.

Die zwo geraden Linien AB, BC schließen das der Größe nach gegebene Prllgr AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und AB+BC sey gegeben; so wird jede der Linien AB, BC gegeben seyn.

Man verlängere CB und mache BD = AB, und vollende das Prllgr ABDE. Weil nun DB = BA, und der Winkel ABD, wegen des gegebenen Nebenwinkels ABC, gegeben ist, so ist Prllgr AD der Gattung nach gegeben; und weil AB + BC gegeben ist, und AB = BD, so ist DC gegeben. Weil demnach das gegebene Prllgr AC auf dem Segment BC der gegebenen Linie DC steht, und das Prllgr AD, das auf dem andern Segmente DB steht, der
a 83. dat. Gattung nach gegeben ist, so sind [a] die Seiten AB, BD des leztern gegeben; nun ist DC gegeben, mithin auch der Rest BC; folglich ist jede der geraden Linien AB, BC gegeben.

Satz

Satz LXXXVII. 87.

Wenn zwo gerade Linien ein der Größe nach gegebenes Parallelogramm, unter einem gegebenem Winkel, einschließen; so wird, wenn der Ueberschuß des Quadrates der grössern über das Quadrat der kleinern gegeben ist, jede der geraden Linien gegeben seyn. Fig. 89.

Die zwo geraden Linien AB, BC schließen ein gegebenes Prllgr AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein; so wird, wenn BCq — BAq gegeben ist, jede der Linien AB, BC, gegeben seyn.

Es sey der gegebene Unterschied BCq — BAq = CB×BD, so ist BCq — CB×BD, das ist,[a] BC × CD = BAq; weil nun der Winkel ABC des Prllgr AC gegeben ist, so ist[b] AB × BC : AC gegeben; nun ist (*hyp.*) AC gegeben, mithin auch AB × BC; ferner ist (*hyp.*) CB × BD gegeben; mithin ist die Verhältnis CB × BD : AB × BC, das ist,[c] DB : BA gegeben; folglich[d] ist DBq : BAq gegeben; nun ist BAq = BC × CD, mithin ist BC × CD : BDq wie auch 4 BC × CD : BDq gegeben, mithin ist *componendo*[e] 4 BC × CD + BDq : BDq gegeben; nun aber ist[f] 4 BC × CD

a 2. 2.
b 62. dat.
c 1. 6.
d 54. dat.
e 7. dat.
f 8. 2.

CD

$CD + BDq = (BC + CD)q$; folglich ist
g 58. dat. $(BC + CD)q : BDq$, wie auch [g] $BC + CD$: BD gegeben; mithin *componendo* $(BC + CD + BD)\ 2BC : BD$ gegeben; folglich ist BC : BD gegeben, wie auch [c] $BCq : CB \times BD$; nun ist $CB \times BD = BCq - BAq$, mithin gegeben, folglich ist BCq und BC gegeben; nun ist $BC : BD$, wie auch $BD : BA$ gegeben,
h 9. dat. folglich ist [h] $BC : BA$ gegeben; nun ist BC gegeben, folglich ist BA gegeben.

Dieser Beweis ist die Analysis der folgenden Aufgabe.

Wenn ein Parallelogramm AC, das einen gegebenen Winkel ABC hat, der Größe nach gegeben ist, und wenn der Ueberschuß des Quadrates einer seiner Seiten BC, über das Quadrat der andern BA gegeben ist; die Seiten zu finden. Die Composition ist folgende.

Es sey EFG der gegebene Winkel, dem der Winkel ABC gleich seyn soll; und von irgend einem Punct E in FE fälle man EG senkrecht auf FG; nun sey $EG \times GH$ der gegebene Raum, dem das Prllgr AC soll gleich gemacht werden; und $HG \times GL$ der gegebene Unterschied $BCq - BAq$.

Auf

Auf dem Loth GE nehme man $GK = FE$, und $GM = 2GK$; dann ziehe man ML, und in der verlängerten GL nehme man $LN = LM$; man theile GN in O in zween gleiche Theile, und zwischen GH und GO finde man eine mittlere Proportional-Linie BC; dann mache man $OG : GL = CB : BD$, und den Winkel $CBA = GFE$, und $LG : GK = DB : BA$, und vollende das Prllgr AC; so ist $AC = EG \times GH$, und $CBq - BAq = HG \times GL$.

Denn weil $CB : BD = OG : GL$, so
ist[a] $CBq : CB \times BD = HG \times GO : HG \times$ a 1. 6.
GL; nun ist, weil $GO : BC = BC : GH$,
$CBq = HG \times GO$, mithin ist[b] $CB \times BD$ b 14. 5.
$= HG \times GL$. Und weil $CB : BD = OG :$
GL, so ist $2CB : BD = (2OG)\ GN : GL$,
und *dividendo* $BC + CD : BD = (NL)$
$LM : LG$; folglich[c] $(BC + CD)q : BDq$ c 22. 6.
$= MLq : LGq$; nun ist $(BC + CD)q =$
$4BC \times CD + BDq$[d], mithin ist $4BC \times CD$ d 8. 2.
$+ BDq : BDq = MLq : LGq$, und *dividendo* $4BC \times CD : BDq = MGq : GLq$;
folglich ist $BC \times CD : BDq = (\frac{1}{4}MGq)$
$KGq : GLq$, das ist, $= ABq : BDq$, weil
$LG : GK = DB : BA$ gemacht worden ist;
folglich ist[b] $BC \times CD = ABq$; auf beyden
Seiten addire man $CB \times BD$, so wird CBq
$= ABq + CB \times BD$; mithin ist $CBq -$

ABq

ABq = CB × BD, das ist, dem gegebenen HG × GL. Nun fälle man von dem Punct A das Loth AP auf BC, so ist, weil der Winkel ABP = EFG, das △ ABP mit dem △ EFG gleichwinklicht; nun ist DB : BA = LG : GK gemacht worden, mithin ist CB × BD : CB × BA = HG × GL : HG × GK, nun ist CB × BA : AP × BC = (BA : AP = (FE) GK : EG =) HG × GK : HG × GE; folglich *ex æquo*, CB × BD : AP × BC = HG × GL : HG × GE; nun ist CB × BD = HG × GL, folglich ist AP × BC, das ist, Prllgr AC gleich dem gegebenen Rechtek EG × GH.

N. **Satz LXXXVIII.**

Wenn zwo gerade Linien ein der Größe nach gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen; so wird, wenn die Summe der Quadrate seiner Seiten gegeben ist, jede dieser Seiten gegeben seyn. Fig. 90.

Die zwo geraden Linien AB, BC schließen das der Größe nach gegebene Prllgr ABCD unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und ABq + BCq sey gegeben; so wird jede der Linien AB, BC gegeben seyn.

Es sey erstlich ABC ein rechter Winkel. Nun ist zweymal das von zwo gleichen Linien eingeschlossene Rechtek gleich der Summe ihrer Quadrate; sind aber die zwo Linien ungleich, so ist zweymal das von ihnen eingeschlossene Rechtek kleiner als die Summe ihrer Quadrate, wie aus dem 7ten S. 2. B. Elem. erhellt; demnach muß zweymal der gegebene Raum, dem das Rechtek, dessen Seiten zu finden sind, gleich ist, nicht grösser seyn als die gegebene Summe der Quadrate der Seiten: und wenn zweymal dieser Raum gleich ist der gegebenen Summe der Quadrate, so müssen die Seiten des Rechteks nothwendigerweise einander gleich seyn; in diesem Fall also beschreibe man ein Quadrat ABCD gleich dem gegebenen Rechtek, so werden AB, BC die gesuchten Seiten seyn; denn das Rechtek AC ist dem gegebenen Raume gleich, und $ABq + BCq = 2AB \times BC$, das ist, (*hyp.*) gleich dem gegebenen Raum, dem die Summe der Quadrate gleich seyn sollte.

Ist aber zweymal das gegebene Rechtek nicht gleich der gegebenen Summe der Quadrate der Seiten, so muß es, wie gezeigt worden, kleiner seyn. Es sey ABCD das Rechtek; man vereinige AC, und ziehe BE senkrecht darauf, und vollende das Rechtek AEBF; dann beschreibe man den Kreis ABC um das △ ABC, so ist [a] a Cor. 5. 4.

AC

AC sein Durchmesser; und weil △ ABC dem
b 8. 6. △ AEB ähnlich ist, [b] so ist AC : CB = AB :
BE, mithin ist AC × BE = AB × BC; nun
ist AB × BC gegeben, folglich auch AC × BE;
c 47. I. und weil ABq + BCq gegeben ist, so ist [c] ACq
gegeben, mithin ist AC selbst der Größe nach ge-
geben. Nun sey AC auch der Lage nach gege-
d 32. dat. ben, so ist [d] AF der Lage nach gegeben; ferner
weil, wie gezeigt worden, AC × BE, gegeben
e 61. dat. ist, und AC gegeben ist, so ist [e] BE oder AF
der Größe nach gegeben; nun ist AF auch der
Lage nach gegeben, mithin weil der Punct A ge-
f 30. dat. geben ist, so ist [f] der Punct F gegeben, und die
g 31 dat. Linie FB ist [g] der Lage nach gegeben; nun ist der
h 28. dat. Umfang ABC der Lage nach gegeben, folglich [h]
ist der Puuct B gegeben; nun sind auch die Pun-
i 29. dat. cte A, C gegeben; folglich [i] sind die geraden Li-
nien AB, BC der Lage und Größe nach gegeben.

Die Seiten AB, BC des Rechteks lassen
sich folgendermaaßen finden. Es sey GH × GK
der gegebene Raum, dem das Rechtek AB × BC
gleich sey; und GH × GL sey das gegebene
Rechtek, dem die Summe ABq + BCq gleich
k 14. 2. sey. Nun finde man [k] ein Quadrat, das dem
Rechtek, GH × GL gleich sey, und AC, die
Seite dieses Quadrats, sey der Lage nach gegeben;
über AC, als dem Durchmesser, beschreibe man
den halben Kreis ABC, und mache AC : GH
=

$= GK : AF$, und von dem Punct A setze man AF senkrecht auf AC; demnach ist[l] $CA \times AF = GH \times GK$, und (*hyp.*) $2\, GH \times GK \lhd GH \times GL$, das ist, ACq, folglich $2\, CA \times AF \lhd ACq$, und $CA \times AF \cancel{\rhd} < \frac{1}{2} ACq$, das ist, $AC \times \frac{1}{2} AC$; mithin ist AF kleiner als der Halbmesser des Kreises, folglich muß die, durch den Punct F mit AC parallel gezogene Linie dem Umfang in zween Puncten begegnen; einer davon sey B, und man ziehe AB, BC, und vollende das Rechtek ABCD; so ist ABCD das gesuchte Rechtek. Denn man ziehe BE senkrecht auf AC, so ist[m] $BE = AF$, und weil der Winkel ABC in dem halben Kreis ein rechter ist, so ist[b] $AB \times BC = AC \times BE$, das ist, $CA \times AF$, welches dem gegebenen $GH \times GK$ gleich ist; und[c] $ABq + BCq = ACq$, das ist, gleich dem gegebenen Rechtek $GH \times GL$.

l 16. 6.

m 34. 1.

b 8. 6.

Wenn aber der gegebene Winkel ABC des Prllgr AC kein rechter Winkel ist, so ist in diesem Fall[n], weil ABC ein gegebener Winkel ist, $AB \times BC : AC$ gegeben, nun ist Prllgr AC gegeben, mithin ist $AB \times BC$ gegeben; und weil $ABq + BCq$ gegeben ist, so ist, nach dem vorhergehenden Fall, jede der Seiten AB, BC gegeben.

n 62. dat.

Die Seiten AB, BC, und das Prllgr AC lassen sich folgendermaaßen finden. Es sey EFG der gegebene Winkel des Prllgr, und von irgend einem Punct E in FE fälle man EG senkrecht auf FG. Nun sey EG × FH der gegebene Raum, dem das Prllgr gleich gemacht werden soll, und EF × FK sey das gegebene Rechtek, dem die Summe der Quadrate der Seiten gleich seyn soll; und man finde nach dem vorhergehenden Fall, die Seiten eines Rechteks, das gleich sey dem gegebenen EF × FH, und worinn die Summe der Quadrate seiner Seiten gleich sey dem gegebenen EF × FK; demnach, wie in diesem Fall gezeigt worden, muß 2 EF × FH nicht größer seyn als EF × FK. Dem sey so, und AB, BC seyen die Seiten des Rechteks, unter dem Winkel ABC, gleich dem gegebenen EFG, zusammengefügt; und man vollende das Prllgr ABCD, welches das gesuchte Prllgr seyn wird.

Denn man fälle AL senkrecht auf BC; weil nun der Winkel ABL = EFG, so ist △ABL mit △ EFG gleichwinklicht; und Prllgr AC, das ist, AL × BC : AB × BC = (AL : AB = EG : EF =) EG × FH : EF × FH; nun ist (*constr.*) AB × BC = EF × FH, folglich ist AL × BC, das ist, Prllgr AC

AC = dem gegebenen $EG \times FH$; und (*constr.*) $ABq + BCq$ = dem gegebenen $EF \times FK$.

Satz LXXXIX. 80.

Wenn zwo gerade Linien ein gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen, und wenn der Ueberschuz des Quadrates der einen davon über einen gegebenen Raum, eine gegebene Verhältnis hat zu dem Quadrat der andern; so wird jede der geraden Linien gegeben seyn. Fig. 91.

Die zwo geraden Linien AB, BC schliessen das gegebene Prllgr AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und der Ueberschuß des Quadrates von BC über einen gegebenen Raum habe eine gegebene Verhältnis zu dem Quadrat von AB; so wird jede der Linien AB, BC gegeben seyn.

Weil der Ueberschuß des Quadrates von BC über einen gegebenen Raum eine gegebene Verhältnis hat zu dem Quadrat von BA, so wird, wenn $CB \times BD$ der gegebene Raum ist, $BCq - CB \times BD$, das ist[a] $BC \times CD$ eine a 2. 2.

gegebene Verhältnis zu BAq haben. Nun fälle man AE senkrecht auf BC, und setze BFq = BC × CD; weil nun der Winkel ABC, wie
b 43. dat. auch BEA gegeben ist, so ist[b] △ ABE der Gattung nach gegeben, und AE : AB ist gegeben; und weil (BC × CD, das ist,) BFq :
c 58. dat. BAq gegeben ist, so ist[c] BF : BA gegeben;
d 9. dat. nun ist AE : AB gegeben, mithin[d] ist AE :
e 35. I. BF gegeben, wie auch (AE × BC, das ist[e],) AC : FB × BC; nun ist AC gegeben, folglich ist FB × BC gegeben. Nun ist BCq - BEq, das ist, BCq — BC × CD gegeben weil es[a] gleich dem gegebenen CB × BD ist; folglich weil FB × BC, wie auch BCq — BFq
f 87. dat. gegeben ist, so ist[f] jede der Linien FB, BC gegeben; und weil FB : BA gegeben ist, so sind AB, BC gegeben.

Die Composition ist folgende.

Es sey GHK der gegebene Winkel, dem der Winkel des Prllgr gleich gemacht werden soll, und von irgend einem Punct G in HG fälle man GK senkrecht auf HK. Nun sey GK × HL das Rechtek, dem das Prllgr gleich gemacht werden soll, und LH × HM sey das Rechtek, das dem gegebenen Raum gleich ist, und von dem Quadrat einer der Seiten soll weggenommen werden; und die Verhältniß des Restes zu dem Quadrat der andern Seite sey gleich der Verhältniß des Quadrates der gegebenen Linie N H zu dem Quadrat der gegebenen Linie H G.

Nun finde man durch Hülfe des 87sten S. dat. zwo gerade Linien BC, BF, die ein dem gegebenen NH×HL gleiches Rechtek einschliesen, so daß BCq — BFq gleich sey dem gegebenen LH×HM, und füge CB, BF unter dem Winkel FBC gleich dem gegebenen GHK, zusammen; alsdann mache man NH : HG = FB : BA, und vollende das Prllgr AC, und fälle AE senkrecht auf BC; so ist Prllgr AC = GK×HL; und BCq — LH×HM : BAq = NHq : HGq.

Denn weil (*constr.*) BCq = BFq + LH×HM, so ist BCq — LH×HM = BFq; nun ist[g], weil NH : HG = FB : BA gemacht worden, BFq : BAq = NHq : HGq, folglich ist BCq — LH×HM : BAq = NHq : HGq. g 22. 6.

Ferner weil △ GHK mit △ ABE gleichwinklicht ist, so ist HG : GK = BA : AE, und vorhin NH : HG = FB : BA, mithin *ex æquo* NH : GK = FB : AE; folglich[h] NH×HL : GK×HL = FB×BC : AE h 1. 5.

× BC; nun ist (*constr.*) NH × HL = FB × BC, folglich[k] GK × HL = AE × BC, das ist, = Prllgr AC.

k 14. 5.

Die Analysis dieser Aufgabe hätte können gemacht werden, wie in dem 86sten S. des griechischen Textes, und die Composition davon läßt sich bewerkstelligen wie die, die sich in dem 87sten S. dieser Ausgabe findet.

O.

Satz XC.

Wenn zwo gerade Linien ein gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen, und wenn das Quadrat der einen davon samt dem Raum, der eine gegebene Verhältnis zu dem Quadrat der andern hat, gegeben ist; so wird jede der geraden Linien gegeben seyn. Fig. 92.

Die zwo geraden Linien AB, BC schließen das gegebene Prllgr AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und BCq samt dem Raum, der eine gegebene Verhältnis zu ABq hat, sey gegeben; so wird jede der Linien AB, BC gegeben seyn.

Es sey BDq der Raum, der die gegebene Verhältnis zu ABq hat; mithin ist (*hyp.*) BCq + BDq gegeben. Von dem Punct A fälle man AE senkrecht auf BC; demnach weil die Winkel ABE, BEA gegeben sind, so ist[a] △ ABE der Gattung nach gegeben, mithin ist BA : AE gegeben; und weil BDq : BAq gegeben ist, so ist[b] BD : BA gegeben, mithin[c] ist AE : BD gegeben, wie auch (AE × BC, das ist,) AC : DB × BC; nun ist (*hyp.*) AC gegeben, mithin ist DB × BC gegeben; und weil auch BCq + BDq gegeben ist, so[d] ist jede der Linien DB, BC gegeben; folglich weil DB : BA gegeben ist, so sind AB, BC gegeben.

a 43. dat.

b 58. dat.

c 9. dat.

d 88. dat.

Die Composition ist folgende.

Es sey FGH der gegebene Winkel, dem der Winkel des Prllgr soll gleich gemacht werden; und von irgend einem Punct F in GF fälle man FH senkrecht auf GH; und FH × GK sey das Rechtek, dem das Prllgr soll gleich gemacht werden; und KG × GL sey der Raum, dem das Quadrat von einer der Seiten des Prllgr samt dem Raum, der eine gegebene Verhältnis zu dem Quadrat der andern Seite hat, soll gleich gemacht werden; und diese gegebene

Verhältnis sey eben die, die das Quadrat der gegebenen Linie M G zu dem Quadrat von GF hat.

Aus dem 88sten S. dat. finde man zwo gerade Linien D B, B C, die ein, dem gegebenen M G × G K gleiches Rechtek einschließen, so daß D Bq + B C q gleich sey dem gegebenen K G × G L; mithin, vermöge der Bestimmung der Aufgabe in jenem Satz, muß 2 M G × GK nicht größer seyn als K G × G L. Dem sey so, und man füge die Linien D B, B C unter dem Winkel D B C gleich dem gegebenen F G H, zusammen, und mache M G : G F = D B : B A, und vollende das Prllgr A C; so ist A C = F H × G K, und B C q samt B D q, das (*constr.*) zu B A q die gegebene Verhältnis hat, die M Gq zu G F q hat, ist (*constr.*) gleich dem gegebenen Rechtek K G × G L.

Man fälle A E senkrecht auf B C. Weil nun D B : B A = M G : G F (*constr.*) und B A : A E = G F : F H, so ist *ex æquo* D B : A E = M G : F H; mithin D B × B C : A E × B C = M G × G K : F H × G K; nun ist D B × B C = M G × G K, folglich A E × B C, das ist, Prllgr A C = F H × G K.

Satz

Satz XCI. 88.

Wenn eine gerade Linie, in einem der Größe nach gegebenen Kreise gezogen, einen Kreiß=Abschnitt begränzt, der eines gegebenen Winkels fähig ist; so ist die gerade Linie der Größe nach gegeben. Fig. 93.

In dem, der Größe nach, gegebenen Kreise ABC sey die gerade Linie AC gezogen, und begränze den Kreis=Abschnitt AEC, der eines gegebenen Winkels fähig sey; so ist die gerade Linie AC der Größe nach gegeben.

Man finde D den Mittelpunct des Kreises[a], und durch D ziehe man AE, und vereinige EC; so ist[b] der Winkel ACE ein rechter, mithin gegeben; und weil auch der Winkel AEC gegeben ist (*hyp.*) so ist[c] △ ACE der Gattung nach gegeben, und EA : AC ist gegeben; nun ist[d] EA der Größe nach gegeben, weil der Kreis der Größe nach gegeben ist; folglich[e] ist AC der Größe nach gegeben.

a 1. 3.
b 31. 3.
c 43. dat.
d 5. def.
e 2. dat.

Satz XCII. 89.

Wenn eine der Größe nach gegebene gerade Linie in einem der Größe nach ge=

gebenen Kreise gezogen ist; so begränzt sie einen Kreis-Abschnitt, der eines gegebenen Winkels fähig ist. Fig. 94.

Die der Größe nach gegebene gerade Linie AC sey in dem, der Größe nach gegebenen Kreise ABC gezogen; so wird sie einen Kreis-Abschnitt begränzen, der eines gegebenen Winkels fähig ist.

Man finde D den Mittelpunct des Kreises, und durch D ziehe man AE, und vereinige EC; weil nun jede der Linien EA, AC gegeben ist,
a 1. dat. so ist [a] ihre Verhältnis gegeben; mithin, weil
b 46. dat. ACE ein rechter Winkel ist, so ist [b] △ ACE der Gattung nach gegeben, folglich ist der Winkel AEC gegeben.

90. ## Satz LCIII.

Wenn von irgend einem Punct in dem Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises zwo gerade Linien gezogen werden, die dem Umfang begegnen, und einen gegebenen Winkel einschliessen; so wird, wenn der Punct, worin die eine dem Umfang begegnet, gegeben ist, auch der Punct, worin die andere demselben begegnet, gegeben seyn. Fig. 95.

Von irgend einem Punct A in dem Umfang des, der Lage nach gegebenen Kreises ABC, seyen AB, AC an den Umfang gezogen, und machen den gegebenen Winkel BAC; so wird, wenn der Punct B gegeben ist, auch der Punct C gegeben seyn.

Man nehme D den Mittelpunct des Kreises, und ziehe BD, DC; weil nun jeder der Puncte B, D gegeben ist, so ist[a] BD der Lage nach gegeben; und weil der Winkel BAC gegeben ist, so ist[b] der Winkel BDC gegeben; mithin weil die Linie DC an den gegebenen Punct D in der, der Lage nach gegebenen Linie BD, unter dem gegebenen Winkel BDC gezogen ist, so ist[c] DC der Lage nach gegeben; nun ist (*hyp.*) der Umfang ABC der Lage nach gegeben, folglich[d] ist der Punct C gegeben.

a 29. dat.
b 20 3.
c 32. dat.
d 28. dat.

Satz XCIV. 91.

Wenn von einem gegebenen Punct eine gerade Linie gezogen wird, die einen der Lage nach gegebenen Kreis berührt; so ist die gerade Linie der Lage und Größe nach gegeben. Fig. 96.

Die gerade Linie AB, von dem gegebenen Punct A gezogen, berühre den, der Lage nach gegebenen Kreis BC; so wird AB der Lage und Größe nach gegeben seyn.

Man finde D, den Mittelpunct des Kreises, und ziehe DA, DB; weil nun jeder der
a 29. dat. Puncte D, A gegeben ist, so ist [a] die gerade Li-
nie AD der Lage und Größe nach gegeben; und
b 18. 3. weil DBA ein rechter Winkel ist [b], so ist [c] DA
c Cor. 5. 4. ein Durchmesser des, um das △ DBA beschriebenen Kreises DBA, und dieser Kreis ist da-
d 6. def. her [d] der Lage nach gegeben; nun ist auch der
e 28. dat. Kreis BC der Lage nach gegeben, folglich ist [e]
der Punct B gegeben; und weil auch der Punct A gegeben ist, so ist [a] die gerade Linie AB der Lage und Größe nach gegeben.

92.
Satz XCV.

Wenn von einem gegebenen Punct außerhalb eines der Lage nach gegebenen Kreises, eine gerade Linie gezogen wird, die den Umfang des Kreises in zween Puncten schneidet; so wird das Rechtek, das durch die, zwischen dem gegebenen Punct und den Puncten des Umfanges liegende Linien formirt wird, gegeben seyn. Fig. 97.

Von dem Punct A ausserhalb des, der Lage nach gegebenen Kreises B C D sey die gerade Linie ABC gezogen, die den Umfang in den Puncten B, C schneide; so wird BA × AC gegeben seyn.

Von dem Punct A ziehe man[a] AD, die den Kreis berühre; mithin[b] ist A D der Lage und Größe nach gegeben; weil demnach AD gegeben ist, so ist[c] ADq gegeben; nun ist[d] ADq = B A × A C; folglich ist B A × A C gegeben.

a 17. 3.
b 94. dat.
c 56. dat.
d 36. 3.

Satz XCVI. 93.

Wenn durch einen gegebenen Punct in einem der Lage nach gegebenen Kreis eine gerade Linie gezogen wird; so ist das Rechtek, das durch die, zwischen dem Punct und dem Umfang liegenden Segmente formirt wird, gegeben. Fig. 98.

Durch den Punct A innerhalb des, der Lage nach gegebenen Kreises B C E sey die gerade Linie BAC gezogen; so ist BA × AC gegeben.

Man nehme D den Mittelpunct des Kreises, ziehe AD, und verlängere sie bis zu den Puncten E, F. Weil nun die Puncte A, D
a 29. dat. gegeben sind, so ist[a] AD der Lage nach gegeben, und weil (*hyp.*) der Kreis BEC der Lage
b 28. dat. nach gegeben ist, so sind[b] die Puncte E, F gegeben; nun ist der Punct A gegeben, mithin[a] ist jede der Linien EA, AF gegeben, folglich ist $EA \times AF$ gegeben, folglich auch das ihm
c 35. 3. gleiche[c] Rechtek $BA \times AC$.

94. ## Satz LCVII.

Wenn in einem der Größe nach gegebenen Kreis eine gerade Linie gezogen wird, die einen, eines gegebenen Winkels fähigen, Abschnitt begränzt; so wird, wenn der Winkel in dem Abschnitt, durch eine bis an den Umfang verlängerte gerade Linie in zween gleiche Theile getheilt wird, die Summe der, den gegebenen Winkel einschließenden Linien eine gegebene Verhältnis zu der theilenden Linie haben: und das Rechtek, das durch die Summe der einschliessenden Linien, und das, unter der Grundlinie des Abschnittes liegende Segment der theilenden Linie formirt ist, wird gegeben seyn. Fig. 99.

Die gerade Linie B C, in dem, der Größe nach gegebenen, Kreis A B C begränze einen, des gegebenen Winkels B A C fähigen Abschnitt, und der Winkel B A C werde durch die gerade Linie A D in zween gleiche Theile getheilt; so wird B A + A C : A D, wie auch das Rechtek (B A + A C) × E D gegeben seyn.

Man ziehe B D; weil nun B C in dem der Größe nach gegebenen Kreis A B C einen Abschnitt B A C begränzt, der eines gegebenen Winkels B A C fähig ist, so ist[a] B C der Größe nach gegeben; aus eben dem Grund ist B D gegeben; mithin[b] ist B C : B D gegeben; und weil der Winkel B A C durch A D in zween gleiche Theile getheilt ist, so ist[c] B A : A C = B E : E C, und *permutando* A B : B E = A C : C E, mithin[d] B A + A C : B C = A C : C E; und weil der Winkel B A E = E A C, und[e] der Winkel A C E = A D B; so ist △ A C E mit dem △ A D B gleichwinklicht; mithin ist A C : C E = A D : D B; nun ist A C : C E = B A + A C : B C, folglich B A + A C : B C = A D : D B, und *permutando* B A + A C : A D = B C : D B; nun ist B C : D B gegeben, folglich ist auch B A + A C : A D gegeben.

a 91. dat.
b 1. dat.
c 3. 6.
d 12. 5.
e 21. 3.

Zwey=

Zweytens ist das Rechtek (BA + AC) X DE gegeben. Denn weil △ BDE gleichwinklicht ist mit dem △ ACE, so ist BD : DE = AC : CE, nun ist AC : CE = BA + AC : BC, mithin ist BA + AC : BC = BD : DE, folglich ist (BA + AC) X DE = CB X BD; nun ist CB X BD gegeben, folglich ist (BA + AC) X DE gegeben.

Anderer Beweis.

Man verlängere CA und mache AF =
a 5 & 32. I. AB, und ziehe BF; weil nun [a] der Winkel BAC doppelt so groß ist, als jeder der Winkel BFA, BAD, so ist BFA = BAD; nun ist auch BCA = BDA, mithin ist △ FCB gleichwinklicht mit dem △ ADB; folglich ist FC : CB = AD : DB, und *permutando*, (FC, das ist,) BA + AC : AD = CB : BD; nun ist CB : BD gegeben, folglich ist BA + AC : AD gegeben.

Und weil der Winkel BFC = DAC, das ist, DBC ist, und der Winkel ACB = ADB, so ist △ FCB gleichwinklicht mit dem △ BDE; mithin ist (FC) BA + AC : CB = BD : DE; folglich ist (BA + AC) X DE = CB X BD, welches gegeben ist, folglich ist (BA + AC) X DE gegeben.

Satz

Satz XCVIII.

Wenn in einem der Größe nach gegebenen Kreis eine gerade Linie gezogen wird, die einen, eines gegebenen Winkels fähigen Kreis-Abschnitt begränzt, und wenn der Nebenwinkel des Winkels im Abschnitt, durch eine gerade Linie, die dem Umfang aufs neu und der Grundlinie des Abschnittes begegnet, in zween gleiche Theile getheilt wird; so wird der Unterschied der, den gegebenen Winkel einschliessenden Linien eine gegebene Verhältnis zu dem, im Kreise liegenden Segment der theilenden Linie haben: und das Rechtek, das durch eben diesen Unterschied und die theilende, zwischen der verlängerten Grundlinie und dem zweyten Punct des Umfanges liegende Linie formirt wird, wird gegeben seyn. Fig. 100.

In dem der Größe nach gegebenen Kreis A B C begränze die gerade Linie B C einen, des gegebenen Winkels B A C fähigen Kreis-Abschnitt, und C A F, der Nebenwinkel von BAC, werde durch die gerade Linie D A E, die dem Umfang aufs neu in D, und der verlängerten B C in E begegnet, in zween gleiche

Theile getheilt; so wird die Verhältnis (BA-AC) : AD, wie auch das Rechtek (BA-AC) × ED, gegeben seyn.

Man ziehe BD, und durch B ziehe man BG parallel mit DE, bis sie der verlängerten AC in G begegne; weil nun BC in dem der Größe nach gegebenen Kreis ABC den Abschnitt BAC begränzt, der eines gegebenen Winkels fähig ist, so ist[a] BC der Größe nach gegeben. Aus eben dem Grund ist BD gegeben, weil der Winkel BAD dem gegebenen EAF gleich ist; mithin ist BC : BD gegeben; und weil der Winkel CAE = EAF, wovon CAE gleich ist dem Wechselswinkel AGB, und EAF gleich dem innern entgegengesetzten ABG, so ist AGB = ABG, und AB = AG, mithin ist GC der Unterschied zwischen AB und AC. Weil nun der Winkel BGC = GAE, das ist, EAF oder BAD; und BCG ist gleich dem innern entgegengesetzten Winkel BDA des im Kreis beschriebenen Viereks BCAD; so ist △ BGC gleichwinklicht mit dem △ BDA, folglich ist GC : CB = AD : DB, und *permutando* GC, das ist, (AB − AC) : AD = CB : DB; nun ist CB : BD gegeben, folglich ist (AB − AC) : AD gegeben.

[a] 91. dat.

Zwey-

Zweytens weil der Winkel GBC gleich ist dem Wechselswinkel DEB, und BCG = BDE, so ist △ BCG gleichwinklicht mit dem △ BDE; mithin GC : CB = BD : DE, folglich ist GC × DE = CB × BD, weil nun CB, BD gegeben sind, so ist CB × BD, mithin auch GC×DE, das ist, (AB—AC) × DE gegeben.

Satz XCIX. 95.

Wenn von einem gegebenen Punct in dem Durchmesser eines der Lage nach gegebenen Kreises, oder in dem verlängerten Durchmesser, eine gerade Linie an irgend einen Punct des Umfanges, und von diesem Punct eine gerade Linie senkrecht auf die erstere, und von dem Punct, worin diese dem Umfang wiederum begegnet, eine gerade Linie mit der ersteren parallel gezogen wird; so wird der Punct, worin die Parallel-Linie dem Durchmesser begegnet, gegeben seyn; und das, durch die zwo Parallel-Linien formirte Rechtek wird gegeben seyn. Fig. 101.

In BC dem Durchmesser des der Lage nach gegebenen Kreises ABC, oder in der verlängerten BC, werde der gegebene Punct D genommen, und von D werde eine gerade Linie DA an irgend einen Punct A in dem Umfang, und AE werde senkrecht auf DA, und von E, wo diese dem Umfang wiederum begegnet, werde EF mit DA parallel gezogen, und begegne BC in F; so ist der Punct F, wie auch AD × EF gegeben.

Man verlängere EF bis an den Umfang in G, und ziehe AG; weil nun GEA ein rech-
a Cor. 5. 4. ter Winkel ist, so ist [a] AG der Durchmesser des Kreises ABC, und eben so ist BC einer; mithin ist der Punct H, wo sie einander begegnen, der Mittelpunct des Kreises, folglich ist H gegeben; nun ist der Punct D gegeben, mithin ist DH der Größe nach gegeben; und weil AD mit FG parallel ist, und GH = HA, so
b 4. 6. ist [b] DH = HF, und AD = GF; nun ist DH gegeben, mithin ist HF der Größe nach gegeben; nun ist sie auch der Lage nach ge-
3 c o. dat. geben, folglich [c] ist der Punct F gegeben.

Zweytens weil die gerade Linie EFG von einem gegebenen Punct F in oder ausserhalb eines, der Lage nach gegebenen Kreises ABC gezogen ist, so ist[d] das Rechtek EF × FG gegeben; nun ist GF = AD, folglich ist AD × EF gegeben.

d 95. oder 96. dat.

Satz C.

Wenn von einem gegebenen Punct in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, an irgend einen Punct im Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises eine gerade Linie und von diesem Punct eine andere gerade Linie, gezogen wird, die mit der erstern einen Winkel macht, der gleich ist dem Unterschied eines Rechten und desjenigen Winkels, welcher von der, der Lage nach gegebenen, und der, zwischen dem gegebenen Punct und dem Mittelpuncte des Kreises liegenden geraden Linie formirt wird; wenn ferner von dem Punct, worin die zweyte Linie dem Umfang wiederum begegnet, eine dritte gezogen wird, die mit der zweyten einen Winkel macht, welcher gleich ist dem, den die erste mit der zweyten macht: so ist der Punct, worin diese dritte Linie der, der Lage nach gegebenen Linie begegnet, gegeben; und das Rechtek, formirt durch die erste und das Segment der dritten, das zwischen dem Umfang und der, der Lage nach gegebenen geraden Linie liegt, ist gleicherweise gegeben. Fig. 102.

Die gerade Linie C D werde von dem gegebenen Punct C in der, der Lage nach gegebenen geraden Linie A B an den Umfang des, der Lage nach gegebenen Kreises D E F, dessen Mittelpunct G ist, gezogen; man vereinige C G, und ziehe von dem Punct D die Linie D F, so daß der Winkel C D F gleich ist dem Unterschied zwischen einem rechten und dem Winkel B C G; und von dem Punct F ziehe man F E so daß sie den Winkel D F E = C D F macht, und der Linie A B in H gegegnet: so wird der Punct H, wie auch das Rechtek C D × F H gegeben seyn.

C D, F H begegnen einander in dem Punct K, von dem man K L senkrecht auf D F ziehe; und D C begegne dem Umfang wiederum in M, und F H begegne ihm in E; dann ziehe man M G, G F, G H.

Weil der Winkel M D F = D F E,
a 26. 3. so ist [a] der Bogen M F = D E; mithin wenn man den gemeinschaftlichen Bogen M E hinzuthut oder hinwegnimmt, so ist der Bogen D M = E F, folglich die gerade Linie

nie D M = der geraden Linie E F, und der Winkel G M D =[b] G F E; mithin sind die Winkel G M C, G F H einander gleich, weil sie entweder einerley sind mit den Winkeln G M D, G F E, oder Nebenwinkel davon: und weil die Winkel K D L, L K D zusammengenommen gleich sind[c] einem Rechten, das ist, (*hyp.*) den Winkeln K D L, G C B; so ist der Winkel G C B oder G C H = (L K D =) L K F oder G K H; mithin sind die Puncte C, K, H, G in dem Umfang eines Kreises, folglich ist der Winkel G C K = G H F; nun ist der Winkel G M C = G F H, und G M = G F, folglich ist[d] C G = G H, und C M = H F; weil nun C G = G H, so ist der Winkel G C H = G H C, nun ist G C H gegeben, folglich auch G H C; folglich ist C G H gegeben, und weil C G der Lage nach, samt dem Punct G gegeben ist, so ist[e] G H der Lage nach gegeben; nun ist auch C B der Lage nach gegeben, folglich ist der Punct H gegeben.

[b] 8. 1.
[c] 32. 1.
[d] 26. 1.
[e] 32. dat.

Und

Und weil $HF = CM$, so ist $DC \times$
f 95. oder 96. dat. $FH = DC \times CM$; nun ist[f] $DC \times CM$
gegeben, weil der Punct C gegeben ist; folg-
lich ist $DC \times FH$ gegeben.

Ende.