Gewichtete Räume stetiger vektorwertiger Funktionen und das injektive Tensorprodukt. II

Von *Klaus-Dieter Bierstedt* in Kaiserslautern

Der vorliegende Artikel ist eine Fortsetzung der Arbeit [1], im folgenden als I zitiert. Es wird angenommen, daß der Leser mit dieser Arbeit vertraut ist; auch für alle vorkommenden Begriffe und Bezeichnungen verweisen wir auf I. Literaturangaben aus dem I. Teil zitieren wir durch eine I vor der Nummer der Arbeit.

Hier werden von Anfang an nur Funktionen mit Werten in einem *lokalkonvexen* Raum E betrachtet. Die gewichteten Räume $CV(X, E)$, $CV^p(X, E)$ und $CV_0(X, E)$ stetiger E-wertiger Funktionen auf einem vollständig regulären Hausdorffraum X mit einer lokalkonvexen Topologie, die mit Hilfe einer Nachbin-Familie V von oben halbstetiger nichtnegativer Gewichtsfunktionen auf X gegeben wird, sind in I eingeführt. Dort wurde für das injektive Tensorprodukt $E \check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X)$ und das L. Schwartzsche ε-Produkt $E \,\varepsilon\, CV_0(X)$ unter sehr allgemeinen Bedingungen (die im wesentlichen die Vollständigkeit von E und $CV_0(X)$ betreffen) eine Isomorphie zu $CV_0(X, E)$ hergeleitet (I, 5. 5). Der Approximationssatz (I, 5. 1), daß $E \otimes CV_0(X)$ in $CV_0(X, E)$ dicht liegt, benutzt dabei eine von L. Nachbin (I, [18]) angegebene Zerlegung der Eins. Die Methode von I beweist gleichzeitig, daß der Raum $CV_0(X)$ skalarer Funktionen die Grothendiecksche Approximationseigenschaft besitzt.

Wie sich bereits in I, 4. 5 gezeigt hat, ist nicht zu erwarten, daß i. a. (im Falle $CV(X) \neq CV_0(X)$) die Funktionen mit Werten in endlichdimensionalen Unterräumen von E dicht im ganzen Raum $CV(X, E)$ sind. Es stellt sich also die Aufgabe, $E \check{\otimes}_\varepsilon CV(X)$ als *Unterraum* von $CV(X, E)$ zu charakterisieren. Dabei wird die Methode von I umgekehrt: Zunächst wird hier gezeigt, daß die Isomorphie $CV^p(X, E) = E \,\varepsilon\, CV(X)$ in fast allen wichtigen Fällen gültig ist (**2. 4**). Dies gelingt durch eine neue Auffassung des ε-Produktes für lokalkonvexes E (**2. 1**), die dem Isomorphismus von $E \,\varepsilon\, CV(X)$ mit $CV(X) \,\varepsilon\, E$ beim Transponieren entspricht. Um den gewünschten *Darstellungssatz* $CV^p(X, E) = E \check{\otimes}_\varepsilon CV(X)$ zu erhalten (**2. 6**), langt es dann nach I, 3. 9, die Approximationseigenschaft für $CV(X)$ zu beweisen (**1. 1**). Beide Verfahren zur Behandlung des injektiven Tensorproduktes eines lokalkonvexen Raumes mit einem gewichteten Raum skalarer Funktionen, das in I angewandte und das aus dieser Arbeit, beruhen auf dem folgenden allgemeinen Satz (**3. 2**): *Für einen Unterraum Y von $CV(X)$ ist die Approximationseigenschaft dazu äquivalent, daß für beliebiges vollständiges lokalkonvexes E in einem gewissen gewichteten Raum stetiger E-wertiger Funktionen, der Y zugeordnet wird, die Funktionen mit endlichdimensionalem Wertebereich dicht liegen.*

Teil II enthält insgesamt drei Paragraphen. In § 1 wird ein kurzer Beweis für die Approximationseigenschaft der Räume $CV(X)$ und $CV_0(X)$ gegeben, sofern alle Gewichtsfunktionen *stetig* sind; tatsächlich langt eine wesentlich schwächere Bedingung an X und V, die sich in vielen Fällen darauf reduziert, daß *die Restriktion jeder Funktion* $v \in V$ *auf ihren Träger stetig* sein muß. Der Beweis benutzt die kanonische Darstellung eines vollständigen lokalkonvexen Raumes als projektiver Limes von Banachräumen und den Satz von Gelfand und Neumark über komplexe kommutative C^*-Algebren.

Der § 2 beschäftigt sich, wie bereits erwähnt, mit $E\,\varepsilon\, CV(X)$ und $E \check{\otimes}_\varepsilon CV(X)$. Im § 3 geben wir einige interessante Ergebnisse an, die sich aus unserer Methode für *Unterräume* gewichteter Räume stetiger Funktionen gewinnen lassen. Dabei nennen wir insbesondere eine *Tensorprodukt-Darstellung für gewichtete Räume vektorwertiger holomorpher Funktionen* (**3. 7**). Bei diesem Satz tritt jedoch als Voraussetzung noch die Approximationseigenschaft für den entsprechenden Raum *skalarer* holomorpher Funktionen auf. In einem abschließenden Beispiel behandeln wir deshalb den Raum $(H^\infty(G), \beta)$ der beschränkten holomorphen Funktionen auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G der komplexen Ebene mit der strikten Topologie β und zeigen, daß in diesem Fall die Approximationseigenschaft leicht bewiesen werden kann (**3. 8, 9**). Das ausgewählte Beispiel ist durch Arbeiten von Rubel, Shields [10] und J. H. Shapiro [12] von besonderem Interesse und steht im Zusammenhang mit dem Artikel [3] von Birtel und Dubinsky.

Ein Teil dieser Arbeit beruht auf der Dissertation des Verfassers an der Joh. Gutenberg-Universität in Mainz unter Leitung von Herrn Prof. Dr. B. Gramsch. Ich möchte es nicht versäumen, an dieser Stelle auch den Herren L. Eifler, L. A. Rubel und J. H. Shapiro für Vorabdrucke ihrer Arbeiten zu danken.

1. Die Approximationseigenschaft für gewichtete Räume

In I, 5. wurde mit Hilfe *vektorwertiger* Funktionen die Approximationseigenschaft (A. E.) für den gewichteten Raum $CV_0(X)$ stetiger Funktionen bewiesen. Hier wird ein anderer, kurzer Beweis unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gegeben, der nur *skalare* Funktionen benutzt und die A. E. von $CV(X)$ und $CV_0(X)$ auf die des Raumes $C_0(Y)$, Y lokalkompakt, reduziert. Unter Benutzung dieses Satzes wird, in gewisser Weise umgekehrt zum Verfahren in I, im nächsten Paragraphen ein Darstellungssatz für das injektive Tensorprodukt $E \check{\otimes}_\varepsilon CV(X)$ als Raum vektorwertiger Funktionen hergeleitet.

Sei im folgenden stets X ein vollständig regulärer Hausdorffraum und V eine Nachbin-Familie auf X, derart daß die Räume $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ *komplexwertiger* Funktionen separiert sind und $0 \notin V$. Betrachte dann die *Bedingung* (A) an X und V:

(A) (i) Jedes $v \in V$ ist, eingeschränkt auf seinen Träger $\operatorname{supp} v \subset X$, stetig.

(ii) Für alle $f, f' \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ und jedes $v \in V$ gibt es eine Funktion $g \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ mit $g|_{\operatorname{supp} v} = vff'|_{\operatorname{supp} v}$.

Alle unsere Aussagen bleiben auch richtig, wenn wir Forderung (A) für X und V so verstehen, daß eine Nachbin-Familie $\tilde{V}$ auf X existiert mit $V \approx \tilde{V}$, die den angegebenen Bedingungen genügt. (Die Bemerkung vor I, 1. 5 zeigt, daß dann $CV(X) = C\tilde{V}(X)$ und $CV_0(X) = C\tilde{V}_0(X)$ als topologische Vektorräume.)

1. Theorem. *Wenn* (A) *erfüllt ist, hat* $CV(X)$ *bzw.* $CV_0(X)$ *die Approximationseigenschaft.*

2. Bemerkung. *Der Beweis von* 1 *zeigt, daß ein vollständiger Raum* $CV(X)$ *bzw.* $CV_0(X)$ *mit* (A) *projektiver Limes von Banachräumen ist, die normisomorph zu komplexen kommutativen* C^**-Algebren sind.*

Außer Bemerkung 2 benutzt der Beweis von 1 noch den *Satz von Gelfand-Neumark*. Wir führen zunächst folgende Notation ein: E sei entweder $CV(X)$ oder $CV_0(X)$,

$$bv^{-1}(0) = \{f \in E;\ bv(f) = \sup_{x \in X} v(x)\,|f(x)| = 0\},$$

$E_v = E/bv^{-1}(0)$ für $v \in V$. Dann ist E_v normierter Raum mit der Norm $\|\hat{f}\|_v = bv(f)$ für alle $\hat{f} \in E_v$, wo $f \in \hat{f}$ beliebig gewählt werden darf. Der Banachraum $\tilde{E}_v$ wird als Vervollständigung von $(E_v, \|\ \|_v)$ definiert.

Wenn (A) erfüllt und $v \in V$ beliebig ist, betrachte man die Abbildung

$$A_v : \hat{f} \to vf\,|_{\operatorname{supp} v}$$

von E_v in $CB(\operatorname{supp} v)$ (f sei wieder irgendein Element von $\hat{f}$).

3. Lemma. *A_v ist isometrischer Isomorphismus von E_v in $CB(\operatorname{supp} v)$, versehen mit der* sup-*Norm.*

Beweis. Nach (i) von (A) stellt A_v einen wohldefinierten injektiven linearen Operator von E_v in $CB(\operatorname{supp} v)$ dar, und es gilt folgende Gleichung:

$$\|f\|_v = \sup_{x \in X} v(x)\,|f(x)| = \sup_{x \in \operatorname{supp} v} |(vf)(x)| = \|vf\|_{CB(\operatorname{supp} v)}, \text{ w. z. b. w.}$$

Wenn $S_v = A_v(E_v) \subset CB(\operatorname{supp} v)$, erhalten wir einen isometrischen Isomorphismus von E_v auf S_v.

4. Lemma. *S_v ist eine *-Unteralgebra von $CB(\operatorname{supp} v)$.*

Beweis. S_v ist offensichtlich unter der kanonischen Involution von $CB(\operatorname{supp} v)$ abgeschlossen. Es ist zu zeigen, daß für $f, f' \in E$:

$$(vf)(vf')\,|_{\operatorname{supp} v} \in S_v.$$

Wegen (ii) in (A) existiert aber $g \in E$ mit

$$g\,|_{\operatorname{supp} v} = vff'\,|_{\operatorname{supp} v}, \text{ so daß } (vf)(vf')\,|_{\operatorname{supp} v} = vg\,|_{\operatorname{supp} v} \in S_v, \text{ w. z. b. w.}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir den *Beweis von* 1 führen. Wegen 3 ist $\tilde{E}_v$ isometrisch isomorph der Abschließung $\bar{S}_v$ von S_v in $CB(\operatorname{supp} v)$. Außerdem ist es leicht zu sehen (unter Benutzung von 4), daß $\bar{S}_v$ eine abgeschlossene *-Unteralgebra von $CB(\operatorname{supp} v)$ bildet, d. h. eine komplexe kommutative C^*-Algebra. Der bekannte Satz von Gelfand-Neumark liefert einen isometrischen (*-)Isomorphismus von $\bar{S}_v$ auf $C_0(Y_v)$ für geeigneten lokalkompakten Raum Y_v. Es folgt, daß $\tilde{E}_v$ die A. E. für jedes $v \in V$ hat. (Die A. E. von $C_0(Y_v)$ ist wohlbekannt.) Der Beweis von 1 ist jetzt eine einfache Anwendung von I, [22], III. 9. 2, q. e. d.

5. Bemerkung. *Im Falle $E = CV_0(X)$ mit $V \subset C^+(X)$ kann man mit einer leichten Abänderung beim Beweis von 1 für jedes $v \in V$ einen Isomorphismus von $\tilde{E}_v$ auf $C_0(N_v)$ konstruieren, wo*

$$N_v = \{x \in X;\ v(x) \neq 0\}.$$

Bedingung (A) ist etwa für Beispiel I, 2. 1. (iii) bei beliebigem X erfüllt, da die Gewichtsfunktionen hier auf ihrem Träger sogar konstant sind und $CV_{\mathscr{A}}(X)$ (als linearer Raum $= C(X)$) eine Algebra bildet. Beim Nachweis von (A) wird es oft von Vorteil sein, (ii) durch eine einfachere Bedingung (ii') zu ersetzen:

6. Bemerkung. (A) *ist erfüllt, wenn außer* (i) *noch gilt:*

(ii′) *Für jedes* $f \in CV(X)$ *bzw.* $CV_0(X)$ *und jedes* $v \in V$ *läßt sich* $vf\,|_{\operatorname{supp} v} \in CB(\operatorname{supp} v)$ *zu einer Funktion* $f_v \in CB(X)$ *ausdehnen.*

Beweis. $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ ist ein Modul über $CB(X)$. Hat man also (ii′), so liegt das Produkt $g = f_v f'$ in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ für alle $f, f' \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ und alle $v \in V$ und damit $g\,|_{\operatorname{supp} v} = vff'\,|_{\operatorname{supp} v}$, d. h. es gilt (ii), w. z. b. w.

Im folgenden geben wir drei wichtige Fälle an, in denen (A) in der Form (i) und (ii′) stets gegeben ist.

7. Korollar. (A) *ist erfüllt, falls nur* $V \subset C^+(X)$.

Damit werden alle Beispiele in I, 2. 2 erfaßt. 1 liefert insbesondere einen weiteren Beweis von Theorem 3. 1 bei Collins und Dorroh (I, [2]). Im Zusammenhang mit den nun folgenden Beispielen von Nachbin-Familien aus *unstetigen* Funktionen soll noch bemerkt werden, daß Summers (I, [28], 3. 4) ein Beispiel eines lokalkompakten Raumes X und einer Nachbin-Familie V auf X gibt, derart daß die Topologie von $CV_0(X)$ nicht durch ein System *stetiger* Gewichtsfunktionen erhalten werden kann.

8. Korollar. *Für einen normalen Raum X erhält man* (A), *wenn nur* (i) *gegeben ist.*

Denn (ii′) folgt dann aus dem *Ausdehnungssatz von Tietze.*

9. Korollar. (A) *ist erfüllt, wenn* (i) *gilt und jedes* $v \in V$ *kompakten Träger hat.*

(ii′) ergibt sich hier aus dem *Ausdehnungssatz bei Warner* [15], p. 266. Gibt man z. B. $C(X)$ die Topologie $\tau_{\mathscr{K}}$ der gleichmäßigen Konvergenz auf einem System $\mathscr{K}$ kompakter Teilmengen von X (das unter der Bildung endlicher Vereinigungen abgeschlossen ist), so hat $C(X)\,[\tau_{\mathscr{K}}]$ die A. E.

Abschließend erwähnen wir noch, daß interessante Fälle existieren, in denen unsere Beweismethode *nicht* funktioniert: Zunächst beachte man, daß Lemma 4 nicht mehr zu gelten braucht, wenn nur (i), aber nicht (ii′) erfüllt ist. Sei X ein vollständig regulärer, aber nicht normaler Raum und M eine abgeschlossene Untermenge von X mit der Eigenschaft, daß es eine Funktion $\tilde{v} \in CB^+(M)$, $\tilde{v} \neq 0$ auf M, gibt, die sich nicht stetig auf X ausdehnen läßt. Definiere dann $v = \tilde{v}$ auf M und $v = 0$ auf $X \setminus M$ und finde eine Nachbin-Familie V auf X, die (i) genügt und v enthält, so daß die Konstante 1 auf X zu $CV(X)$ gehört. Wäre hier S_v eine Unteralgebra von $CB(M)$, müßte $v^2\,|_M \in S_v$ gelten, was nach Definition von v unmöglich ist.

Sei nun V eine Nachbin-Familie, die eine Funktion v enthält, deren Restriktion auf $\operatorname{supp} v$ nicht stetig ist, und setze $E = CV_0(X)$. Dann kann die Abbildung $A_v : \hat{f} \to vf\,|_{\operatorname{supp} v}$ von E_v in $B(\operatorname{supp} v)$ (= beschränkte Funktionen auf $\operatorname{supp} v$) wie oben definiert werden. Aber im allgemeinen ist *nicht einmal die Abschließung* $\overline{S_v}$ von $S_v = A_v(E_v)$ in $B(\operatorname{supp} v)$ unter der gleichmäßigen Topologie eine Algebra unter der von $B(\operatorname{supp} v)$ induzierten Multiplikation, wie das folgende einfache Beispiel zeigt:

10. Beispiel. $X = [0, 1] \subset \boldsymbol{R}$, $V = \{\lambda v;\ \lambda > 0\}$ für eine Funktion v auf X, die von oben halbstetig, aber nicht stetig ist und $v(x) \geqq c > 0$ für alle $x \in X$ erfüllt.

In diesem Fall ist $E = E_v = \widetilde{E}_v$. Nehmen wir an, $\overline{S_v}$ wäre eine Teilalgebra von $B(X)$. Da die Konstante 1 auf X zu $CV_0(X)$ gehört, gilt dann $v^2 \in \overline{S_v}$, was impliziert, daß es eine Folge $f_n \in CV_0(X)$ gibt mit $vf_n \to v^2$ in $B(X)$. Nach Definition von v konvergiert f_n gleichmäßig auf X gegen v, ein offensichtlicher Widerspruch.

Während die Beispiele oben zeigen, daß 1 die wichtigsten Fälle von Räumen $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ umfaßt, liefert also dennoch die Methode aus I, 5 (mit vektorwertigen Funktionen) für $CV_0(X)$ etwas allgemeinere Ergebnisse, wenn dieser Raum *vollständig* ist und die Gewichtsfunktionen *unstetig* sind.

2. Ein Darstellungssatz für das injektive Tensorprodukt $E \check{\otimes}_\varepsilon CV(X)$

Während in Teil I unser Interesse i. a. auf das injektive Tensorprodukt $E \check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X)$ konzentriert war, um Approximationssätze für vektorwertige Funktionen zu erhalten (als Hilfsmittel stand uns dort die Zerlegung der Eins zur Verfügung), behandeln wir hier zunächst umgekehrt das $\tilde{\varepsilon}$-Produkt $E \,\tilde{\varepsilon}\, CV_0(X)$ bzw. $E \,\tilde{\varepsilon}\, CV(X)$ und verwenden anschließend den Hauptsatz des letzten Paragraphen über die A. E. der gewichteten Räume, um daraus eine Darstellung des Tensorproduktes $E \check{\otimes}_\varepsilon CV(X)$ herzuleiten.

Im folgenden ist X stets wie in 1; für die Nachbin-Familie V gelte $V > 0$, $0 \notin V$, und E sei ein beliebiger lokalkonvexer Raum über $\mathbf{C}$. Die Räume $CV^\sigma(X, E)$ und $CV_0^\sigma(X, E)$ wurden in I, 5. 7 definiert.

1. Satz. *Für $f \in CV^\sigma(X, E)$ bzw. $CV_0^\sigma(X, E)$ setze*

$$f_{e'}(x) = e'(f(x)) \text{ für alle } x \in X \text{ und } e' \in E'.$$

(1) *Dann gilt $f_{e'} \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$.*

(2) *Erfülle f die Bedingung*

(K) *Für jedes $v \in V$ ist $\Gamma((vf)(X))$ relativkompakt in E*

(oder (K′) *Für jedes $v \in V$ ist $(vf)(X)$ präkompakt in E).*

Dann gehört die Abbildung $L(f)\colon e' \to f_{e'}$ $(e' \in E')$ zu $CV(X) \,\tilde{\varepsilon}\, E$ bzw. $CV_0(X) \,\tilde{\varepsilon}\, E$ (oder $CV(X) \,\varepsilon\, E$ bzw. $CV_0(X) \,\varepsilon\, E$).

(3) *Ist* (K) *für f erfüllt, so liegt die transponierte Abbildung $B(f) = {}^tL(f)$ von $L(f)$ in $E \,\tilde{\varepsilon}\, CV(X)$ bzw. $E \,\tilde{\varepsilon}\, CV_0(X)$, und es gilt $e'(B(f)(\mu)) = \mu(f_{e'})$ für alle*

$$e' \in E',\ \mu \in CV'(X) \text{ bzw. } CV_0'(X) \text{ und } B(f)(\delta_x) = f(x),\ x \in X.$$

(4) *Bei Identifizierung topologisch isomorpher Räume erhält man:*

$$\begin{aligned} CV(X) \,\tilde{\varepsilon}\, E &= E \,\tilde{\varepsilon}\, CV(X) \\ &= \{f \in CV^\sigma(X, E);\ \Gamma((vf)(X)) \text{ relativkompakt in } E \text{ für jedes } v \in V\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CV_0(X) \,\tilde{\varepsilon}\, E &= E \,\tilde{\varepsilon}\, CV_0(X) \\ &= \{f \in CV_0^\sigma(X, E);\ \Gamma((vf)(X)) \text{ relativkompakt in } E \text{ für jedes } v \in V\}. \end{aligned}$$

(5) *$L\colon f \to L(f)$ liefert eine Einbettung von $CV^p(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ in $CV(X) \,\varepsilon\, E$ bzw. $CV_0(X) \,\varepsilon\, E$ und eine topologische Isomorphie in $CV(X) \,\tilde{\varepsilon}\, E$ bzw. $CV_0(X) \,\tilde{\varepsilon}\, E$, wenn E quasivollständig ist.*

Beweis. (1) folgt nach Definition von $CV^\sigma(X, E)$ bzw. $CV_0^\sigma(X, E)$, da $e' \in E'$ auf $E[\sigma(E, E')]$ stetig ist.

Zu (2): Seien $\varepsilon > 0$, $v \in V$ beliebig und

$$U_{v,\varepsilon} = \{g \in CV(X) \text{ bzw. } CV_0(X);\ bv(g) \leqq \varepsilon\}.$$

Zu zeigen ist: Es gibt eine absolutkonvexe kompakte (oder eine präkompakte) Menge K in E, so daß $L(f)(K^0) < U_{v,\varepsilon}$, d. h. für jedes $e' \in K^0$ erhält man $bv(f_{e'}) \leqq \varepsilon$.

Nach Voraussetzung ist die Menge $\tilde{K} = \overline{\Gamma((vf)(X))}$ absolutkonvex und kompakt (oder $\tilde{K} = (vf)(X)$ präkompakt) in E, und gleiches gilt für $K = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{K}$. Ist $e' \in K^0$, so ergibt sich

$$|(vf_{e'})(x)| = |e'((vf)(x))| = \varepsilon \left| e'\left[\frac{1}{\varepsilon}(vf)(x)\right]\right| \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in X.$$

Zu (3): Der erste Teil ist wegen I, 3. 2. (4) klar. Für alle $e' \in E'$, $\mu \in CV'(X)$ bzw. $CV_0'(X)$ gilt

$$\langle B(f)(\mu), e'\rangle = \langle \mu, L(f)(e')\rangle = \langle \mu, f_{e'}\rangle,$$

insbesondere also mit $\mu = \delta_x$ $(x \in X)$:

$$\langle B(f)(\delta_x), e'\rangle = \langle \delta_x, f_{e'}\rangle = \langle f(x), e'\rangle; \quad \text{daher } B(f)(\delta_x) = f(x).$$

Zu (4): Ist $\tilde{u} \in E \,\tilde{\varepsilon}\, CV(X) = CV(X) \,\tilde{\varepsilon}\, E$ bzw. $E \,\tilde{\varepsilon}\, CV_0(X)$, dann folgt aus I, 5. 8. (1) bzw. (2): $\tilde{A}(\tilde{u}) \in CV^\sigma(X, E)$ bzw. $CV_0^\sigma(X, E)$, $\Gamma((vf)(X))$ relativkompakt in E für jedes $v \in V$ und $f(x) = \tilde{A}(\tilde{u})(x) = \tilde{u}(\delta_x)$, $x \in X$. Die umgekehrte Inklusion ist nach (2) richtig. Die Hintereinanderausführung von $L: f \to L(f)$, des Transponierens $L(f) \to B(f)$ und der Einbettung $\tilde{A}$ ergibt nach (3) wieder f.

Zu (5): L bildet, wegen (2), $CV^p(X, E)$ bzw. den Teilraum $CV_0(X, E)$ (vgl. I, 1. 7) in $CV(X) \,\varepsilon\, E$ bzw. $CV_0(X) \,\varepsilon\, E$ ab; die Eineindeutigkeit ist klar. Ist E quasivollständig, so stimmt $CV(X) \,\varepsilon\, E$ bzw. $CV_0(X) \,\varepsilon\, E$ mit dem entsprechenden $\tilde{\varepsilon}$-Produkt überein, und die Topologie auf diesem Raum ist nach I, 5. 8 identisch mit der von $CV^\sigma(X, E)$ induzierten, q. e. d.

2. Bemerkung. *Für $Z \leq V$ oder $W \leq V$ und X k_R-Raum implizieren $f \in CV^\sigma(X, E)$ bzw. $CV_0^\sigma(X, E)$ und* (K) *aus* 1.(2) *bereits $f \in CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$.*

Direkter Beweis. Für $Z \leq V$ gibt es $v \in V$ mit $v(x) \geq 1$ für alle $x \in X$; dann ist $f(X) \subset \Gamma((vf)(X))$ relativkompakt in E, d. h. auf $f(X)$ fallen die Topologie von E und $\sigma(E, E')$ zusammen. Für $W \leq V$ und X k_R-Raum ist f analog auf jeder kompakten Teilmenge von X stetig in E.

3. Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von* 1.(2) (*Bedingung* (K) *für f*) *gilt:*

(i) *$L(f)$ ist stetig von $E'[\sigma(E', E)]$ in $CV(X)$ $[\sigma(CV(X), CV'(X))]$ bzw. in $CV_0(X)$ $[\sigma(CV_0(X), CV_0'(X))]$.*

(ii) *$L(f)$ ist auf jeder gleichstetigen Menge von E' stetig von der schwachen Topologie $\sigma(E', E)$ in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$.*

(iii) *Das Bild unter $L(f)$ jeder gleichstetigen Menge aus E' ist relativkompakt in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$.*

Diese Eigenschaften sind einfache Konsequenzen von $L(f) \in CV(X) \,\tilde{\varepsilon}\, E$ bzw. $CV_0(X) \,\tilde{\varepsilon}\, E$, s. Schwartz (I, [24], § 1, Prop. 5).

4. Theorem. *Sei E quasivollständig. Dann gilt im Sinne von topologischen Isomorphien:*

(1) $CV(X) \,\varepsilon\, E = CV(X) \,\tilde{\varepsilon}\, E$

$= \{f \in CV^\sigma(X, E);$ *$(vf)(X)$ präkompakt in E für jedes $v \in V$*$\}$,

$CV_0(X) \,\varepsilon\, E = CV_0(X) \,\tilde{\varepsilon}\, E = \{f \in CV_0^\sigma(X, E);$ *$(vf)(X)$ präkompakt in E für jedes $v \in V$*$\}$,

$$CV(X)\,\varepsilon\, E = E\,\varepsilon\, CV(X) = CV^p(X, E), \tag{2}$$

$$CV_0(X)\,\varepsilon\, E = E\,\varepsilon\, CV_0(X) = CV_0(X, E),$$

falls zusätzlich $Z \leqq V$ *oder* $W \leqq V$ *und* X k_R*-Raum.*

4. (2) bleibt wegen I, 3. 9. (3) und I, 4. 5. (1) richtig, *wenn* E, $CV(X)$ *bzw.* $CV_0(X)$ *und* $CV^p(X, E)$ *bzw.* $CV_0(X, E)$ *vollständig sind und* $CV(X)$ *bzw.* $CV_0(X)$ *die A. E. besitzt.* Nach dem vorhergehenden ist hierzu nichts mehr zu beweisen.

5. Korollar. *Unter den Voraussetzungen von* 4. (2) *ist die Trilinearform*

$$(f, \mu, e') \to e'(B(f)\,(\mu)) = \mu(f_{e'})$$

für alle $f \in CV^p(X, E)$ *bzw.* $CV_0(X, E)$, $\mu \in CV'(X)$ *bzw.* $CV'_0(X)$ *und* $e' \in E'$ *hypostetig auf* $CV^p(X, E) \times (CV(X))'_c \times E'_c$ *bzw.* $CV_0(X, E) \times (CV_0(X))'_c \times E'_c$ *bzgl. des Systems der (relativ-) kompakten Mengen in* $CV^p(X, E)$ *bzw.* $CV_0(X, E)$, *bzgl. des Systems der gleichstetigen Mengen in* $CV'(X)$ *bzw.* $CV'_0(X)$ *und bzgl. der gleichstetigen Mengen aus* E'.

Hieraus kann man Folgerungen für die *bilinearen* Abbildungen $(f, e') \to f_{e'}$ (oder $(f, \mu) \to B(f)\,(\mu)$) ziehen. Z. B. ist das Bild unter diesen Abbildungen des Produktes einer relativkompakten Menge in $CV^p(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ und einer gleichstetigen Menge in E' (oder $CV'(X)$ bzw. $CV'_0(X)$) relativkompakt in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ (oder E).

Korollar 5 gibt eine allgemeine Eigenschaft des $\tilde{\varepsilon}$-Produktes an, vgl. Schwartz (I, [24], § 1, Cor. 1 von Prop. 4). Man kann *analoge Aussagen für* $(CV(X))'_b$ *bzw.* $(CV_0(X))'_b$ *und* E'_b *anstelle von* $(CV(X))'_c$ *bzw.* $(CV_0(X))'_c$ *und* E'_c beweisen, wenn man relativkompakte Mengen durch beschränkte ersetzt (vgl. I, [24], § 2, Prop. 18, Rem. 3).

Wir geben jetzt den bereits angekündigten Darstellungssatz für das injektive Tensorprodukt $E \check{\otimes}_\varepsilon CV(X)$ an und betrachten dabei nur den Fall, daß E beliebig ist und $CV(X)$ die A. E. besitzt.

Dann ist für vollständige E und $CV(X)$ nach I, 3. 9. (3) stets

$$E \check{\otimes}_\varepsilon CV(X) = E\,\varepsilon\, CV(X).$$

Aus 4. (2) und 1.1 erhält man:

6. Theorem. *Ist* E *vollständiger lokalkonvexer Raum, ist Bedingung* (A) *aus Paragraph* 1 *erfüllt und sind* $CV(X)$ *und* $CV(X, E)$ *vollständig (also z. B.* $Z \leqq V$ *oder* $W \leqq V$ *und* X k_R*-Raum), dann gilt*

$$E \check{\otimes}_\varepsilon CV(X) = CV^p(X, E).$$

7. Korollar. *Bei vollständigem* E *findet man als Spezialfälle von* 6:

(1) $E \check{\otimes}_\varepsilon CB(X) = \{f \in C(X, E);\ f(X)$ *relativkompakt in* $E\}$ *mit der Topologie* σ *der gleichmäßigen Konvergenz auf* X,

(2) $E \check{\otimes}_\varepsilon CB(X) = CB(X, E)$, *wenn* X *pseudokompakt*,

(3) $E \check{\otimes}_\varepsilon (C(X), b) = (C(X, E), b)$ *für* $X = b_R$*-Raum und* $b =$ *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen* X*-beschränkten Mengen* (vgl.. I, 2. 1. (iii)).

Beweis. Der 1. Teil dieses Korollars ist klar, (2) ist ein Sonderfall von (3). Zu (3) muß gezeigt werden, daß $f(B)$ relativkompakt in E, wenn $f \in C(X, E)$ und B eine beliebige (abgeschlossene) X-beschränkte Menge aus X. Offenbar ist dann $f(B)$ E-beschränkt, und z. B. aus Buchwalter (I, [33], (6.3.4) und (7.2.3)) folgt, daß in einem *vollständigen* Raum E jede E-beschränkte Menge bereits relativkompakt ist, q. e. d.

Man sieht aber leicht, daß i. a. (für nicht pseudokompaktes X) *nicht jede* Funktion aus $CB(X, E)$ die Bedingung $f(X)$ relativkompakt erfüllt:

8. Beispiel. Sei $X = N$ (natürliche Zahlen) mit der diskreten Topologie und $E = H$ für einen separablen unendlichdimensionalen Hilbertraum H. Ist $\{e_n;\, n \in N\}$ ein Orthonormalsystem in H, so gehört die Funktion $f(n) = e_n$ $(n \in N)$ zu $CB(X, E)$, und es gilt nicht: $f(X)$ präkompakt in E.

Es läßt sich daher nicht immer *jede* Funktion aus $CB(X, E)$ gleichmäßig auf X durch stetige Funktionen mit Werten in endlichdimensionalen linearen Unterräumen approximieren. Dagegen gilt eine solche Approximation für *lokalkompaktes* X stets bzgl. der *schwächeren* strikten Topologie β (s. I, 5. 4. (2)). Beispiel 8 zeigt, daß i. a. für vollständige E und $CV(X)$ das Tensorprodukt $E \check{\otimes}_\varepsilon CV(X)$ ein *echter* Unterraum von $CV(X, E)$ ist. Ob $CV^p(X, E) = CV(X, E)$ gilt, erfordert für jedes spezielle Tripel (X, V, E) gesonderte Überlegungen. Wir betrachten nur zwei Spezialfälle. Gilt z. B. Bedingung $(*)$ aus I, 1. 3 für X und V, d. h. ist $CV(X, E) = CV_0(X, E)$, so folgt $CV(X, E) = CV^p(X, E)$ *für jedes* E, s. I, 1. 7. Unter den Voraussetzungen von 6 ist dann $E \check{\otimes}_\varepsilon CV(X)$ gleich dem *vollen* Raum $CV(X, E)$. Wir wollen abschließend eine Bedingung an den Bildraum E *allein* untersuchen, die $CV(X, E) = CV^p(X, E)$ impliziert (X und $V > 0$ sind beliebig).

9. Bemerkung. $CV(X, E) = CV^p(X, E)$ *gilt, wenn in* E *jede beschränkte Menge präkompakt ist. Das tritt genau dann ein, wenn auf jeder beschränkten Menge von* E *die Ausgangstopologie mit* $\sigma(E, E')$ *zusammenfällt.*

Denn in der schwachen Topologie ist jede beschränkte Menge präkompakt, und die Umkehrung folgt leicht durch Übergang zur Vervollständigung von E. Bemerkung 9 ist z. B. für jeden Schwartz-Raum und jeden Semi-Montel-Raum E richtig. Wenn 9 erfüllt ist, läßt sich noch mehr zeigen:

10. Lemma. *Unter den Voraussetzungen von* 9 *an* E *gilt:*

(1) *Eine Funktion* f *von* X *in* E *gehört genau dann zu* $CB(X, E)$, *wenn* $f_{e'} \in CB(X)$ *für jedes* $e' \in E'$.

(2) *Ist* X k_R-*Raum, so ist* $f \in C(X, E)$ *für eine Abbildung* f *von* X *in* E *äquivalent zu* $f_{e'} \in C(X)$ *für alle* $e' \in E'$.

(3) *Wenn* $Z \leqq V$ *gilt oder* X k_R-*Raum ist, erhält man*

$$CV(X, E) = CV^\sigma(X, E) \text{ und } CV_0(X, E) = CV_0^\sigma(X, E).$$

(4) *Gilt für die Funktion* $f \in C(X, E)$ *bei beliebigem* $e' \in E'$ *die Inklusion* $f_{e'} \in CV_0(X)$, *so gehört* f *zu* $CV_0(X, E)$.

11. Bemerkung. 10. (4) *gilt für beliebiges lokalkonvexes* E *mit* $CV(X)$ *und* $CV(X, E)$ *anstelle von* $CV_0(X)$ *und* $CV_0(X, E)$.

Beweis von 10. Zu (1): Eine Funktion f von X in E mit $f_{e'} \in C(X)$ für jedes $e' \in E'$ ist stetig von X in $E[\sigma(E, E')]$. Gilt sogar stets $f_{e'} \in CB(X)$, so stellt $f(X)$ nach dem *Satz von Mackey* eine beschränkte Menge in E dar; also fällt nach 9 auf $f(X)$ die Ausgangstopologie mit $\sigma(E, E')$ zusammen. (2) beweist man analog durch Restriktion auf kompakte Teilmengen von X; (3) ist dann wegen (1) und (2) klar (vgl. 1. (1)).

Zu (4): Ist f eine Funktion, die die Voraussetzungen von (4) erfüllt, und $v \in V$ beliebig, so gibt nach 11 (vgl. die Bemerkung im Anschluß an I, 5. 7) $B = (vf)\,(X)$ eine beschränkte Menge in E an. Weil es weiter zu einer beliebigen $\sigma(E, E')$-Nullumgebung U in E eine kompakte Menge K in X gibt mit $(vf)\,(X \setminus K) \subset B \cap U$ — denn $vf_{e'}$ verschwindet für jedes $e' \in E'$ im Unendlichen —, existiert nach 9 auch für jede Nullumgebung V in E eine kompakte Menge K' in X mit $(vf)\,(X \setminus K') \subset V \cap B \subset V$, w. z. b. w.

Es ist leicht, *Beispiele* dafür anzugeben, daß

(i) eine Voraussetzung wie in 9 für die Richtigkeit von 10. (1) *selbst für kompaktes* X notwendig ist und 10. (4) bei $CV(X) \neq CV_0(X)$ i. a. *falsch* wird, wenn E nicht mehr die Eigenschaft hat, daß dort jede beschränkte Menge präkompakt ist,

(ii) *die Annahme* $X = k_R$*-Raum in* 10. (2) *nicht weggelassen werden kann* (Prop. 36. 11 in Treves [13] ist also nicht richtig formuliert).

Aus 10 und 4. (1) folgt Teil (1) des nächsten Satzes; (2) wird nur der Vollständigkeit halber notiert:

12. Satz. (1) *Ist* E *Semi-Montel-Raum und ist* $Z \leqq V$ *oder* X k_R*-Raum, dann gilt*:

$$E \tilde{\varepsilon} CV_0(X) = CV_0(X, E) = CV_0^\sigma(X, E) \quad \text{und}$$
$$E \tilde{\varepsilon} CV(X) = CV^p(X, E) = CV(X, E) = CV^\sigma(X, E).$$

(2) *Ist Bedingung* (A) *aus Paragraph* 1 *erfüllt,* E *vollständiger Semi-Montel-Raum und gilt* $Z \leqq V$ *oder* $W \leqq V$ *und* X k_R*-Raum, so erhält man* $CV(X, E) = E \check{\otimes}_\varepsilon CV(X)$.

3. Anwendung der Methode auf Unterräume

Wie sich aus I, 3. 9 und I, 4. 4 ergibt, ist für lineare und topologische Unterräume Y von $CV(X)$ unter allgemeinen Voraussetzungen die Approximationseigenschaft äquivalent dazu, daß sich für jeden lokalkonvexen Raum E gewisse E-wertige Funktionen auf X im Sinne der gewichteten Topologie von $CV(X, E)$ durch Funktionen mit Werten in endlichdimensionalen Unterräumen von E approximieren lassen. Wir präzisieren dies im folgenden und wenden beide Richtungen der Äquivalenz an, um interessante Anwendungen, insbesondere für holomorphe vektorwertige Funktionen, herzuleiten.

Es sei E dabei ein lokalkonvexer Raum, V Nachbin-Familie auf dem vollständig regulären Raum X, *und es gelte* $Z \leqq V$ *oder* $W \leqq V$ *und* $X = k_R$*-Raum*. Y bezeichne stets einen *abgeschlossenen* linearen und topologischen Unterraum von $CV(X)$.

1. Bemerkung. (1) *Bei geeigneter Identifizierung gilt*:

$$Y \tilde{\varepsilon} E = \{f \in CV(X, E);\; \Gamma((vf)(X)) \text{ relativkompakt in } E \text{ für beliebiges } v \in V \text{ und } f_{e'} \in Y \text{ für jedes } e' \in E'\},$$

mit der von $CV(X, E)$ *induzierten Topologie versehen.*

(2) *Ist* E *quasivollständig, so vereinfacht sich dies zu*

$$Y \tilde{\varepsilon} E = \{f \in CV^p(X, E);\; f_{e'} \in Y \text{ für jedes } e' \in E'\}.$$

(3) *Für* $Y < CV_0(X)$ *kann man in* (1) *bzw.* (2) $CV(X, E)$ *bzw.* $CV^p(X, E)$ *durch* $CV_0(X, E)$ *ersetzen.*

(4) $Y \otimes E$ *ist der Unterraum aller Funktionen aus* $Y \tilde{\varepsilon} E$, *deren Bild in einem endlichdimensionalen linearen Unterraum von* E *liegt.*

Beweis. Zu (1): Offenbar ist $Y \tilde{\varepsilon} E$ der topologische Untervektorraum von $CV(X) \tilde{\varepsilon} E$ aller derjenigen stetigen linearen Abbildungen u von E'_{co} ($= E'$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen absolutkonvexen kompakten Mengen in E) in $CV(X)$, für die $u(E') < Y$. Daher ergibt sich (1) aus 2. 1 und 2. 2. Die Aussagen (2) und (3) sind klar.

Zu (4): Sei f eine Funktion aus $Y \tilde{\varepsilon} E < CV(X, E)$ mit endlichdimensionalem Wertebereich. Dann erhält man wegen I, 4. 5. (2) bereits $f \in CV(X) \otimes E$, und eine einfache *Anwendung des Satzes von Hahn-Banach* zeigt nach (1) die Behauptung.

Direkt aus I, 3. 9. (2) erhält man jetzt:

2. Theorem. *Unter unseren Voraussetzungen sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $Y < CV(X)$ *oder* $CV_0(X)$ *besitzt die Approximationseigenschaft.*

(ii) *Für beliebigen vollständigen lokalkonvexen Raum E liegt in*

$$\{f \in CV^p(X, E) \text{ oder } CV_0(X, E);\quad f_{e'} \in Y \text{ für jedes } e' \in E'\}$$

der Unterraum der Funktionen mit endlichdimensionalem Wertebereich dicht.

Ist dabei Y ein (F)-Raum, so langt es, wenn (ii) *für jeden Banachraum E erfüllt ist*; s. [11], Exp. no. 14, 2. II.

Die Definition der A. E. für einen Raum $Y < CV(X)$ verlangt es, eine beliebige *präkompakte* Menge *skalarer* Funktionen in Y linear und gleichmäßig durch eine Menge in einem endlichdimensionalen Unterraum von Y zu approximieren, während es nach 2 beim Beweis der A. E. von Y auf dasselbe herauskommt, für beliebiges vollständiges lokalkonvexes E eine beliebige *E-wertige Funktion* aus $Y \tilde{\varepsilon} E$ in der Topologie von $CV(X, E)$ durch eine solche aus $Y \otimes E$ zu approximieren.

Diese Bemerkung scheint in vielen Fällen nützlich zu sein, selbst für kompaktes X und die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. So wies A. M. Davie den Verfasser darauf hin, daß für eine beliebige kompakte Menge X in der komplexen Ebene aus 2 und Gamelin, Garnett [7], Th. 6. 1 *die A. E. für die uniforme Algebra* $R(X) =$ *gleichmäßige Abschließung der rationalen Funktionen mit Polen außerhalb X* folgt. Davie hat mit einer ähnlichen Methode (unter Benutzung von Vitushkin-Techniken) bewiesen, daß *für jedes kompakte X in* **C** *auch der Raum A(X) der auf X stetigen und im Innern von X holomorphen Funktionen mit der* sup-*Norm die A. E. besitzt.*

Dagegen bleibt das Problem offen, ob die Banachalgebra $H^\infty(D)$ der auf dem offenen Einheitskreis D der komplexen Ebene beschränkten holomorphen Funktionen unter der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz die A. E. hat (vgl. Birtel, Dubinsky [3]). Werden für einen quasivollständigen lokalkonvexen Raum E mit $H^\infty(D, E)$ die auf D beschränkten holomorphen E-wertigen Funktionen mit der von $CB(D, E)$ induzierten Topologie bezeichnet (vgl. I, 2. 9), so erhalten wir aus einem weiteren Spezialfall von 2 immerhin folgende Äquivalenz (s. [3]):

3. Korollar. $H^\infty(D)$ *hat die A. E. genau dann, wenn für jeden Banachraum E die Funktionen mit endlichdimensionalem Wertebereich in* $\{f \in H^\infty(D, E);\ f(D)$ *relativkompakt*$\}$ *einen dichten Unterraum bilden.*

Eine andere Anwendung von 2 ergibt sich mit Hilfe eines *Satzes von J. B. Prolla über die gewichtete Approximation vektorwertiger Funktionen*:

4. Theorem. *Seien X und V wie vorn vorausgesetzt. Sei Y abgeschlossener linearer Unterraum von* $CV_0(X)$ *mit der induzierten Topologie. Ist* $M < C(X)$ *Modul über* $CB(X)$ *und Y Modul über M und existiert für jedes* $x \in X$, *für das* $y(x) \neq 0$ *für ein* $y \in Y$, *auch ein* $g \in M$ *mit* $g(x) \neq 0$, *so hat Y die Approximationseigenschaft.*

Beweis. Sei E ein beliebiger lokalkonvexer Raum. Dann sieht man leicht, daß $W = Y \otimes E$ die Voraussetzungen von I, [21], Theorem 2. 4 erfüllt. Durch Anwendung dieses Theorems läßt sich sofort *mit dem Satz von Hahn-Banach* zeigen, daß jede Funktion $f \in CV_0(X, E)$ mit $f_{e'} \in Y$ für beliebiges $e' \in E'$ zu der Abschließung von $Y \otimes E$ in $CV_0(X, E)$ gehört. Wegen 2 folgt daraus die Behauptung.

Satz 2. 4 von Prolla (I, [21]) ist eine Verallgemeinerung von I, 5. 1, 2 (vgl. I, [21], 2. 5 und 2. 7); dementsprechend verallgemeinert 4. auch I, 5. 5. (3).

Umgekehrt zu den bisherigen Folgerungen erlaubt es 2 auch, wenn die A. E. für den Raum Y skalarer Funktionen bekannt ist, *eine Tensorproduktdarstellung für Räume vektorwertiger Funktionen* herzuleiten. So bewies z. B. L. Eifler [6] die A. E. für die uniforme Algebra $A(X)$ *direkt*, wenn X eine kompakte Menge in $\mathbf{C}$ mit zusammenhängendem Komplement ist. Ausgehend von diesem Satz und einer sehr speziellen Fassung von 2 hat der Autor in [2] gezeigt, daß der Raum $A(X, E)$ der auf einer solchen Menge stetigen und im Innern von X holomorphen Funktionen mit Werten in dem vollständigen lokalkonvexen Raum E unter der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf X die Darstellung $A(X, E) = A(X) \check{\otimes}_\varepsilon E$ gestattet, und daraus *eine vektorwertige Fassung des bekannten Polynom-Approximationssatzes von Mergelyan* hergeleitet. (Ein solcher Satz wurde gleichzeitig von Briem, Laursen, Pedersen [4] mit einer anderen Methode bewiesen.)

Wir stellen uns deshalb allgemein die folgende *Aufgabe*: Sei für lokalkonvexes $E \neq \{0\}$ und $V > 0$ ein topologischer linearer Unterraum Y_E von $CV^p(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ gegeben. Finde Bedingungen, derart daß Y_E die Form $Y_0 \check{\otimes}_\varepsilon E$ mit einem geeigneten Raum $Y_0 < CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ skalarer Funktionen hat.

Um unsere Methoden anzuwenden, liegt es nahe, die Y_E zugeordnete Menge Y_0 als

$$Y_0 = \{g \in CV(X) \text{ bzw. } CV_0(X);\quad g = f_{e'} \text{ für gewisse } f \in Y_E \text{ und } e' \in E'\}$$

zu definieren und sie mit der von $CV(X)$ induzierten Topologie zu versehen. Es ist dann natürlich, die folgende *Voraussetzung an* Y_E zu betrachten:

(T) Alle Funktionen $f \in CV^p(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ der Form $f(x) = eg(x)$ für alle $x \in X$ mit beliebigen $e \in E$ und $g \in Y_0$ gehören zu Y_E.

5. Bemerkung. *Sei Y_E linearer Unterraum von $CV^p(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ mit* (T).

(1) *Dann ist Y_0 linearer Unterraum von $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$.*

(2) *Definiert man für beliebiges $e \in E$ den topologischen Untervektorraum Y_e von $CV^p(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ durch*

$$Y_e = \{f \in Y_E;\quad f = eg \text{ mit } g \in CV(X) \text{ bzw. } CV_0(X)\},$$

so ist Y_e für $e \neq 0$ topologisch isomorph Y_0.

(3) *Für Y_E abgeschlossen in $CV^p(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ ist Y_0 abgeschlossen in $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$.*

Beweis. Zu (2): $\tilde{I}: g \to eg$ für $g \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ und festes $e \in E$, $e \neq 0$, gibt eine eineindeutige, in beiden Richtungen stetige, lineare Abbildung von $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ in $CV^p(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ an, wobei $Y_e = \tilde{I}(Y_0)$ auf Grund von (T).

Zu (3): Ist Y_E abgeschlossen in $CV^p(X, E)$, so stellt Y_e für beliebiges $e \in E$ einen abgeschlossenen Teilraum von $CV^p(X, E)$ dar; daher ist nach dem Beweis von (2) auch Y_0 abgeschlossen in $CV(X)$, w. z. b. w.

6. Satz. *Sei E vollständig und seien X und V wie zu Beginn dieses Teils verabredet. Sei Y_E abgeschlossener topologischer linearer Unterraum von $CV^p(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ mit* (T) *und erfülle Y_0 die A. E. Dann gilt $Y_E = Y_0 \check{\otimes}_\varepsilon E$.*

Beweis. (T) besagt $Y_0 \otimes E < Y_E$; wegen der Abgeschlossenheit von Y_E und wegen der Voraussetzungen an X und V ist Y_E vollständig, also $Y_0 \check{\otimes}_\varepsilon E < Y_E$. Andererseits gilt

$$Y_E < \{f \in CV^p(X, E) \text{ bzw. } CV_0(X, E);\quad f_{e'} \in Y_0 \text{ für jedes } e' \in E'\} = Y_0 \tilde{\varepsilon} E.$$

Y_0 ist nach 5. (3) abgeschlossen, daher liegt $Y_0 \otimes E$ nach 1 und 2 dicht in Y_E, q. e. d.

Dieser Satz ist offenbar besonders geeignet, *gewichtete Räume vektorwertiger holomorpher Funktionen* (s. I, 2. 9) mit Hilfe des Tensorproduktes darzustellen. Für X = offene Menge im C^n seien $H(X, E)$ der Raum der auf X holomorphen E-wertigen Funktionen und

$$HV_0(X, E) = H(X, E) \cap CV_0(X, E),\ HV^p(X, E) = H(X, E) \cap CV^p(X, E)$$

mit der induzierten gewichteten Topologie. Setzen wir noch

$$HV_0(X) = HV_0(X, C) \text{ und } HV(X) = HV^p(X, C),$$

so ergibt sich aus 6:

7. Satz. *Sei E vollständig und gelte $W \leqq V$. Hat jetzt $HV(X)$ bzw. $HV_0(X)$ die A. E., dann gilt*

$$HV^p(X, E) = HV(X) \check{\otimes}_\varepsilon E \text{ bzw. } HV_0(X, E) = HV_0(X) \check{\otimes}_\varepsilon E.$$

Es wird in vielen Fällen schwierig sein, die A. E. von $HV(X)$ bzw. $HV_0(X)$ zu beweisen (vgl. die Bemerkung vor 3), manchmal gelingt dies aber auch ohne große Mühe (z. B. ist $HV(X)$ unter sehr einschränkenden Bedingungen an V ein *nuklearer* Raum, s. Nakamura [8]). Wir geben abschließend ein einfaches *nichttriviales* Beispiel an, das im Vergleich zu 3 besonders interessant erscheint.

Dazu sei $V = C_0^+(X)$, also $HV(X, E) = HV_0(X, E)$ gleich dem Raum $(H^\infty(X, E), \beta)$ der auf X beschränkten holomorphen E-wertigen Funktionen mit der strikten Topologie β (vgl. I, 2. 2. (ii)). Wir betrachten insbesondere den Fall X = offener Einheitskreis D. Der Raum $(H^\infty(D), \beta)$ *skalarer* Funktionen wurde in letzter Zeit u. a. in Arbeiten von Conway [5], Rubel, Shields [10] und Rubel, Ryff [9] untersucht. β ist eine Topologie, die dem in der Theorie der Funktionenalgebren wohlbekannten *Begriff der punktweise beschränkten Konvergenz analytischer Funktionen* entspricht. Wie in den angegebenen Artikeln gezeigt wird, besitzt $(H^\infty(D), \beta)$ als topologischer Vektorraum folgende Eigenschaften: Er ist vollständiger lokalkonvexer Semi-Montel-Raum, weder metrisierbar noch bornologisch noch quasitonneliert noch Mackey-Raum. Die Vermutung des Autors, daß dieser Raum auch *nicht nuklear* ist, wurde von J. H. Shapiro in einer privaten Mitteilung direkt bewiesen. Für beliebiges Gebiet G in C ist nach Shapiro [12], p. 477 und Cor. zu Prop. 2 $(H^\infty(G), \beta)$ S-Raum im Sinne von T. Husain (I, [12]), also auch Ptak-Raum. Rubel und Ryff [9] haben weiter gezeigt, daß $(H^\infty(G), \beta)$ isomorph dem Dual $F'_c = F'_{co}$ eines Banachraumes F ist. Daher hat der Raum die Topologie γ im Sinne von L. Schwartz (I, [24]) und $(H^\infty(G), \beta)'_c = (F'_{co})'_{co} = F$ ist vollständig. Der folgende Satz beruht auf der *Modifizierung eines bekannten direkten Beweises der Approximationseigenschaft für den Raum $A(D)$*, auf den mich B. Gramsch hingewiesen hat.

8. Satz. *$(H^\infty(D), \beta)$ hat die Approximationseigenschaft.*

Im *Beweis* kürzen wir $(H^\infty(D), \beta)$ mit Y_0 ab und definieren $D_r = \{z \in C;\ |z| < r\}$ für $r > 0$. Sei K kompakt in Y_0. Dann ist für fest vorgegebene $v \in C_0^+(D)$ und $\varepsilon > 0$ ein $L \in Y_0 \otimes Y'_0$ gesucht, derart daß

$$\sup_{z \in D} v(z)\, |f(z) - (Lf)(z)| \leqq \varepsilon \text{ für alle } f \in K.$$

K ist nach [10], 3. 6 *gleichmäßig* auf D beschränkt; sei also

$$\|f\| = \sup\{|f(z)|;\ z \in D\} \text{ für } f \in Y_0 \text{ und } \sup\{\|f\|;\ f \in K\} = M > 0.$$

Es existieren $0 < r < 1$ mit $v(z) \leqq \min\left(1, \frac{\varepsilon}{4M}\right)$ für $r < |z| < 1$ und $N \geqq 1$ mit

$$\sup\{v(z);\ z \in D\} \leqq N.$$

Nach dem *Satz von Arzela-Ascoli* sind die Funktionen aus K gleichmäßig gleichstetig auf $\bar{D}_r$: Es gibt $\delta > 0$, so daß aus $z, z' \in \bar{D}_r$, $|z - z'| \leqq \delta$ folgt $|f(z) - f(z')| \leqq \frac{\varepsilon}{2N}$ für alle $f \in K$. Sei $t = 1 - \delta$ und $(Tf)(z) = f(tz)$ $(z \in D, f \in Y_0)$. Für $f \in Y_0$ ist Tf auf $D_{(1-\delta)^{-1}} \supset D$ holomorph,

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{(Tf)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

mit $1 < d < (1 - \delta)^{-1}$, $z \in D$. Wegen

$$(Tf)(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{(Tf)(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta\right] + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{z^{n+1}}{\zeta^{n+2}} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} (Tf)(\zeta)\, d\zeta$$

und $\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| \geqq 1 - \frac{1}{d}$ für $z \in D$, $\zeta \in \partial D_d$ gilt

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{z^{n+1}}{\zeta^{n+2}} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} (Tf)(\zeta)\, d\zeta\right| \leqq \left(\frac{1}{d}\right)^n \frac{1}{d - 1} M \leqq \frac{\varepsilon}{2N}$$

gleichmäßig für $f \in K$, wenn nur $n \geqq n_0$. Setze

$$(Lf)(z) = \sum_{k=0}^{n_0} z^k \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{f(t\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta\right].$$

Dann existiert wegen $td < 1$ ein $v' \in C_0^+(D)$ mit $v'(z) = 1$ auf $\bar{D}_{td}$, und für dieses v' erhält man

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{f(t\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta\right| \leqq \frac{1}{d^k} \sup_{z \in D_{td}} |f(z)| \leqq d^{-k}\, b v'(f),\ f \in Y_0.$$

Daher ist $f \to l_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{f(t\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta$ stetig von Y_0 in $\boldsymbol{C}$, also $L \in Y_0 \otimes Y_0'$. Für $z \in D \setminus D_r$ ist $v(z) \leqq \frac{\varepsilon}{4M}$ und $v(z) \leqq 1$, derart daß dann für $f \in K$

$$v(z)\,|f(z) - (Lf)(z)| \leqq$$

$$v(z)\,(|f(z)| + |f(tz)|) + v(z)\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_d} \frac{z^{n_0+1}}{\zeta^{n_0+2}} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} (Tf)(\zeta)\, d\zeta\right|$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{4M}(\|f\| + \|f\|) + \frac{\varepsilon}{2N} \leqq \varepsilon.$$

Andererseits gilt für $f \in K$ und $z \in \bar{D}_r$ $|f(z) - f(tz)| \leqq \frac{\varepsilon}{2N}$, d. h.

$$v(z)\,|f(z) - (Lf)(z)| \leqq v(z)\,(|f(z) - f(tz)| + |(Tf)(z) - (Lf)(z)|)$$

$$\leqq N\left[\frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2N}\right] = \varepsilon, \text{ q. e. d.}$$

Allgemeiner erhält man:

9. Satz. *Für einfach zusammenhängendes Gebiet G in der komplexen Ebene haben $(H^\infty(G), \beta)$ und $(H^\infty(G), \beta)_c'$ die Approximationseigenschaft.*

Beweis. Der 2. Teil folgt aus dem ersten, den Bemerkungen vor 8 und I, 3. 10. Zum Beweis des 1. Teils nimmt man o. B. d. A. $G \neq \mathbf{C}$ an und findet *nach dem Riemannschen Abbildungssatz* eine Funktion g, die D eineindeutig und konform auf G abbildet. $\varphi: f \to f \circ g$ ist stetig von $(H^\infty(G), \beta)$ in $(H^\infty(D), \beta)$, ebenso stellt $\psi: h \to h \circ g^{-1}$ eine stetige Abbildung von $(H^\infty(D), \beta)$ in $(H^\infty(G), \beta)$ dar, und $\psi \circ \varphi$ ist die Identität auf $H^\infty(G)$. Nach dem Lemma auf p. 75 von D. Vogt [14] besitzt also $(H^\infty(G), \beta)$ mit $(H^\infty(D), \beta)$ die A. E., q. e. d.

Das folgende ist nun wegen 7 und 9 klar:

10. Satz. *Sei E vollständig und G einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbf{C}$. Dann ergibt sich*

$$(H^\infty(G, E), \beta) = (H^\infty(G), \beta) \check{\otimes}_\varepsilon E.$$

Literatur

[1] *K.-D. Bierstedt*, Gewichtete Räume stetiger vektorwertiger Funktionen und das injektive Tensorprodukt. I, J. reine u. angew. Math. **259** (1973), 186—210.

[2] *K.-D. Bierstedt*, Function algebras and a theorem of Mergelyan for vector-valued functions, in "Papers from the Summer Gathering on Function Algebras", Aarhus 1969.

[3] *F. Birtel, E. Dubinsky*, Bounded analytic functions of two complex variables, Math. Z. **93** (1966), 299—310.

[4] *E. Briem, K. B. Laursen, N. W. Pedersen*, Mergelyan's theorem for vector-valued functions with an application to slice algebras, Studia Math. **35** (1970), 221—226.

[5] *J. B. Conway*, Subspaces of $C(S)_\beta$, the space (l^∞, β) and (H^∞, β), Bull. AMS **72** (1966), 79—81.

[6] *L. Eifler*, The slice product of function algebras, Proc. AMS **23** (1969), 559—564.

[7] *T. W. Gamelin, J. Garnett*, Constructive techniques in rational approximation, Trans. AMS **143** (1969), 187—200.

[8] *M. Nakamura*, Notes on the nuclearity of some function spaces. II, Proc. Japan Acad. **44** (1966), 144—146.

[9] *L. A. Rubel, J. V. Ryff*, The bounded weak-star topology and the bounded analytic functions, J. Functional Analysis **5** (1970), 167—183.

[10] *L. A. Rubel, A. L. Shields*, The space of bounded analytic functions on a region, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **16** (1966), 235—277.

[11] *Séminaire L. Schwartz* 1953/4, Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques, espaces vectoriels topologiques nucléaires, applications, Paris 1954.

[12] *J. H. Shapiro*, Weak topologies on subspaces of $C(S)$, Trans. AMS **157** (1971), 471—479.

[13] *F. Treves*, Topological vector spaces, distributions and kernels, New York 1967.

[14] *D. Vogt*, On the approximation property for $R(X)$, in "Papers from the Summer Gathering on Function Algebras", Aarhus 1969.

[15] *S. Warner*, The topology of compact convergence on continuous function spaces, Duke Math. J. **25** (1958), 265—282.

Fachbereich Mathematik der Universität, 675 Kaiserslautern, Pfaffenbergstraße 95

Eingegangen 15. Dezember 1971