Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

C. Die Eigenschaften der Körper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

b) in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel,

c) in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln und

d) in den drei Winkeln.

C. Die Eigenschaften der Körper im allgemeinen.

1. Ebenflächige Körper oder Polyeder.

Ein allseitig begrenzter Teil des unendlichen Raumes heisst ein Körper.

Wird der Körper nur von ebenen Flächen begrenzt, so heisst derselbe ein ebenflächiger Körper oder Polyeder zu dessen Begrenzung mindestens vier Ebenen erforderlich sind.

Bei jedem ebenflächigen Körper unterscheidet man:

a) Die Kanten, als Durchschnittslinien zweier aufeinander folgender den Körper begrenzender Ebenen;

b) die Seiten oder Flächen, als die einzelnen den Körper begrenzenden ebenen Figuren; die Summe aller Seiten oder Flächen bildet die Oberfläche des Körpers;

c) die Ecken endlich sind die Endpunkte oder Schnittpunkte je zweier Kanten.

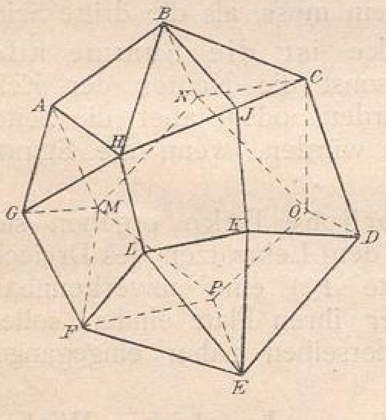

Fig. 10.

In jedem ebenflächigen Körper ist die Anzahl aller Kantenwinkel doppelt so gross als die Anzahl aller Kanten, weil in jeder Seitenfläche die Anzahl der Winkel und die Anzahl der Kanten gleich gross ist und jede Kante als gleichzeitig zwei Begrenzungsflächen angehörend doppelt gezählt wird.

In jedem ebenflächigen Körper ist die Anzahl der Flächenwinkel ebenso gross wie die Anzahl der Kanten.

In jedem ebenflächigen Körper ist die Summe aus der Anzahl der Ecken und Flächen ebenso gross wie die um zwei vermehrte Anzahl der Kanten.

Dieser Satz ist allgemein bekannt unter dem Namen Euler'scher Lehrsatz, nach dem Mathematiker Leonhard Euler 1707—1783, welcher denselben zuerst aufgestellt hat so benannt. Zum Zweck des Beweises dieses Lehrsatzes, denke man sich einen ebenflächigen Körper (Fig. 10) so auf die Zeichenebene projiziert, dass keine einzige der Brgrenzungsflächen sich als gerade Linie darstellt, also dass man sämtliche Flächen als solche sehen kann, wodurch man erreicht, dass die so erhaltene Projektion des ebenflächigen Körpers ebenso viel Flächen, Kanten und Ecken hat wie der Körper selbst. Um nun eine Beziehung zwischen diesen drei Bestimmungsstücken des ebenflächigen Körpers aufzustellen, berechnet man die Summe sämtlicher Umfangswinkel der Begrenzungsflächen in der Projektion auf doppelte Art und Weise, wobei man bezeichnet mit

E die Anzahl der Ecken des ebenflächigen Körpers,
F „ „ „ Flächen „ „ „
K „ „ „ Kanten „ „ „

Bezeichnet man ferner mit n_1, n_2, n_3, . . . die Anzahl der Seiten der einzelnen Begrenzungsfiguren des Körpers, so ist die Summe aller Umfangswinkel (vergl. Ebene Geometrie Seite 20) in einer Fläche gleich (n—2) 180° mithin die Summe S sämtlicher Umfangswinkel

$$S = [(n_1 - 2) + (n_2 - 2) + (n_3 - 2) + \ldots\ldots] \cdot 180$$
$$S = (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots) \cdot 180 - 2. F. 180$$

da dieser Körper F Flächen hat, mithin ebenso viel mal die Summe in 2 vorkommt. Da aber bei dieser Art der Aufzählung jede Kante des ebenflächigen Körpers zweimal gezählt wird, so ist

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots = 2K$$

weshalb man durch Einsetzen erhält:

$$S = (2K - 2F) \cdot 180 = (K - F) \cdot 360.$$

Bezeichnet man ferner mit m die Anzahl der Eckpunkte (A, B, C, D, E, F und G) der gemeinschaftlichen Umfangslinie der Projektion dieses Körpers, mit m_1 die Anzahl derjenigen Ecken (H, I, K, L), welche innerhalb dieser gemeinschaftlichen Umfangslinie auf der sichtbaren Seite liegen, mit m_2 aber die Anzahl derjenigen Ecken (M, N, O, P), welche innerhalb dieser gemeinschaftlichen Umfangslinie auf der unsichtbaren Seite liegen, so erhält man für die Summe S den Umfangswinkel der Projektion des oberflächlichen Körpers.

$$S = (m-2) \cdot 180 + (m-2) \cdot 180 + m_1 \cdot 360 + m_2 \cdot 360$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass die Winkelsumme an der Umfangslinie liegend doppelt gerechnet werden muss, weil die einzelnen Winkel sowohl auf der sichtbaren, als auch auf der unsichtbaren Seite der Projektion liegen, mithin ergiebt sich

$$S = (m+m)\ 180 - 4 \cdot 180 + m_1 \cdot 360 + m_2 \cdot 360$$
$$S = 2m \cdot 180 - 4 \cdot 180 + m_1 \cdot 360 + m_2 \cdot 360$$
$$S = (m + m_1 + m_2 - 2)\ 360$$

Da aber $m + m_1 + m_2$ nichts anderes ist als die Anzahl der Ecken des oberflächigen Körpers, so erhält man

$$\begin{aligned} S &= (E-2)\,360 \\ S &= (K-F)\,360 \\ \hline (E-2)\cdot 360 &= (K-F)\,360 \\ E-2 &= K-F \\ E+F &= K+2 \end{aligned}$$

a) Die Pyramide.

Der von einer körperlichen Ecke teilweise begrenzte, nach einer Seite offene Raum, heisst ein pyramidaler Raum; schneidet man denselben durch eine Ebene, welche sämtliche Kanten der körperlichen Ecke schneidet, so entsteht eine Pyramide. Der Scheitelpunkt oder die Spitze der körperlichen Ecke heisst die Spitze der Pyramide, die Kanten der körperlichen Ecke aber die Seitenkanten der Pyramide. Die in der Spitze der Pyramide zusammentreffenden Flächen, welche unter allen Umständen Dreiecke sein müssen, heissen die Seitenflächen der Pyramide und die Summe aller Seitenflächen heisst der Mantel der Pyramide. Die den pyramidalen Raum abschliessende Ebene, soweit dieselbe zwischen den Seitenflächen der Pyramide liegt, heisst die Grundfläche der Pyramide, welche mit dem Mantel derselben zusammen die Oberfläche der Pyramide ergiebt.

Unter der Höhe der Pyramide versteht man die Länge der Winkelrechten, welche von der Spitze auf die Grundfläche gefällt werden kann.

Nach der Anzahl der Seitenflächen einer Pyramide wird dieselbe als drei-, vier- und mehrseitig bezeichnet.

Ist die Grundfläche einer Pyramide ein regelmässiges Vieleck und fällt der Fusspunkt der Höhe mit dem Mittelpunkt der Grundfläche zusammen, so nennt man die Pyramide eine regelmässige und gerade. In jeder regelmässigen, geraden Pyramide sind die Seitenkanten untereinander gleich gross und die Seitenflächen sind untereinander deckungsgleiche Dreiecke. Die Höhe eines solchen Seitendreiecks einer geraden regelmässigen Pyramide heisst eine Seitenhöhe.

Schneidet man eine Pyramide durch eine Ebene, welche durch die Spitze der Pyramide geht, so ist der Schnitt immer ein Dreieck.

Wird eine Pyramide durch eine zu der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche der Grundfläche ähnlich oder gestaltgleich und die Flächeninhalte dieser beiden Flächen verhalten sich wie Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Wird die Pyramide $ABCDE$ mit der Spite S (Fig. 11) durch eine zur Grundfläche parallele Ebene so geschnitten, dass die Schnittfigur $abcde$ entsteht, so müssen die an den gleichen Seitenkanten liegenden Winkel dieser beiden Figuren gleich sein, da die Schenkel derselben in derselben Richtung parallel laufen (vergleiche Seite 9). Da aber ferner jede Seitenfläche durch eine zur entsprechenden Grundkante parallele Transversale geschnitten wird, so ergeben sich für zwei benachbarte Seitenflächen folgende Projektionen (vergleiche Ebene Geometrie Seite 58).

$$\begin{array}{l} AE : ae = SE : Se \\ \underline{ED : ed = SE : Se} \\ AE : ae = ED : ed \end{array}$$

Ebenso lässt sich aber für alle gleichliegenden Seiten nachweisen, dass dieselben dasselbe Verhältnis haben, woraus unter Hinzufügung der Bedingung Gleichheit der gleichliegenden Winkel die Ähnlichkeit der beiden Figuren $ABCDE$ und $abcde$ folgt.

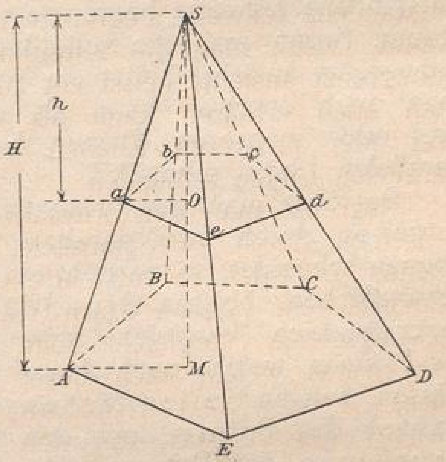

Fig. 11.

Die von der Spitze S auf die grosse Grundfläche gefällte Winkelrechte (Höhe) trifft diese in M, die parallele Schnittfläche aber in O, so dass SM und SO die Abstände der beiden in Frage kommenden Flächen von der Spitze sind. Verbindet man die so erhaltenen Fusspunkte M und O der Höhe mit je einem zugehörigen Eckpunkt, z. B. mit A und a, so ergiebt sich infolge der Gestaltgleichheit der hierdurch entstehenden Dreiecke folgende Proportionen:

$$\begin{array}{l} SM : SO = SA : Sa \\ \underline{SA : Sa = AE : ae} \\ AE : ae = SM : SO \end{array}$$

Da sich aber (vergleiche Ebene Geometrie Seite 66) gestaltgleiche Figuren ihrem Flächeninhalte nach verhalten wie die Quadrate zweier gleichliegender Seiten, so erhält man:

$$\begin{array}{l} ABCDE : abcde = \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 \\ \underline{\overline{AE}^2 \quad : \quad \overline{ae}^2 = \overline{SM}^2 : \overline{SO}^2} \\ ABCDE : abcde = \overline{SM}^2 : \overline{SO}^2 \end{array}$$

Wird eine Pyramide durch eine zur Grundebene parallele Ebene geschnitten, so heisst der zwischen den beiden parallelen

Ebene liegende Teil ein Pyramidenstumpf und der zwischen der kleineren Schnittfläche und der Spitze liegende Teil der Pyramide die Ergänzungspyramide des Stumpfes. Demnach wird ein Pyramidenstumpf von zwei einander ähnlichen Vielecken als Grundflächen begrenzt, von denen die eine die grosse, die andere die kleine Grundfläche heisst und von so vielen Trapezen, Seitenflächen genannt, als jedes Vieleck Seiten hat. Der Abstand der beiden parallelen Grundflächen eines Pyramidenstumpfes heisst die Höhe desselben.

b) Das Prisma.

Denkt man sich die Spitze einer Pyramide entferne sich immer mehr und mehr von ihrer Grundfläche, so erhält man, wenn die Spitze in unendliche Entfernung gerückt ist, ein Prisma, indem die Seitenkanten endlich parallel geworden sind. Der so entstandene teilweise begrenzte nach zwei Seiten hin unbegrenzte Raum, (wenn man die Seitenkanten nach beiden Seiten hin als unbegrenzt ansieht) heisst ein prismatischer Raum, welchen man auch erklären kann als einen Raum, der teilweise von drei oder mehreren Ebenen begrenzt wird, die einander in parallelen Linien schneiden.

Begrenzt man den prismatischen Raum dadurch, dass man denselben durch zwei parallele, sämtliche Kanten schneidende Ebenen schneidet, so entsteht ein Prisma. Die beiden parallelen Schnittflächen, heissen Grundflächen und sind untereinander deckungsgleich (vergleiche Seite 12). Die übrigen Grenzflächen des Prismas, welche nach dieser Erklärung Parallelogramme sein müssen, heissen Seitenflächen; dieselben bilden zusammen den Mantel des Prismas, mit den beiden Grundflächen aber die Oberfläche des Prismas. Die Durchschnittslinien zweier aufeinander folgender Seitenflächen eines Prismas heissen die Seitenkanten oder Kanten des Prismas, welche alle untereinander gleich sind. Der Abstand der beiden Grundflächen heisst die Höhe des Prismas.

Die Anzahl der Seitenflächen, der Seitenkanten und der Kanten der Grundfläche ist bei ein und demselben Prisma dieselbe; nach der Anzahl dieser Bestimmungsstücke wird das Prisma ein drei-, vier- oder mehrseitiges genannt. Stehen die Seitenkanten winkelrecht zur Grundseite, so nennt man das Prisma ein gerades, in jedem anderen Falle ein schiefes. Bei dem geraden Prisma ist die Höhe ebenso gross wie jede Seitenkante; bei einem schiefen Prisma aber ist die Höhe kleiner als jede Seitenkante.

Ein Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm, ist wird ein Parallelepiped genannt, welches ebenso wie jedes Prisma gerade oder schief sein kann. Jedes gerade Pararellepipod heisst auch ein rechtwinkeliges und hat es als Begrenzungsflächen Quadrate, so nennt man dieses Prisma einen Würfel oder einen Kubus.

In jedem Prisma ist jeder zur Grundfläche parallele Schnitt mit dieser Grundfläche deckungsgleich.

Jeder Schnitt eines Prismas mit einer Ebene parallel zu einer Seitenkante ist ein Parallelogramm.

Ist die Grundfläche eines geraden Prismas ein regelmässiges Vieleck, so heisst das Prisma ein regelmässiges.

c) Das Prismatoid.

Jener Körper (Fig. 12) welcher begrenzt wird von zwei beliebigen in parallelen Ebenen liegenden Vielecken als Grundflächen, und von Dreiecken als Seitenflächen, von denen jedes mit einem Vieleck einer Seite, mit dem anderen aber eine Ecke gemeinschaftlich hat, heisst ein Prismatoid. Der Abstand der beiden parallelen Grundflächen heisst die Höhe des Pramatoides. Die Seiten der beiden Grundflächenvielecke heissen Grundkanten, die Durchschnittslinien zweier aufeinanderfolgender Seitenflächen heissen Seitenkanten. Im allgemeinen ist die Anzahl der Seitenflächen gleich der Summe aus den Seitenzahlen der beiden Grundflächen, doch kann unter Umständen die Anzahl der Seitenflächen auch kleiner sein, wenn zwei Seiten der beiden Grundflächen einander parallel sind.

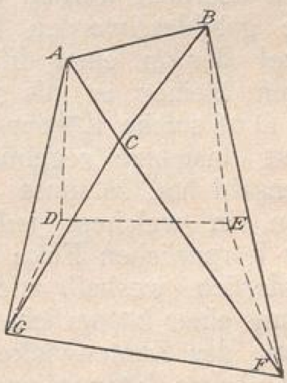

Fig. 12.

Aus der Entstehung eines Prismatoids folgt unter Berücksichtigung des Umstandes, dass parallele Ebenen parallele Schnitte haben, dass eine durch die Mitte einer Seitenkante zu den beiden Grundflächen parallele Schnittebene alle übrigen Seitenkanten des Prismatoides sowohl als auch die Höhe desselben halbiert. Die so erhaltene Schnittebene, welche ebensoviel Kanten hat, als das Prismatoid Seitenflächen, heisst der Mittelschnitt des Prismatoides.

Der Mittelschnitt hat im allgemeinen so viel Kanten wie die Anzahl der Kanten der beiden Grundflächen zusammen beträgt, und jede Kante ist halb so gross wie je eine Kante einer Grundfläche.

Verbindet man irgend einen beliebigen Punkt des Mittelschnittes mit sämtlichen Eckpunkten des Prismatoides, so wird dieses in Pyramiden zerlegt, welche alle ihre Spitzen in dem angenommenen Punkte haben, und an denen zwei die beiden

Grundflächen, die anderen aber je eine Seitenfläche des Prismatoides zur Grundfläche haben.

Haben die beiden Grundflächen eines Prismatoides gleichviel Seiten und sind ausserdem je zwei gegeuüber liegende Seiten pararallel, so heisst dieser Körper ein Obelisk.

d) Die regelmässigen Polyeder.

Ein ebenflächiger Körper oder Polyeder, dessen Begrenzungsflächen regelmässige, untereinander deckungsgleiche Vielecke sind und ausserdem von untereinander deckungsgleichen körperlichen Ebenen gebildet wird, heisst ein regelmässiger Polyeder oder platonischer Körper.

Da die regelmässigen Polyeder nur von regelmässigen Vielecken begrenzt werden sollen und nur dann eine körperliche Ecke gebildet werden kann, wenn die Summe aller Kantenwinkel der in einer Fläche zusammentreffenden Begrenzungsflächen kleiner ist als 360⁰ (vergleiche Seite 15), so kann es nur fünf solche Körper geben. Denn berücksichtigt man zunächst dasjenige regelmässige Vieleck, welches die geringste Seitenzahl hat, so muss man vom gleichseitigen Dreieck ausgehen, in welchem jeder Winkel 60^0 beträgt. Zur Bildung einer körperlichen Ecke sind bekanntlich mindestens drei Ebenen erforderlich, weshalb auch drei gleichseitige Dreiecke wohl zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten können, da die Summe der Kantenwinkel $3 \cdot 60^0 = 180^0$ ist, mithin kleiner als 360^0; ebenso können auch noch vier gleichseitige Dreiecke zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten, da die Summe der Kantenwinkel $4 \cdot 60^0 = 240^0$, auch noch kleiner ist, als 360^0; auch fünf gleichseitige Dreiecke können noch zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten, da auch hier noch die Summe der Kantenwinkel $5 \cdot 60^0 = 300^0$ noch immer kleiner als 360^0 ist. Nun können aber nicht mehr als fünf gleichseitige Dreiecke eine körperliche Ecke bilden, weil die Summe der Kantenwinkel gleich oder grösser als 360^0 wäre, was unmöglich ist. Demnach kann es nur drei regelmässige Polyeder geben, welche von gleichseitigen Dreiecken begrenzt werden, und zwar sind es:

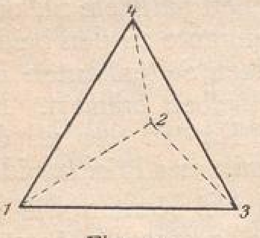

Fig. 13.

1. Das Tetraeder (Fig. 13.), auch Vierflächner genannt, begrenzt von vier gleichseitigen Dreiecken, von denen immer je drei zu einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper hat vier Ecken und sechs Kanten.

2. Das Oktaeder (Fig. 14), auch Achtflächner genannt, begrenzt von acht gleichseitigen Dreiecken, von denen immer

je vier zu einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper hat sechs Ecken und zwölf Kanten.

3. Das Ikosaeder (Fig. 15), auch Zwanzigflächner genannt, begrenzt von zwanzig gleichseitigen Dreiecken, von denen immer je fünf zu einer körperlichen Ecke zusammentreten· dieser Körper hat zwöif Ecken und dreissig Kanten.

Nach dem gleichseitigen Dreieck folgt das gleichseitige Viereck oder Quadrat, in welchem jeder Winkel 90^0 beträgt, weshalb drei Quadrate zur Bildung einer körperlichen Ecke benutzt werden können, weil die Summe der Kantenwinkel $3.90^0 = 270^0$

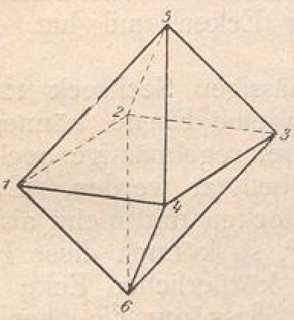

Fig. 14

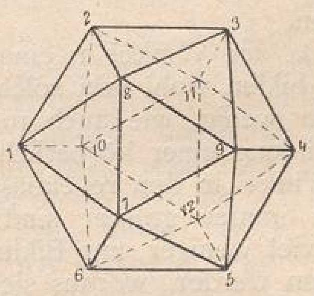

Fig. 15.

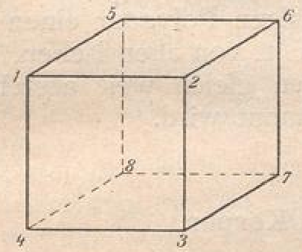

Fig. 16.

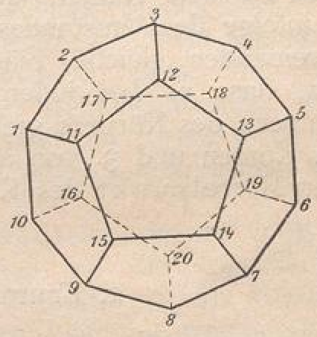

Fig. 17.

kleiner als 360^0, ist. Vier oder mehr Quadrate können keine körperliche Ecke mehr bilden, weil die Summe der Kantenwinkel gleich oder grösser als 360^0 wäre; demnach giebt es nur einen einzigen regelmässigen Polyeder, welcher von Quadraten begrenzt wird, nämlich:

Das Hexander oder der Würfel (Fig. 16), begrenzt von sechs Quadraten, von denen immer je drei zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper hat sechs Ecken und zwölf Kanten.

Nach dem Quadrate folgt das regelmässige Fünfeck, in welchem jeder Winkel 108° beträgt, weshalb drei regelmässige Fünfecke wohl zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten können, da die Summe der Kantenwinkel $3 \cdot 108^0 = 324^0$, noch immer kleiner ist als 360^0. Da aber die Summe von vier Umfangswinkeln eines regelmässigen Vierecks $4 \cdot 108^0 = 432^0$, grösser ist als 360^0, so können nur drei regelmässige Fünfecke zur Bildung einer körperlichen Ecke herangezogen werden, weshalb es auch hier nur einen einzigen regelmässigen Polyeder giebt, nämlich:

Das Dodekaeder oder den Zwölfflächner (Fig. 17), begrenzt von zwölf regelmässigen Fünfecken, von denen immer je drei zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper wird begrenzt von zwanzig Ecken und hat dreissig Kanten.

Da der Winkel in einem regelmässigen Sechseck 120^0 beträgt, bilden wohl drei solche Figuren eine Ebene, können aber ebenso wenig, wie auch mehr als drei regelmässige Sechsecke, zur Bildung einer körperlichen Ecke benützt werden. Da aber die Winkel in den regelmässigen Vielecken mit mehr als sechs Seiten immer grösser sind als 120^0, so können diese Figuren noch viel weniger zur Bildung einer körperlichen Ecke herangezogen werden, woraus sich ergiebt, dass nur die oben angeführten fünf platonischen Körper gebildet werden können.

Infolge der vollständig gleichmässigen Anordnung der einzelnen Flächen, Kanten und Ecken der regelmässigen Polyeder und infolge des Umstandes, dass die Begrenzungsflächen sämtlich untereinander gleiche Flächenwinkel bilden, ergiebt sich sehr leicht, dass es bei jedem regelmässigen Polyeder einen Punkt im Innern des Körpers giebt, welcher 1. von allen Ecken, 2. von allen Kanten und 3. von allen Flächen gleich weit absteht und daher Mittelpunkt des Körpers genannt wird.

2. Krummflächige Körper.

Diejenigen Körper, welche ganz oder teilweise von krummen Flächen begrenzt werden, heissen krummflächige Körper. In diesem Leidfaden können nur jene krummflächige Körper behandelt werden, welche eine gewisse Regelmässigkeit zeigen oder deren Entstehung bestimmten Gesetzen unterworfen ist. Die hier in Betracht kommenden Körper sind alle von sogenannten Umdrehungsflächen begrenzt, d. h. von Flächen, welche dadurch entstehen, dass bestimmte Linien sich so um eine gerade Linie, Drehungsachse genannt, bewegen, dass jeder Punkt einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in der Drehungsachse liegt. Diese so gebildeten Kreise, welche alle untereinander parallel sind, heissen Meridiane; die Ebenen der einzelnen Meridiane stehen alle auf der Drehungsachse winkelrecht.

Für den Gewerbetreibenden sind diese Drehkörper deshalb von ganz besonderer Bedeutung, weil sie in der Wirklichkeit auch durch „Drehen“ hergestellt werden, indem ein Werkzeug an dem um eine Achse sich drehenden rohen Arbeitsstück so vorbeigeführt wird, dass die vorstehenden Teile des Arbeitsstückes von dem Werkzeug entfernt werden können.

Ausser diesen Umdrehungskörpern giebt es auch noch andere krummflächige Körper, welche jedoch hier nicht weiter berücksichtigt werden sollen.

a) Der Kegel.

Bewegt sich einer von zwei Strahlen so um den anderen, dass jeder Punkt des beweglichen Strahles einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in dem festliegenden Strahl liegt, so heisst diese so entstandene Fläche, eine Kegelfläche. Der Schnittpunkt oder Scheitelpunkt der beiden Strahlen heisst die Spitze des Kegels; der sich drehende Strahl heisst eine Erzeugende der Kegelfläche, der feststehende aber die Achse die Kegelfläche.

Aus dieser Erklärung ergiebt sich ohne Weiteres, dass jeder Schnitt der Kegelfläche mit einer Ebene winkelrecht zur Kegelachse eine Kreislinie sein muss.

Wird die Kegelfläche durch eine zur Kegelachse winkelrechte Ebene begrenzt, so entsteht ein gerader Kegel, ist aber die schneidende Ebene gegen die Kegelachse geneigt, so entsteht der schiefe Kegel. Die auf diese Weise gebildete Schnittfläche, welche von der Kegelfläche begrenzt wird, heisst die Grundfläche des Kegels, derjenige Teil der Kegelfläche aber, welcher zwischen der Spitze und der schneidenden Ebene liegt, heisst der Mantel des Kegels. Beide zusammen bilden dessen Oberfläche.

Unter der Höhe des Kegels versteht man die Länge der Winkelrechten, welche von der Spitze auf die Grundfläche gefällt werden kann. Bei dem geraden Kegel ist die Kegelachse ebenso gross wie die Höhe, da diese beiden Linien zusammenfallen; bei dem schiefen Kegel ist die Höhe kleiner als die Kegelachse.

Der Kegel kann auch angesehen werden als eine Pyramide, deren Grundfläche unendlich viele, unendlich kleine Seiten hat. Daraus ergiebt sich aber auch, dass sämtliche für die Pyramide geltenden Lehrsätze auch auf den Kegel angewendet werden können, sodass man folgende Sätze erhält:

1. Jeder Schnitt eines Kegels mit einer Ebene, welche durch die Spitze des Kegels geht, ist ein Dreieck.

2. Alle Schnitte eines geraden Kegels mit Ebenen, welche durch die Höhe desselben gehen, sind untereinander deckungsgleich.

3. Alle Schnitte eines geraden Kegels mit Ebenen, welche durch die Spitze des Kegels gehen, sind gleichschenklige Dreiecke.

Wird ein Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so verhält sich die Schnittfläche zur Grundfläche wie die Quadrate der Entfernungen der beiden Ebenen von der Spitze.

Jeder Achsenschnitt eines Kegelstumpfes ist ein Trapez und zwar bei einem geraden Kegel ein gleichschenkliges Trapez.

Die Schnitte eines Kreiskegels mit Ebenen haben wegen der Entstehung der verschiedenartigen Schnittfiguren eine so grosse Bedeutung, insbesondere auch für die Gewerbetreibenden, dass es notwendig erscheint, auf diese Aufgabe hier näher einzugehen, obwohl dieselbe teilweise in das Gebiet der Projektionslehre gehört.

Eine Ebene, welche einen Kreiskegel schneidet, kann folgende Lage haben:

1. Die Ebene geht durch die Spitze des Kegels, wodurch ein gleichschenkliges Dreieck entsteht, dessen Grundseite um so grösser wird, je näher die Schnittebene dem Mittelpunkte der Grundfläche rückt und am grössten wird, wenn die Schnittebene durch die Kegelachse geht.

2. Die Schnittebene ist parallel zur Grundfläche, dann erhält man als Schnitt einen K r e i s, der um so grösser ist, je grösser die Entfernung der Schnittebene von der Spitze ist, und um so kleiner, je kleiner die Entfernung von der Spitze ist, und zwar verhalten sich die Schnittflächen ihrer Grösse nach, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

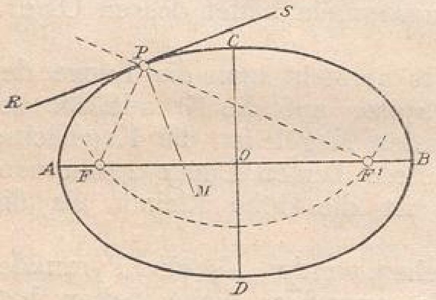

Fig. 18.

3. Ist die Schnittebene geneigt gegen die Grundfläche und trifft dieselbe sämtliche Erzeugenden des Kegels, dann ist der Schnitt eine E l l i p s e, deren Achsenverhältnis sich um so mehr von der Einheit entfernt, je grösser der Neigungswinkel der Schnittebene mit der Grundfläche wird.

4. Ist die Schnittebene geneigt gegen die Grundfläche, aber parallel zu e i n e r Kegelerzeugenden, so ist der Schnitt eine P a r a b e l und endlich

5. Ist die Scheitelebene geneigt gegen die Grundfläche, aber parallel zu z w e i Kegelerzeugenden, so ist der Kegel eine H y p e r b e l.

Eine E l l i p s e ist jene Linie, bei welcher die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes P von zwei festen Punkten

F und F_1, Brennpunkte genannt, (Fig. 18) gleich einer bestimmten Linie der grossen Achse ist, d. h. $PF + PF_1 = AB$.

Sind die beiden Achsen AB und CD einer Ellipse gegeben, so findet man die beiden Brennpunkte F und F_1, indem man mit der halben grossen Achse AO als Halbmesser einen Kreisbogen beschreibt, dessen Mittelpunkt der Endpunkt C oder D der kleinen Achse ist; die beiden so erhaltenen Schnittpunkte F und F_1 sind, wie sich aus der oben angegebenen Erklärung für eine Ellipse ergiebt, die Brennpunkte derselben.

Verbindet man einen beliebigen Punkt P der Ellipse mit den beiden Brennpunkten F und F_1, so steht die Halbierungslinie PM dieses Winkels FPF_1 winkelrecht zu dem durch P hindurchgehenden Teil der Ellipse; mithin erhält man eine Berührungslinie RS in diesem Punkte P, wenn man zu dieser Winkelhalbierenden PM eine Winkelrechte errichtet, oder indem man den Nebenwinkel FPF_1 halbiert.

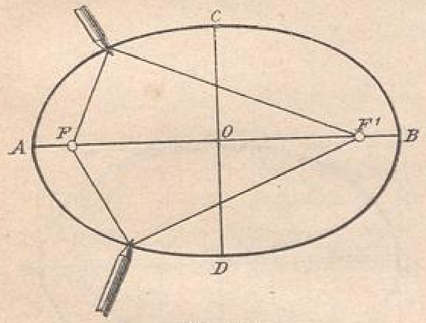

Fig. 19.

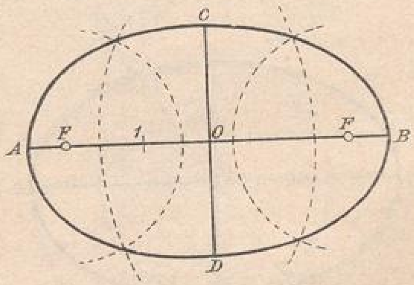

Fig. 20.

Eine Ellipse ist aus den beiden gegebenen Achsen zu zeichnen:

a) Sehr einfach erhält man eine Ellipse, wenn man die Enden eines Fadens von der Länge der grossen Achse AB in den Brennpunkten F und F_1 (Fig. 19) befestigt, und nun mit der Spitze eines Bleistiftes so auf der Zeichenebene hinfährt, dass der Faden stets gespannt erscheint, dann beschreibt die Spitze des Bleistiftes auf der darunter liegenden Papierfläche eine Ellipse. Diese Art der Erzeugung der Ellipse ist bei den Gärtnern besonders beliebt.

b) Sind die beiden Achsen AB und CD (Fig. 20) gegeben, so bestimme man nach der oben angegebenen Art und Weise zunächst die beiden Brennpunkte F und F_1, wobei bemerkt werden soll, dass man die Entfernung der beiden Brennpunkte Excentrizität nennt. Zur Bestimmung eines beliebigen Punktes der Ellipse nehme man irgendwo zwischen den beiden Brennpunkten einen Punkt 1 an und zeichne je einen Kreis, dessen Mittelpunkt je ein Brennpunkt ist, mit einem Halbmesser gleich der Entfernung $1A$ des angenommenen Punktes von dem einen Endpunkt A der grossen Achse; diesen so erhaltenen Kreisbogen durchschneide man durch zwei andere Kreise, deren Mittelpunkte ebenfalls die beiden Brennpunkte sind, für welche aber der Halbmesser gleich der Entfernung des Punktes 1 an dem zweiten Endpunkt B der grossen Achse ist. Die so erhaltenen vier Schnittpunkte der Kreise sind vier Ellipsenpunkte. Durch verschiedene Wahl der Punkte zwischen den beiden Brennpunkten kann man beliebige Ellipsenpunkte erhalten, durch deren folgerichtige Verbindung man dann die Ellipse zeichnen kann.

c) Sind die beiden Achsen AB und CD (Fig. 21) der Ellipse gegeben, so zeichne man über denselben als Durchmesser je einen Kreis und lege durch den Mittelpunkt O einen beliebigen Durchmesser EF, welcher den grossen Kreis 1 und 2 und den kleinen Kreis in 3 und 4 schneidet; durch die Schnittpunkte 1 und 2 mit dem grossen Kreise zeichne man je eine Parallele zur kleinen Achse und durch die Schnittpunkte 3 und 4 mit

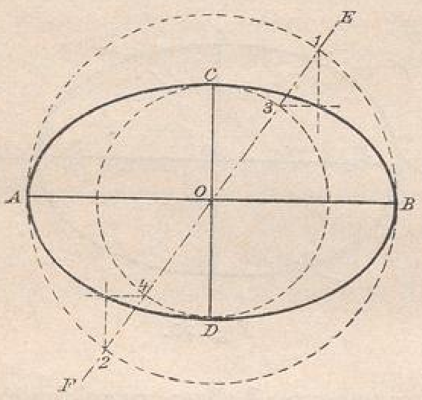

Fig. 21.

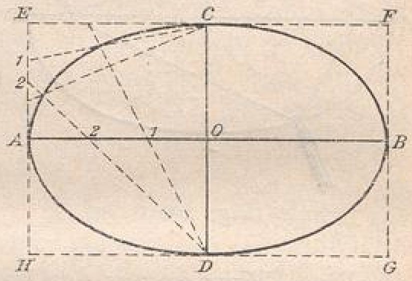

Fig. 22.

dem kleinen Kreise je eine Parallele zur grossen Achse; die Schuittpunkte dieser Parallelen ergeben Ellipsenpunkte. Durch geeignete Wahl der Durchmesser erhält man unter Befolgung der beschriebenen Konstruktion die erforderlichen Punkte, durch deren Verbindung man die Ellipse zeichnen kann.

d) Sind die beiden Achsen AB und CD (Fig. 22) der Ellipse gegeben, so zeichne man ein Rechteck $EFGH$, für welches die Ellipsenachsen die Mittellinien sind und teile die beiden Strecken AO und AE in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile; die so erhaltenen Teilpunkte verbinde man mit den Endpunkten C und D der kleinen Achse, wodurch man als Schnittpunkte der zusammengehörigen Linien Ellipsenpunkte des einen Quadranten erhält. Durch symmetrische Übertragung dieser Konstruktion auf die drei anderen Quadranten erhält man auch dort die erforderliche Anzahl von Ellipsenpunkten, die miteinander durch einen fortlaufenden Linienzug verbunden, die Ellipse ergeben.

e) Die Bauhandwerker zeichnen sehr häufig die Ellipse durch Vergatterung, weshalb hier eine der vielen hierhergehörigen Konstruktionen vorgeführt werden soll. Ist AO die halbe grosse Achse der Ellipse (Fig. 23), CD aber die ganze kleine Achse derselben, so zeichne man über der kleinen Achse als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte grosse Achse in E schneidet; die beiden Strecken OA und OE teile man nun in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile und errichte in den Teilpunkten Winkelrechte, welche selbstverständlich parallel zur kleinen Achse gehen. Durch die Schnittpunkte dieser Winkelrechten mit dem Halbkreise zeichne man Parallele zur grossen Achse und bringe dieselben zum Schnitt mit der dazugehörigen Winkelrechten, welche in den Schnittpunkten der grossen Achse errichtet wurden, wodurch man die gesuchten Ellipsenpunkte erhält.

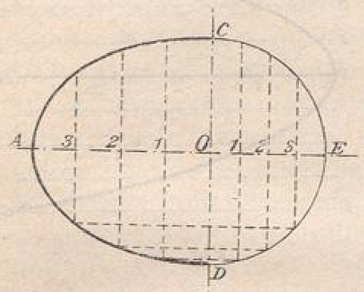

Fig. 23.

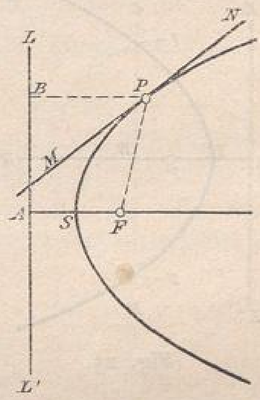

Fig. 24.

Eine Parabel ist jene Linie (Fig. 24) bei welcher jeder Punkt P derselben von einem Punkte F, Brennpunkt genannt, ebenso weit absteht, wie von einer bestimmten Linie LL, Leitlinie genannt, wobei besonders darauf hingewiesen werden soll, dass unter der Entfernung eines Punktes von einer Linie die Länge der Winkelrechten verstanden wird, welche von dem Punkte auf die Linie gefällt werden kann. Der Scheitelpunkt S der Parabel muss mit dem Halbierungspunkte der Entfernung des Brennpunktes F an der Leitlinie LL, zusammenfallen. Die Parabel ist zum Unterschiede von der Ellipse eine unbegrenzte Linie, da sich die beiden Teile bis ins Unendliche erstrecken.

Soll in einem Punkte P der Parabel eine Berührungslinie gezeichnet werden, so verbindet man dieselben mit dem Brennpunkt F, zeichnet die Winkelrechte PB zu der Leitlinie, und halbiert den so gebildeten Winkel BPF, so erhält man die Berührungslinie.

Eine Parabel ist zu zeichnen:

a) Ist die Leitlinie LL, und der Brennpunkt F gegeben (Fig. 25), so zeichnet man nach obigen Angaben zunächst den Scheitelpunkt S der Parabel und jenseits des Scheitelpunktes beliebige Winkelrechte CD zur Achse AH der Parabel; diese Winkelrechte wird durch einen Kreisbogen 1,2 durchschnitten, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt ist, und dessen Halbmesser gleich der Entfernung EA der Winkelrechten von der Leitlinie LL ist; so erhält man zwei Parabelpunkte. Ebenso erhält man weitere Parabelpunkte durch geeignete Wahl der Winkelrechten zur Parabelachse; die folgerichtige Verbindung der erhaltenen Punkte ergiebt die Parabel.

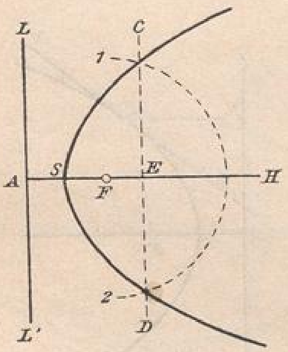

Fig. 25.

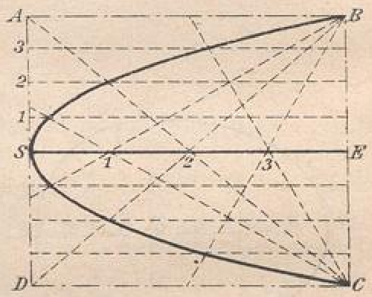

Fig. 26.

b) Soll in das Rechteck $ABCD$ (Fig. 26) eine Parabel so gezeichnet werden, dass der Halbierungspunkt S der Seite AD der Scheitelpunkt derselben ist; aber die Seite AB die Richtung der Achse der Parabel, so teile man die Mittellinie SE und die halbe Rechteckseite SA und SD in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile; durch die Teilpunkte der Rechteckseite AD zieht man zu der Parabelachse Parallele, welche man durch Strahlen durchschneidet, die die Punkte B und C mit den Teilpunkten der Parabelachse verbinden; die so erhaltenen Schnittpunkte ergehen Parabelpunkte, durch deren folgerichtige Verbindung man die Parabel erhält.

c) Sollen die einen Winkel einschliessenden Geraden AH und BY (Fig. 27) durch eine Kurve miteinander so verbunden werden, dass die den Punkten A und B die Anfangspunkte derselben sind, so erfolgt die Überführung der einen Richtung in die andere am zweckmässigsten durch eine Parabel, deren

Zeichnung am einfachsten durch Berührungslinien erfolgt. Zu diesem Zwecke verlängert man die beiden Geraden AX und BY bis zum Schnittpunkt S und teilt die so erhaltenen Strecken AS und BS in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, deren Nummerierung man einerseits bei A, andrerseits bei S beginnt; die Verbindungslinien der mit gleichen Ziffern bezeichneten Teilpunkten ergeben die gesuchten Parabeltangenten, mit deren Hülfe die durch die Punkte A und B hindurchgehende Parabel gezeichnet werden kann.

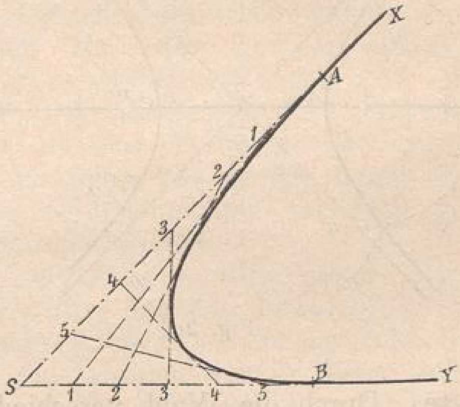

Fig. 27.

Eine Hyperbel ist jene Linie, bei welcher der Unterschied der Entfernungen eines jeden Punktes P (Fig. 28) an zwei gegebenen Punkten F und F_1, Brennpunkte genannt, gleich einer bestimmten Linie, der grossen Achse AB ist. Die Hyperbel ist, ebenso wie die Parabel, eine unbegrenzte Linie, welche sich ins Unendliche erstreckt, nur besteht die Hyperbel aus zwei Ästen, welche sowohl nach der grossen Achse, als auch nach der Mittelwinkelrechten MN zu derselben symmetrisch erscheint.

Zeichnet man über der Entfernung der beiden Brennpunkte F und F_1 einen Kreis, durch schneidet denselben durch zwei Winkelrechte zu der grossen Achse, welche man in den Scheitelpunkten A und B errichtet, und verbindet man die so erhaltenen Scknittpunkte durch Gerade parallel zur grossen Achse, so erhält man ein Rechteck $CDEF$, dessen beide Diagonalen CE und DG Asymptoten heissen und die Tangenten der Hyperlel in unendlicher Entfernung umgeben, d. h. diesen Linien muss sich die Hyperbel immer mehr und mehr nähern, ohne dieselben jedoch jemals zu erreichen.

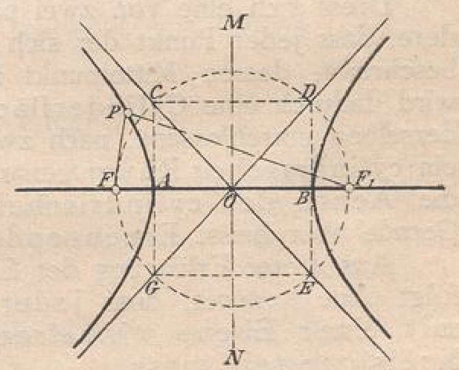

Fig. 28.

Soll eine Hyperbel, deren Brennpunkte F und F_1 und deren Scheitelpunkte A und B gegeben sind gezeichnet werden, so nehme man ausserhalb der Brennpunkte auf der verlängerten grossen Achse irgendwo einen beliebigen Punkt 1 (Fig. 29) vor und beschreibe je einen Kreis *a,a* und *b,b,* dessen Mittelpunkt je ein Brennpunkt ist mit einem Halbmesser gleich der Entfernung des Punktes 1 von dem einen Hyperbelscheitel *A*; diese so erhaltenen Kreisbogen durchschneide man durch zwei andere Kreise *mn* und *op* deren Mittelpunkte ebenfalls die beiden Brennpunkte sind, deren Halbmesser aber die Entfernung des Punktes 1 von dem zweiten Hyperbelscheitel *B* ist. Diese so erhaltenen vier Schnittpunkte der Kreise ergeben vier Hyperbelpunkte. Durch die Wahl verschiedener Punkte auf der Verlängerung der grossen Achse der Hyperbel, ausserhalb der beiden Brennpunkte, ergiebt die erforderliche Anzahl von Hyperbelpunkte, und durch deren folgerichtige Verbindung man die Hyperbel erhält.

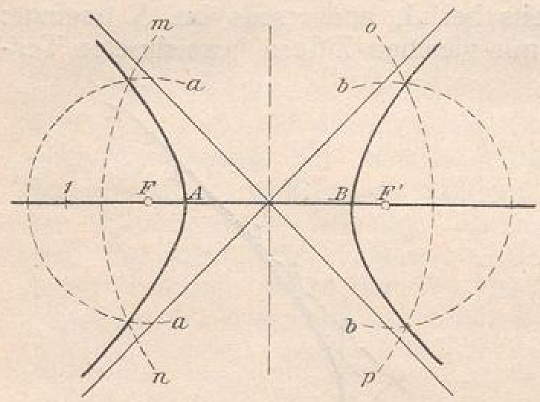

Fig. 29.

b) Der Cylinder.

Dreht sich eine von zwei parallelen Geraden so um die andere, dass jeder Punkt der sich drehenden Geraden einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in der festen Geraden liegt, so wird dadurch eine Cylinderfläche gebildet, während der von derselben umschlossene, nach zwei Seiten hin unbegrenzte Raum ein cylindrischer Raum genannt wird. Die feste Gerade heisst die Achse des cylindrischen Raumes, die sich drehende Gerade aber heisst Erzeugende.

Aus dieser Erklärung der Entstehung einer Cylinderfläche folgt ohne weiteres, dass jeder Schnitt der Cylinderfläche mit einer Ebene winkelrecht zur Cylinderachse eine Kreislinie sein mnss.

Alle Schnitte der Cylinderfläche mit Ebenen winkelrecht zur Cylinderachse sind untereinander deckungs gleiche Kreise.

Wird eine cylindrische Fläche durch zwei untereinander parallele Ebenen begrenzt, so heisst der so allseitig begrenzte Körper ein Cylinder; die beiden ebenen Schnittflächen heissen die Grundflächen, derjenige Teil der Cylinderfläche aber, welcher zwischen den beiden parallelen Schnittflächen liegt, heisst der Mantel des Cylinders. Die beiden Grundflächen und der Mantel des Cylinders zusammen bilden die Oberfläche desselben.

Unter der Höhe des Cylinders versteht man den Abstand der beiden parallelen Grundflächen.

Stehen die beiden Grundflächen zur Cylinderachse winkelrecht, so nennt man den Cylinder einen geraden, zum Unterschiede von einem schiefen Cylinder, dessen Grundflächen gegen die Cylinderachse geneigt sind. Bei einem geraden Cylinder ist die Höhe desselben ebenso gross wie dessen Achse, bei einem schiefen Cylinder aber ist die Höhe kleiner als die Cylinderachse.

Ebenso wie der Kegel als eine Pyramide mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, ebenso kann auch jeder Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden.

Jeder Schnitt eines Cylinders mit einer Ebene, welche durch die Achse geht, ist ein Parallelogramm, und zwar stimmen dieselben in einem Paare der parallelen Seiten überein. Ist der Cylinder ein gerader, so ist jeder Achsenschnitt ein rechtwinkliges Parallelogramm; ist aber der Cylinder ein schiefer, so ist jeder Achsenschnitt ein schiefwinkliges Parallelogramm.

Jeder Schnitt eines Cylinders mit einer Ebene, parallel zur Cylinderachse, ist ein Parallelogramm und zwar ist dasselbe um so breiter, je kleiner die Entfernung der Schnittebene von der Cylinderachse ist.

Wird ein Cylinder durch eine Ebene geschnitten, welche geneigt zur Cylinderachse steht, so entsteht eine Ellipse.

c) Die Kugel.

Wird ein Halbkreis um seinen Durchmesser so gedreht, dass jeder Punkt der Kreislinie einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in dem feststehenden Kreisdurchmesser liegt, so entsteht eine Kugelfläche; derjenige Körper, der von einer Kugelfläche begrenzt wird, heisst eine Kugel.

Jeder Punkt der Kugeloberfläche ist von dem Mittelpunkte des erzeugenden Kreises gleichweit entfernt, weshalb derselbe auch Mittelpunkt der Kugel heisst. Die Verbindungslinie eines Punktes der Kugeloberfläche mit dem Mittelpunkte derselben heisst Halbmesser; jede gerade Verbindungslinie zweier Punkte der Kugeloberfläche, welche durch den Kugelmittelpunkt geht, heisst Durchmesser; die Endpunkte des Durchmessers heissen Gegenpunkte.

Alle Halbmesser einer Kugel sind untereinander gleich.

Jeder Durchmesser einer Kugel ist doppelt so gross wie ein Halbmesser derselben.

Alle Durchmesser einer Kugel sind untereinander gleich.

Der geometrische Ort aller Punkte im Raume, welche von einem Punkte gleichen Abstand haben, ist die Oberfläche jener Kugel, deren Mittelpunkt der gegebene Punkt ist und deren Halbmesser gleich dem gegebenen Abstande ist.

Ein Punkt liegt ausserhalb, auf oder innerhalb der Oberfläche einer Kugel, je nachdem seine Entfernung grösser, gleich oder kleiner als der Kugelhalbmesser ist.

Jeder Schnitt einer Kugel mit einer Ebene ist ein Kreis.

Eine beliebige Ebene schneide die Kugeloberfläche nach der krummen Linie ABC (Fig. 30). Fällt man von dem Kugelmittelpunkte M auf die Schnittebene eine Winkelrechte MN, so muss diese (vergleiche Seite 4) mit jeder durch den Fusspunkt N in der Ebene gezogenen Geraden einen rechten Winkel einschliessen. Verbindet man dann zwei beliebige Punkte A und C der Schnittlinie mit dem Kugelmittelpunkte M und dem Fusspunkte N der Winkelrechten MN, so entstehen zwei deckungsgleiche Dreiecke MNA und MNC, da dieselben in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren Seite übereinstimmen ($MN = MN$; $MA = MC$; $\sphericalangle MNA = \sphericalangle MNC = 90^0$), woraus die Geichheit der dritten Seiten $NA = NC$ folgt. Daraus folgt, dass jeder Punkt der Schnittlinie ABC von einem Punkte N den gleichen Abstand hat, also die Schnittlinie ein Kreis sein muss, welcher Kugelkreis genannt wird.

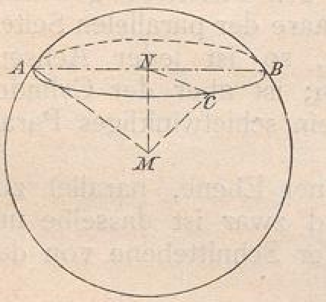

Fig. 30.

Dieser Lehrsatz folgt auch unmittelbar aus der Erzeugung einer Kugel durch Umdrehung in Bezug auf eine zur Drehungsachse winkelrechte Ebene; da man aber jeden beliebigen Kugeldurchmesser als Drehungsachse ansehen kann, so muss jeder ebene Schnitt mit einer Kugel ein Kreis sein.

Infolge der Gleichheit der Erzeugung eines Kreises und einer Kugel lassen sich alle für die Sehnen eines Kreises geltenden Lehrsätze (vergleiche: Hoch, Ebene Geometrie Seite 25) folgerichtig für die Kugel erweitern uud anwenden, so dass man erhält:

1. Gleiche Kugelkreise haben gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte und umgekehrt.

2. Ungleiche Kugelkreise haben ungleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte, und zwar sind die Kugelkreise um so grösser, je kleiner ihre Entfernung vom Kugelmittelpunkte ist und umgekehrt.

3. Diejenigen Kugelkreise, welche durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, sind die grössten aller möglichen Schnittkreise und heissen daher grösste Kugelkreise.

4. Jede Ebene, welche im Endpunkte eines Kugelhalbmessers auf diesem winkelrecht steht, heisst eine Berührungsebene der Kugel, woraus auch umgekehrt folgt, dass der Halbmesser im Berührungspunkte einer Berührungsebene winkelrecht zu dieser steht.

5. Durch einen Punkt einer Kugel lässt sich nur eine einzige Berührungsebene zeichnen.

6. Durch einen Punkt ausserhalb einer Kugel lassen sich unzählig viele Berührungsebenen an dieselbe zeichnen, deren Berührungspunkte alle in dem Umfange eines Kugelkreises liegen.

7. Durch eine Gerade ausserhalb einer Kugel lassen sich an dieselbe nur zwei Berührungsebenen legen.

Jede Ebene, welche eine Kugel schneidet, teilt dieselbe in zwei Teile, welche Kugelabschnitte oder Kugelhauben (Kugelsegmente) genannt werden; der gemeinschaftliche Schnittkreis heisst die Grundfläche jedes Kugelabschnittes, der zu jedem Abschnitt gehörige Teil der Körperoberfläche aber der Mantel des Kugelabschnittes. Der zwischen der Oberfläche der Kugel und der Grundfläche liegende Teil desjenigen Durchmessers, welcher winkelrecht zur Grundfläche steht, heisst die Höhe des Kugelhaube.

Derjenige Teil einer Kugel, welcher begrenzt wird von einem Kugelabschnitt und einem Kegel, dessen Grundfläche mit derjenigen des Abschnittes übereinstimmt, und dessen Spitze im Kugelmittelpunkte liegt, heisst ein Kugelausschnitt.

Der Kugelabschnitt entsteht durch Umdrehung eines Kreisabschnittes um die Mittelwinkelrechte der Sehne, der Kugelausschnitt entsteht durch Umdrehung eines Kreisausschnittes um die Halbierungslinie des Centriwinkels.

Derjenige Teil einer Kugel, welcher von zwei parallelen Kugelkreisen begrenzt wird, heisst eine Kugelzone.

Kugeln mit demselben Mittelpunkt heissen konzentrisch.

Kugeln mit verschiedenem Mittelpunkt heissen exzentrisch.

Die Lage zweier Kugeln (vergleiche Hoch, Ebene Geometrie Seite 32) ist abhängig von der Entfernung ihrer Mittelpunkte voneinander und der Grösse ihrer Halbmesser und zwar können folgende Fälle unterschieden werden:

1. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte grösser als die Summe der Halbmesser, so liegen beide Kugeln ganz ausserhalb einander und haben keinen Punkt miteinander gemeinschaftlich.

2. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte ebenso gross wie die Summe der Halbmesser, so berühren die beiden Kugeln einander ausschliessend und haben eine gemeinschaftliche Berührungsebene, welche winkelrecht auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte steht.

3. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte kleiner als die Summe der beiden Halbmesser und grösser als der Unterschied der beiden Halbmesser, so schneiden die beiden Kugeln einander und haben einen Kugelkreis gemeinschaftlich, dessen Ebene winkelrecht zur Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte steht.

4. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte ebenso gross wie der Unterschied der beiden Halbmesser, so berühren die beiden Kugeln einander einschliessend und haben ebenfalls eine gemeinschaftliche Berührungsebene, welcher winkelrecht auf der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte steht.

5. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte kleiner als der Unterschied der beiden Halbmesser, so liegt die kleinere Kugel ganz innerhalb der grösseren, ohne dass beide Oberflächen auch nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich haben.

6. Ist endlich die Entfernung der Kugelmittelpunkte gleich Null, so heissen die Kugeln konzentrisch.

D. Die Berechnung der Körper.

Bei der Berechnung oder Ausmessung der Körper handelt es sich hauptsächlich um die Bestimmung der Oberfläche und des Rauminhaltes desselben.

Die Oberfäche eines Körpers setzt sich aus einer oder mehreren, teils ebenen, teils krummen Flächen zusammen. Der Flächeninhalt sämtlicher Begrenzungsflächen zusammen genommen ergiebt die Oberfläche des Körpers, die häufig aus den beiden Hauptteilen Mantel und Grundfläche zusammengesetzt ist.

Um den Rauminhalt eines Körpers zu bestimmen, vergleicht man denselben mit einem Würfel, dessen Kante ebenso gross ist wie die Längeneinheit. Die Einheit für die Raummessung ist das Kubik- oder Raummeter, d. i. ein Würfel, dessen Seitenkante ein Meter lang ist. Ein Raummeter hat 1000 Raum- oder Kubikdezimeter; ein Kubikdezimeter hat 1000 Kubikzentimeter; ein Kubikzentimeter hat 1000 Kubikmillimeter.

Nur der Rauminhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedes kann durch unmittelbare Vergleichung mit dem Rauminhalte eines Würfels gefunden werden, da nur ein rechtwinkeliges Parallelepiped sich durch entsprechende Schnitte in Würfel zerlegen lässt.