Integraldarstellungen linearer Funktionale

Benno Fuchssteiner

Gesamthochschule Paderborn

Das Problem dieser Arbeit ist die Charakterisierung derjenigen konvexen Kegel F(X) von reellwertigen Funktionen auf einer Menge X, welche die Eigenschaft haben, daß jede monotone lineare Abbildung $F(X) \rightarrow \mathbb{R}$ eine dominierende Integraldarstellung hat. Zur Charakterisierung dieser Kegel erhalten wir eine einfache Bedingung, die hinreichend und notwendig ist. Kegel, welche diese Bedingung erfüllen, werden wir zukünftig Dini-Kegel nennen. Diese Dini-Kegel sind nicht zu verwechseln mit den von Portenier in [11] eingeführten Dini-Räumen.

Der angegebene Hauptsatz (Abschnitt I) verallgemeinert in durchsichtiger Weise die verschiedensten Integraldarstellungssätze, so zum Beispiel den Satz von Choquet und den Satz von Riesz. Der Beweis des Hauptsatzes fußt auf drei Teilergebnissen, die im zweiten Abschnitt bereitgestellt werden. Am wichtigsten von diesen Teilergebnissen scheint mir der (abzählbare) Zerlegungssatz zu sein, der auch in anderem Zusammenhang von einiger Bedeutung ist. Im dritten Abschnitt werden einige wenige Folgerungen und Anwendungen des erhaltenen Hauptsatzes aufgezeigt. Im letzten Kapitel geben wir ein weiteres Ergebnis (ohne Beweis) und einen kurzen Oberblick über in diesem Zusammenhang wichtig erscheinende offene Probleme.

Die Beweise dieses Aufsatzes sind, soweit sie in vorhandenen oder noch erscheinenden Arbeiten enthalten sind, bewußt kurz gehalten.

I. Der Hauptsatz

Es sei X eine beliebige Menge, und $F = F(X)$ sei ein konvexer Kegel beschränkter reeller Funktionen auf X. Außerdem setzen wir voraus, daß F die konstanten Funktionen enthält. Eine Abbildung $\mu : F \to R$ heißt wie üblich *linear*, wenn sie additiv und positiv-homogen ist. μ wird *monoton* genannt, wenn für $f, g \in F$ aus $f \geq g$ immer $\mu(f) \geq \mu(g)$ folgt. Man beachte, daß im Falle eines Vektorraumes F, ein lineares μ genau dann monoton ist wenn $f \geq 0 \longrightarrow \mu(f) \geq 0 \quad \forall f \in F$
Im allgemeinen Fall reicht dies jedoch nicht aus. Da aber F die Konstanten enthält, läßt sich ein monotones lineares μ immer zu einem positiven linearen Funktional auf dem Vektorraum der reellen beschränkten Funktionen auf X fortsetzen (siehe etwa [3, Cor. 1.3]).

Mit Σ_F bezeichnen wir die von F erzeugte σ-Algebra in X. Ein positives Σ_F- Maß τ heißt *Darstellungsmaß* von μ wenn:

$$(*) \qquad \mu(f) \leq \int_X f \, d\tau \qquad \text{für alle } f \in F.$$

Gilt sogar Gleichheit bei $(*)$, so heißt τ *echtes* Darstellungsmaß. Für jedes Darstellungsmaß τ des linearen μ gilt $\tau(X) < \infty$, da F die Konstanten enthält. Dies sieht man sofort mit:

$$-\infty < \mu(-1_X) \leq -\int_X 1_X \, d\tau = -\tau(X) .$$

Darstellungsmaße sind in vielen Fällen automatisch echt. So zum Beispiel wenn F ein Vektorraum ist. Oder wenn μ ein maximales monotones lineares Funktional ist. Das soll heißen, für jedes monotone lineare ν , welches μ *dominiert* $(\nu(f) \geq \mu(f) \quad \forall f \in F)$ gilt schon $\mu = \nu$.

Es gibt in der Tat genügend viele dieser maximalen Funktionale. Denn da jedes μ-dominierende monotone lineare ν seinerseits von dem sublinearen Funktional

$$f \to \mu(1_X) \sup_{x \in X} f(x)$$

dominiert wird, folgt aus dem Zornschen Lemma, daß jedes monotone lineare μ von einem maximalen monotonen Funktional dominiert wird.

Wir kommen nun zur Formulierung unseres Hauptergebnisses:

Hauptsatz ([6, Main theorem]) *Folgendes ist äquivalent:*

(i) *Jedes monotone lineare* $\mu : F \to R$ *besitzt ein Darstellungsmaß.*

(ii) F *ist ein* Dini-Kegel, *das heißt: Für jede punktweise fallende Folge* (f_n) *in* F *gilt*

$$\inf_{n \in N} \sup_{x \in X} f_n(x) = \sup_{x \in X} \inf_{n \in N} f_n(x).$$

II Die wesentlichen Hilfsmittel

Sei F wie im letzten Kapitel. Ein monotones lineares $\mu : F \to R$ nennen wir *Zustand* wenn $\mu(1_X) = 1$. Wir sagen, daß ein Zustand μ die *abzählbare Zerlegungseigenschaft* hat, wenn für jede Überdeckung $\{ X_n | n \in N \}$ von X durch Teilmengen Zahlen $\lambda_n \geq 0$ mit $\sum_{n \in N} \lambda_n = 1$ existieren, so daß

$$\mu(f) \leq \sum_{n \in N} \lambda_n \sup_{x \in X_n} f(x) \qquad \forall f \in F.$$

Zerlegungssatz: *Es ist äquivalent:*

(i) *Jeder Zustand von* F *hat die abzählbare Zerlegungseigenschaft.*

(ii) F *ist ein Dini-Kegel.*

Beweis: (i) $\longrightarrow$ (ii): Da der Zustandsraum St(F) unter der Topologie punktweiser Konvergenz auf F kompakt ist, gibt es für jede punktweise fallende Folge (f_n) in F

einen Zustand μ mit

$$(*): \qquad \alpha = \inf_{n\varepsilon N} \sup_{x\varepsilon X} f_n(x) = \inf_{n\varepsilon N} \mu(f_n).$$

Ist nun

$\sup_{x\varepsilon X} \inf_{n\varepsilon N} f_n(x) = \beta < \alpha$, so wäre durch $X_n = \{ x\varepsilon X \mid f_n(x) \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \}$, $n\varepsilon N$

eine Oberdeckung von X gegeben, und die Zerlegung von μ bezüglich dieser Oberdeckung stünde im Widerspruch zu (*).

(ii) $\longrightarrow$ (i): Es sei $\{ X_n \mid n \varepsilon N \}$ irgendeine Oberdeckung von X und μ sei ein beliebiger Zustand. Wir betrachten die kompakten Teilmengen

$Y_n = \{ z \varepsilon St(F) \mid z(f) \leq \sup_{x\varepsilon X_n} f(x) \quad \forall f \varepsilon F \}$ von $St(F)$, den σ-kompakten

Raum $Z = \bigcup \{ Y_n \mid n \varepsilon N \}$ und $F(Z) = \{ \hat{f} \mid f \varepsilon F \}$, wobei $\hat{f}(z) = z(f) \,\forall z \varepsilon Z$. Da F Dini-Kegel ist, ist auch $F(Z)$ Dini-Kegel. μ läßt sich als Zustand auf $F(Z)$ auffassen, da es offensichtlich eine bijektive ordnungserhaltende lineare Ab=bildung von F nach $F(Z)$ gibt, die 1_X in 1_Z überführt. Nach [5, Satz 1] gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß τ auf Z mit $\mu(\hat{f}) \leq \int_Z \hat{f}\, d\tau \quad \forall \hat{f} \varepsilon F(Z)$.

Daraus erhalten wir sofort die gesuchte Zerlegung von μ indem wir setzen $\lambda_n = \tau(Y_n \setminus \bigcup \{ Y_k \mid k < n \})$. ∎

Die Bedeutung des Zerlegungssatzes liegt darin, daß man bei Zuständen von Dini-Kegeln immer abzählbare Zerlegungen finden kann. Betrachtet man nur endliche Oberdeckungen von X, so ist für alle Kegel die Existenz der entsprechenden endlichen Zerlegungen eine Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach (siehe [9] oder [3]). Es sollte noch erwähnt werden, daß M. Neumann kürzlich einen etwas anderen Beweis des Zerlegungssatzes angegeben hat [10] .

Satz 3: *Es ist äquivalent:*

(i) F *ist ein Dini-Kegel*

(ii) *Der Kegel* $VF = \{ \max(f_1,\dots,f_n) \mid n \in N,\ f_1,\dots,f_n \in F \}$ *ist ein Dini-Kegel.*

Beweis: (ii)$\longrightarrow$(i) ist trivial.

(i)$\longrightarrow$(ii): Sei (g_n) eine beliebige fallende Folge in VF. Wir setzen

$\alpha = \inf\limits_{n\varepsilon N} \sup\limits_{x\varepsilon X} g_n(x)$, $\beta = \sup\limits_{x\varepsilon X} \inf\limits_{n\varepsilon N} g_n(x)$. Offensichtlich gilt $\beta \leq \alpha$.

Es muß also nur noch $\beta \geq \alpha$ gezeigt werden. Wir nehmen an, daß

$\sup\limits_{x\varepsilon X} g_n(x) \leq \alpha + \frac{1}{n}$ (wenn dies nicht der Fall ist, gehen wir zu einer Teilfolge über, und verschaffen uns durch eventuelle Wiederholung von Folgegliedern eine Folge mit der angenommenen Eigenschaft). Weiter nehmen wir einen maximalen Filter Φ auf X, der die Mengen $X_n = \{ x \varepsilon X \mid g_n(x) \geq \alpha - \frac{1}{n} \}$ enthält. Da die einzelnen g_n von der Form $g_n = \max(f_n^1 , f_n^2,\dots, f_n^{k_n})$ mit $f_n^i \varepsilon F$ sind, gibt es wegen der Maximalität von Φ ganze Zahlen $\rho_n \leq k_n$, so daß die $Y_n = \{ x \varepsilon X \mid f_n^{\rho_n}(x) \geq \alpha - \frac{1}{n} \}$ Elemente von Φ sind. Wir untersuchen nun die durch $h_m = \sum\limits_{n\varepsilon N} \frac{1}{n} (f_n^{\rho_n} - \alpha - \frac{1}{n})$ definierte fallende Folge in F und wählen Elemente y_m aus den nichtleeren Mengen $\bigcap \{ Y_i \mid i \leq m \}$.

Da F Dini-Kegel ist, folgt die Existenz eines $x_o \in X$ mit:

$$\sum_{n \in N} \frac{1}{n} (f_n^{\rho_n}(x_o) - \alpha - \frac{1}{n}) \geq \inf_{n \in N} \sup_{x \in X} h_n(x) - 1 \geq$$

$$\geq \inf_{n \in N} h_n(y_n) - 1 \geq -1 - \sum_{n \in N} \frac{2}{n^2} > -\infty .$$

Kombiniert man dies mit $\inf_{n \in N} f_n^{\rho_n}(x_o) \leq \inf_{n \in N} g_n(x_o) \leq \beta$,

so erhält man für alle $\delta > o$, daß $(\beta + \delta - \alpha) \sum_{n \in N} \frac{1}{n} > -\infty$.

Da die harmonische Reihe divergiert, bedeutet dies $\beta \geq \alpha$. ▮

Der dritte Pfeiler für den Beweis unseres Hauptsatzes besteht aus dem folgenden:

Satz 4: *Es sei* E *ein Vektorverband (bezüglich punktweiser Maxima und Minima) von beschränkten reellen Funktionen auf* X *, der die konstanten Funktionen enthält, und es sei* μ *ein Zustand auf* E. *Dann ist äquivalent:*

(i) μ *hat ein* Σ_E *- Darstellungsmaß auf* X.

(ii) μ *hat die abzählbare Zerlegungseigenschaft.*

Beweis: Wir beweisen hier nur (ii)$\longrightarrow$(i), da wir die andere Richtung für den Beweis des Hauptsatzes nicht benötigen. Wir führen den Beweis als Anwendung des Satzes von P. Daniell und M.H. Stone (vergleiche etwa [2, S.160]). Es genügt deshalb zu zeigen, daß für jede punktweise absteigende Folge (f_n) in E mit $f = \inf_{n \in N} (f_n) \in E$ die Beziehung $\mu(f) = \inf_{n \in N} \mu(f_n)$ gültig ist.

Seien deshalb $\delta > o$ beliebig und $X_n = \{ x \mid f_n(x) \leq f(x) + \delta \}$. Dann ist $\{ X_n \mid n \in N \}$ eine Überdeckung von X , und es folgt aus der Zerlegungseigenschaft zusammen mit dem Hahn-Banach-Satz (z.B. [3, Theorem 3]) die Existenz von Zuständen μ_n und von Zahlen $\lambda_n \geq o$ mit $\sum_{n \in N} \lambda_n = 1$

und $\mu = \sum_{n\in N} \lambda_n \mu_n$, so daß $\mu_n(g) \le \sup_{x\in X_n} g(x) \quad \forall\ g \in E$.

Aus dieser Darstellung erhält man sehr einfach, daß $\mu(f) + \delta \ge \inf_{n\in N} \mu(f_n)$.

Da $\delta > o$ beliebig war, und da sich $\mu(f) \le \inf_{n\in N} \mu(f_n)$ als Folge der

Monotonie ergibt, haben wir die gesuchte Gleichung bewiesen. ∎

Die Zusammenfügung dieser drei Bausteine ergibt den:

Beweis des Hauptsatzes: (i)$\longrightarrow$(ii) ist eine unmittelbare Folge des Lebesgueschen Satzes über Monotone Konvergenz (siehe etwa [5, erster Teil des Beweises von Satz 1]).

(ii)$\longrightarrow$(i): Es genügt zu zeigen, daß ein beliebiger Zustand ν ein Darstellungsmaß hat. Mit dem Satz von Hahn-Banach (etwa [3, Cor. 1.1]) verschaffen wir uns einen Zustand δ auf dem Dini-Kegel (Folge von Satz 3) VF, so daß $\delta(f) \ge \nu(f) \quad \forall\ f \in F$. Mit dem Lemma von Zorn sichern wir uns die Existenz eines maximalen Zustandes $\bar{\mu}$ auf VF, der δ dominiert. $\bar{\mu}$ hat die abzählbare Zerlegungseigenschaft (Zerlegungssatz) und läßt sich *eindeutig* zu einem Zustand μ auf dem Vektorverband $E = VF - VF$ fortsetzen. Ist nun $\{ X_n \mid n \in N \}$ irgendeine Überdeckung von X, dann läßt sich wegen der Zerlegungseigenschaft und des Satzes von Hahn-Banach $\bar{\mu}$ schreiben als

$$\bar{\mu} = \sum_{n\in N} \lambda_n \bar{\mu}_n \text{ mit } \lambda_n \ge o, \quad \sum_{n\in N} \lambda_n = 1 \text{ und } \bar{\mu}_n(f) \le \sup_{x\in X_n} f(x) \ \forall\ f \in VF,$$

wobei die einzelnen $\bar{\mu}_n$ ebenfalls maximal sein müssen. Andererseits läßt sich aber $\bar{\mu}_n$ dominiert fortsetzen auf E zu einem μ_n mit

$$\mu_n(f) < \sup_{x\in X_n} f(x) \quad \forall\ f \in E.$$

Da aber $\bar{\mu}_n$ maximal ist, sind die Zustände $\bar{\mu}_n$ und μ_n auf VF gleich. Damit ist μ_n die eindeutige Fortsetzung von $\bar{\mu}_n$, und es gilt $\mu = \sum \lambda_n \mu_n$.

Also hat μ die abzählbare Zerlegungseigenschaft und nach Satz 4 ein Darstellungsmaß. ▌

III Beispiele und Anwendungen

1. *Ausdehnung des Meßraumes* (X, Σ_F) *im topologischen Fall.*

Seien X ein Hausdorffraum und F ein Dini-Kegel bestehend aus oberhalbstetigen Funktionen auf X.

Satz 5: *Zu jedem monotonen linearen* $\mu : F \to R$ *gibt es ein positives Maß* τ *auf der kleinsten* σ*-Algebra in* X*, die von* F *und den kompakten Teilmengen von* X *erzeugt wird, so daß*

$$\mu(f) \leq \int_X f \, d\tau \quad \forall f \in F .$$

Beweis: Sei $UC_\infty^+(X)$ die Menge der nichtnegativen oberhalbstetigen Funktionen auf X, die im Unendlichen verschwinden. Unschwer verifiziert man [6], daß $\Phi = F + UC_\infty^+(X)$ ein Dini-Kegel ist. Nach Hahn-Banach kann μ monoton linear auf Φ fortgesetzt werden, und diese Fortsetzung hat gemäß unseres Hauptsatzes ein Σ_Φ - Darstellungsmaß τ. Da nun die charakteristischen Funktionen der kompakten Mengen in Φ liegen, sind sie Σ_Φ - meßbar. ▌

2. *Der Satz von Choquet - Bishop - de Leeuw.*

Seien Z kompakte konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Vektorraumes, Kon(Z) die Menge der stetigen konvexen Funktionen auf Z und ∂Z, die Extrempunkte von Z.

Satz 6: *Zu jedem monotonen linearen* $\mu : \mathrm{Kon}(Z) \to R$ *existiert ein positives Maß* τ *bezüglich der von* $\mathrm{Kon}(Z)$ *erzeugten* σ*-Algebra in* ∂Z, *so daß*

$$\mu(f) \leq \int_{\partial Z} f \, d\tau \quad \forall \, f \in \mathrm{Kon}(Z).$$

Beweis: Sei $F = \mathrm{Kon}(Z)_{/\partial Z}$. Auf F definieren wir durch

$$\partial(f) = \sup\{ \mu(g) \mid g \in \mathrm{Kon}(Z),\ g_{/\partial Z} = f \},\ p(f) = \mu(1_Z) \sup_{x \in \partial Z} f(x)$$

ein superlineares δ und ein sublineares p. Wegen des Maximumprinzips [1, S.46] gilt $p(f) \geq \delta(f) \ \forall \, f \in F$. Nach Hahn-Banach [3. Theorem 1] gibt es ein monotones lineares $\bar{\mu}$ mit $p(f) \geq \bar{\mu}(f) \geq \delta(f) \ \forall \, f \in F$. Sei nun (g_n) eine beliebige auf ∂Z punktweise fallende Folge in Kon(Z).
Dann ist $Y = \{ x \in Z \mid \inf_{n \in N} g_n(x) = \inf_{n \in N} \sup_{z \in Z} g_n(z) \}$ eine kompakte Seite von Z,

die nach dem Satz von Dini nichtleer ist. Also enthält Y nach Krein-Milman einen Extrempunkt, und F muß ein Dini-Kegel sein. Damit hat $\bar{\mu}$ ein Darstellungsmaß τ. Dieses ist wegen $\bar{\mu}(g_{/\partial Z}) \geq \mu(g)$ auch Darstellungsmaß für μ. ∎

3. *Gewichtete Maße.*

Seien $\omega \geq 0$ eine Funktion auf X und F ein konvexer Kegel reeller Funktionen auf X, so daß alle Elemente von $\omega F = \{ \omega f \mid f \in F \}$ beschränkt sind. Eine einfache Anwendung des Hahn-Banach-Satzes liefert nun zusammen mit dem Hauptsatz:

Satz 7 [6, Theorem 2] *Es ist äquivalent:*

(i) *Für jedes lineare* $\mu : F \to R$ *mit* $\mu(f) \leq \sup_{x \in X} \omega(x) f(x) \ \forall \, f \in F$

existiert ein positives $\Sigma_{\omega F}$ *- Maß auf* X *mit:*

$$\mu(f) \leq \int_X f\,\omega\, d\tau \qquad f \in F$$

(ii) $\omega F + R$ *ist Dini-Kegel*

4. *Pseudokompakte Räume*

Seien X ein vollständig-regulärer Raum und βX seine Stone - Čech - Kompaktifizierung. Wir erinnern daran, daß X pseudokompakt genannt wird, wenn jedes $f \in C(X)$ (stetige Funktionen auf X) sein Maximum auf X annimmt.

Satz 8: X *ist genau dann pseudokompakt, wenn* βX *die einzige* F_σ *- Teilmenge von* βX *ist, die* X *enthält.*

Beweis: Sei X pseudokompakt, und sei $Y \supset X$ eine σ-kompakte Teilmenge von βX. Da für $C(\beta X) = C(X)$ der Satz von Dini gilt, ist $C(X)$ ein Dini-Kegel. Also ist auch $C(\beta X)_{/Y}$ ein Dini-Kegel. Nach dem Hauptsatz hat dann jedes $z \in \beta X$ ein Darstellungsmaß τ_z auf Y, welches wegen der σ- Kompaktheit von Y ein Borelmaß auf βX sein muß. Da aber das Diracmaß δ_z das einzige z- darstellende Borelmaß ist, folgt $z \in Y$. Mithin $Y \supset \beta X$. Die andere Richtung des Beweises ist eine leichte Übung. ▌

IV Ein weiteres Ergebnis und Probleme

Verzichtet man auf die Positivität der Darstellungsmaße, so wird man schwächere Bedingungen an die Kegel erwarten, als sie die Dini-Kegel erfüllen. In [7] wurde dieses Problem behandelt und das folgende Ergebnis bewiesen.

Satz 9: *Sei* F *ein konvexer Kegel beschränkter reeller Funktionen auf* X *(nicht notwendig die Konstanten enthaltend). Dann ist äquivalent:*

(i) *Für jedes lineare* $\mu : F \to R$ *mit* $|\mu(f)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)| \quad \forall f \in F$

existiert ein signiertes Σ_F *- Maß* τ *von Totalvariation* ≤ 1 *, so daß*

$\mu(f) \leq \int_X f \, d\tau \quad \forall f \in F.$

(ii) *Für jede Folge* (α_n, f_n) *in* $R \times F$, *so daß die Folgen* $(\alpha_n + f_n)$ *und* $(\alpha_n - f_n)$ *punktweise fallen, gilt:*

$$\sup_{x\in X} \inf_{n\in N} (\alpha_n + |f_n(x)|) = \inf_{n\in N} \sup_{x\in X} (\alpha_n + |f_n(x)|).$$

Zum Schluß dieser Arbeit sollen noch einige offene Probleme angeführt werden. Dabei sind meiner Meinung nach die ersten zwei Probleme schwierig zu lösen.

Problem 1: Wenn F kein Dini-Kegel ist, so charakterisiere man diejenigen Zustände, die trotzdem Darstellungsmaße auf X besitzen.

Problem 2: Wenn F nicht die im Satz 9 (ii) geforderte Eigenschaft besitzt, so charakterisiere man diejenigen linearen μ, für welche Darstellungsmaße entsprechend Satz 9 (i) existieren.

Problem 3: Man charakterisiere diejenigen Kegel, für welche die nach Satz 9 existierenden Darstellungsmaße eindeutig sind.

Problem 4: Sei X topologischer Raum. Unter welchen Zusatzforderungen kann man die nach Satz 9 existierenden Maße auf eine σ-Algebra ausdehnen, welche alle kompakten Teilmengen von X enthält.

Literatur

1. E.M. Alfsen, Compact convex sets and boundary integrals (Springer Verlag) Berlin-Heidelberg-New York (1971)

2. H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie (De Gruyter Verlag) Berlin (1968)

3. B. Fuchssteiner, Sandwich theorems and Lattice semigroups, J. Functional Analysis 16, 1-14 (1974)

4. B. Fuchssteiner, Lattices and Choquet's theorem , J. Functional Analysis 17, 377-387 (1974)

5. B. Fuchssteiner, Maße auf σ-kompakten Räumen, Math. Z. 142, 185-190 (1975)

6. B. Fuchssteiner, When does the Riesz representation theorem hold? preprint (1975)

7. B. Fuchssteiner, Signed representing measures, preprint (1975)

8. I. Glicksberg, The representation of functionals by integrals, Duke Math. J. 19, 253-261 (1952)

9. H. König, Sublineare Funktionale, Arch.Math. 23, 500-508 (1972)

10. M. Neumann, Varianten zum Konvergenzsatz von Simons und Anwendungen in der Choquettheory, preprint (1975) (erscheint in Arch.Math.)

11. C. Portenier, Caractérisation de certains espaces de Riesz, Séminaire Choquet: Initiation à l'analyse, 10e année, n^{o} 6, 21p (1970/71).