Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

D. Die Berechnung der Körper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

1. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte grösser als die Summe der Halbmesser, so liegen beide Kugeln ganz ausserhalb einander und haben keinen Punkt miteinander gemeinschaftlich.

2. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte ebenso gross wie die Summe der Halbmesser, so berühren die beiden Kugeln einander ausschliessend und haben eine gemeinschaftliche Berührungsebene, welche winkelrecht auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte steht.

3. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte kleiner als die Summe der beiden Halbmesser und grösser als der Unterschied der beiden Halbmesser, so schneiden die beiden Kugeln einander und haben einen Kugelkreis gemeinschaftlich, dessen Ebene winkelrecht zur Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte steht.

4. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte ebenso gross wie der Unterschied der beiden Halbmesser, so berühren die beiden Kugeln einander einschliessend und haben ebenfalls eine gemeinschaftliche Berührungsebene, welcher winkelrecht auf der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte steht.

5. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte kleiner als der Unterschied der beiden Halbmesser, so liegt die kleinere Kugel ganz innerhalb der grösseren, ohne dass beide Oberflächen auch nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich haben.

6. Ist endlich die Entfernung der Kugelmittelpunkte gleich Null, so heissen die Kugeln konzentrisch.

D. Die Berechnung der Körper.

Bei der Berechnung oder Ausmessung der Körper handelt es sich hauptsächlich um die Bestimmung der Oberfläche und des Rauminhaltes desselben.

Die Oberfäche eines Körpers setzt sich aus einer oder mehreren, teils ebenen, teils krummen Flächen zusammen. Der Flächeninhalt sämtlicher Begrenzungsflächen zusammen genommen ergiebt die Oberfläche des Körpers, die häufig aus den beiden Hauptteilen Mantel und Grundfläche zusammengesetzt ist.

Um den Rauminhalt eines Körpers zu bestimmen, vergleicht man denselben mit einem Würfel, dessen Kante ebenso gross ist wie die Längeneinheit. Die Einheit für die Raummessung ist das Kubik- oder Raummeter, d. i. ein Würfel, dessen Seitenkante ein Meter lang ist. Ein Raummeter hat 1000 Raum- oder Kubikdezimeter; ein Kubikdezimeter hat 1000 Kubikzentimeter; ein Kubikzentimeter hat 1000 Kubikmillimeter.

Nur der Rauminhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedes kann durch unmittelbare Vergleichung mit dem Rauminhalte eines Würfels gefunden werden, da nur ein rechtwinkeliges Parallelepiped sich durch entsprechende Schnitte in Würfel zerlegen lässt.

1. Die eckigen Körper.

a) Das Prisma.

Die Oberfläche eines Prismas setzt sich zusammen aus der Mantelfläche und den beiden Grundflächen.

Die Mantelfläche eines Prismas besteht aus so vielen Parallelogrammen als das Prisma Seiten hat. Ist das Prisma ein gerades Prisma, so sind die sämtlichen Seitenflächen Rechtecke mit übereinstimmender Höhe, weshalb man dann die Mantelfläche erhält, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe oder der Seitenkante multipliziert.

Ein schief abgeschnittenes Prisma nennt man jenen prismatischen Raum, der durch zwei nicht parallele Grundflächen begrenzt wird. Die Seitenflächen eines solchen schief abgeschnittenen Prismas sind immer Trapeze, welche einzeln berechnet werden müssen, wenn man die Mantelfläche dieses Körpers bestimmen will.

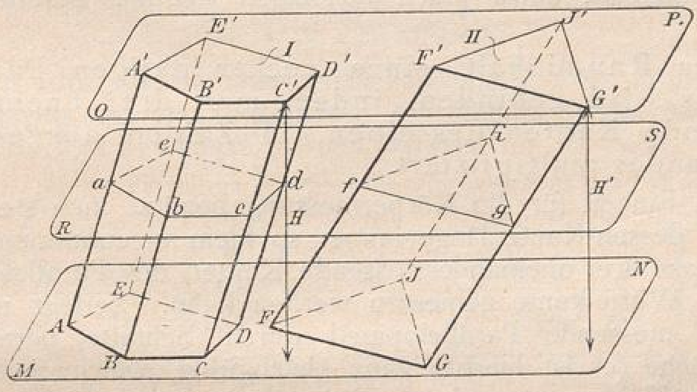

Fig. 31.

Die Oberfläche eines schief abgeschnittenen Prismas setzt sich auch zusammen aus der Mantelfläche und den beiden Grundflächen, nur sind diese beiden nicht gleich, sondern sowohl der Grösse als auch nach der Gestalt verschieden.

Der Rauminhalt zweier Prismen mit gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich (Cavalieri'sches Prinzip).

Sind die Grundflächen $ABCDE$ und FGI der beiden Prismen I und II (Fig. 31) gleich, und haben dieselben ausserdem gleiche Höhen H und H^1, so kann man diese beiden Körper so zwischen zwei parallele Ebenen MN und OP so legen, dass ihre Grundflächen in diese Ebenen hineinfallen. Schneidet man nun beide Prismen durch eine Ebene RS parallel zu der Grundrissebene MN, so ist der so entstehende Schnitt $abcde$ in dem Prisma I mit der Grundfläche $ABCDE$ deckungsgleich (vergleiche Seite 20); ebenso ist der entstehende Schnitt fgi in dem Prisma II mit der Grundfläche FGI deckungsgleich; da aber die beiden Grundflächen $ABCDE$ und FGI inhaltsgleich sind, so müssen auch die Schnittfiguren $abcde$ und fgi mit der Ebene RS inhaltsgleich sein. Da für jede beliebige, zur Grundfläche parallele Ebene die Gleichheit der Schnittfiguren folgt, so kann man diese beiden Prismen auch durch zwei Ebenen schneiden, deren Abstand voneinander so klein ist, dass man von der Dicke der so entstehenden Schichte absehen, und diese Schichten gewissermassen als ebene Figuren betrachten kann. Sind aber alle Schichten, welche durch Schnitte mit solchen parallelen Ebenen entstanden sind, untereinander inhaltsgleich, so müssen auch die ganzen Prismen inhaltsgleich sein, welche sich aus einer gleichen Anzahl inhaltsgleicher Schichten zusammensetzen.

Demnach ist es nur nötig, festzustellen, auf welche Weise man den Rauminhalt eines einzigen Prismas bestimmt, um dann den Rauminhalt eines jeden beliebigen Prismas bestimmen zu können.

Der Rauminhalt eines rechtwinkligen Parallelopipedes wird gefunden, indem man drei aneinanderstossende Kanten desselben, in Zahlen ausgedrückt, miteinander multipliziert.

Als Einheit für die Körpermessung benützt man stets einen Würfel, dessen Kantenlänge immer so klein angenommen werden kann, dass drei aneinanderstossende Kanten des Parallelopipedes mit der Würfelkante gemessen werden kann. Zerlegt man nun das zu messende Parallelopiped durch Schnitte parallel zur Grundfläche (es ist hierbei ganz gleichgültig, welche Seitenfläche als Grundfläche angesehen wird, doch muss eine zunächst angenommen werden, wodurch dann die dritte Seitenkante gleich der Höhe wird) in ebenso vielfache Scheiben von der Länge der Würfelkante, als die Würfelkante in der Höhe als dritte Seite des Parallelopiped aus enthalten ist, so sind diese Scheiben nach dem Cavalierischen Prinzipe untereinander inhaltsgleich. Jede dieser Scheiben zerlegt man nun zunächst in so viele parallelopipedische Stäbe, deren Grundfläche gleich einer Würfelfläche ist und deren Höhe gleich der dritten Kante des Parallelopipedons ist; die Anzahl dieser Stäbe ist so gross wie die Grösse der Würfelkante in der zweiten Kante des Parallelopipedas enthalten ist. Auch diese parallelopipedischen Stäbe sind untereinander inhaltsgleich. Jeden prismatischen Stab kann man nun endlich in so viel Würfel zerlegen, als die Würfelkante in der dritten Kante des ursprünglichen Parallelopipedes enthalten ist. Die Würfelkante ist nach der Voraussetzung gleich der Längeneinheit, folglich enthält das Parallelopiped so viel prismatische Stäbe als das Produkt der ersten und zweiten Kante des Parallopipedes angiebt, selbstverständlich beide gemessen mit der Würfelkante als Einheit. Die Anzahl der Einheitswürfel ergiebt sich demnach, wenn man die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten des Parallelopipedes, gemessen mit der Würfelkante, in Zahlen ausgedrückt miteinander multipliziert.

Der Inhalt eines Würfels ist gleich der dritten Potenz (Kubus) seiner Kante.

Der Rauminhalt eines jeden Prismas ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe, wobei jedoch beiden Messungen dieselbe Masseinheit zu Grunde gelegt werden muss.

Da man (vergleiche Seite 37) jedes Prisma in ein rechtwinkliges Parallelopiped mit übereinstimmender Grundseite und Höhe verwandeln kann, und da der Inhalt des Parallelopipedes sich aus dem Produkte aus Grundfläche und Höhe ergiebt, so muss jedes Prisma, gleichgültig, ob es gerade oder schief ist, auf genau die gleiche Weise berechnet werden.

b) Die Pyramide.

Die Oberfläche einer jeden Pyramide setzt sich aus der Mantelfläche und der Grundfläche zusammen, welche einzeln als ebene Flächen berechnet werden müssen.

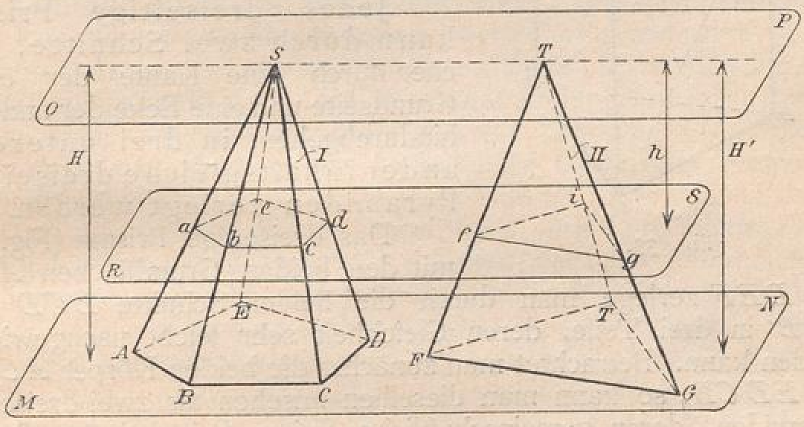

Fig. 32.

Die Mantelfläche einer jeden Pyramide setzt sich aus soviel Dreiecken zusammen, wie die Pyramidengrundfläche Seiten hat. Die Mantelfläche einer geraden regelmässigen Pyramide ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und der Seitenhöhe. Unter der Seitenhöhe versteht man die Höhe eines der untereinander deckungsgleichen Seitendreiecke.

Pyramiden mit gleichen Grundflächen und Höhen sind inhaltsgleich.

Sind die Grundflächen $ABCDE$ und FGI der beiden Pyramiden I und II (Fig. 32) gleich, und haben dieselben gleiche

Höhen H und H^1, so lassen sie sich so auf eine Ebene MN stellen, dass ihre Spitzen S und T in einer zu MN parallelen Ebene OP liegen, deren Abstand von der ersten Ebene gleich der Höhe der Pyramide ist. Schneidet man nun beide Pyramiden durch eine zu der Ebene MN parallele Ebene RQ, deren Abstand von der Ebene OP oder von den Spitzen der Pyramiden h ist, so ergiebt sich (vergleiche Seite 19) für diese so erhaltenen Schnittflächen $abcde$ und fgi folgendes:

$$\begin{array}{l} ABCDE : abcde = H^2 : h^2 \\ \underline{\quad FGI : fgi \quad = H^2 : h^2} \\ ABCDE : abcde = FGI : fgi \\ \underline{\quad ABCDE = FGI \text{ (nach der Vorauss.).}} \\ \quad abcde = fgi \end{array}$$

Dies gilt aber für jeden beliebigen Schnitt mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene, mithin muss nach dem Cavalierischen Prinzipe, (vergleiche Seite 37) welches für jeden Körper Gültigkeit hat, der Rauminhalt zweier Pyramiden mit übereinstimmenden Grundflächen und Höhen gleich sein.

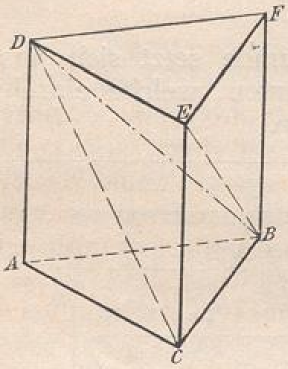

Fig. 33.

Jedes dreiseitige Prisma kann durch zwei Schnitte, welche durch eine Kante der einen Grundseite und eine Ecke der anderen hindurchgehen, in drei untereinander inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden.

Das dreiseitige Prisma (Fig. 33) mit den beiden Grundflächen ABC und DEF zerlege man durch die beiden Schnitte BCD und DEB in drei Teile, deren Gleichheit sehr leicht nachgewiesen werden kann. Betrachtet man zunächst die beiden Körper $ACDB$ und $EDCB$, so kann man dieselben ansehen als zwei dreiseitige Pyramiden, deren gemeinschaftliche Spitze B ist, deren Grundflächen ADC und DCE aber in in der einen Begrenzungsfläche $ADEC$ des gegebenen Prismas liegen; mithin haben diese beiden Pyramiden dieselbe Höhe, als Winkelrechte von der Spitze B auf die gemeinschaftliche Grundflächenebene $ADEC$; die beiden Grundflächen ADC und ECD sind aber auch inhaltsgleich, da es die beiden Teildreiecke sind, in welche das Parallelogramm $ADEC$ durch die Diagonale DC geteilt wird, mithin sind diese beiden dreiseitigen Pyramiden (Grundfläche ADC, Spitze in B und Grundfläche DEC, Spitze in B) inhaltsgleich. Vergleicht man nun die beiden Körper $CBED$ und $FEBD$ miteinander, so können dieselben auch als zwei dreiseitige Pyramiden mit ge meinschaftlicher Spitze in D angesehen werden, deren Grundflächen CEB und FBE aber in der Seitenfläche $EFBC$ des gegebenen dreiseitigen Prismas liegen; mithin haben diese beiden dreiseitigen Pyramiden eine gemeinschaftliche Höhe, als Winkelrechte von der Spitze D auf die Grundfläche $EFBC$. Die beiden Grundflächen EBC und BEF aber sind ebenfalls als Teildreiecke des Parallelogramms $CBFE$, bewirkt durch die Diagonale BE inhaltsgleich, woraus auch die Inhaltsgleichheit der beiden Körper $CBED$ und $EFBD$ folgt. Da aber die drei Körper $ABCD$ $CBED$ und $DEFB$ untereinander gleich sind, zusammen aber das gegebene dreiseitige Prisma $ABCDEF$ ausmachen, so muss jeder der drei Körper, infolge seiner Inhaltsgleichheit mit den andern beiden, gleich dem dritten Teil des Rauminhaltes des gegebenen Prismas sein.

Der Rauminhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teile aus dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Da immer zwei Pyramiden mit übereinstimmenden Grundflächen und Höhen denselben Rauminhalt haben, so ist es nur nötig, den Rauminhalt einer einzigen Pyramide durch Rechnung festzustellen, um dann im stande zu sein, jede beliebige Pyramide zu berechnen. Nach den oben bewiesenen Lehrsätzen kann man jede dreiseitige Pyramide zu einem dreiseitigen Prisma mit übereinstimmender Grundseite und Höhe ergänzen, dessen Rauminhalt dreimal so gross ist, wie der Rauminhalt der Pyramide selbst. Mithin erhält man den Rauminhalt einer dreiseitigen Pyramide, indem man das Produkt aus Grundfläche und Höhe derselben durch drei dividiert.

Auf die gleiche Weise muss man aber den Rauminhalt einer jeden beliebigen Pyramide erhalten, da zwei solche Körper mit übereinstimmenden Grundflächen und Höhen inhaltsgleich sind, mithin jede in eine dreiseitige Pyramide mit gleicher Grundfläche und übereinstimmender Höhe verwandelt werden kann.

Ein schiefabgeschnittenes, dreiseitiges Prisma ist dem Rauminhalte nach ebenso gross, wie drei Pyramiden mit derselben Grundfläche wie das dreiseitige Prisma und einer Höhe, welche den drei Seitenkanten des Prismas entspricht, wobei vorausgesetzt ist, dass die Seitenkanten des Prismas winkelrecht zur Grundfläche stehen.

Zunächst zerlege man das dreiseitige Prisma (Fig. 34) durch zwei Schnitte in drei dreiseitige Pyramiden, indem man einerseits durch A, E und C eine Ebene legt, und durch D, E und C die zweite Ebene legt, wodurch die drei dreiseitigen Pyramiden $ABCE$, $ADEC$ und $DEFC$ entstehen. Von diesen drei Pyramiden hat die eine $ABCE$, wie aus der Figur ohne weiteres zu ersehen ist, die Grundfläche ABC und in E die Spitze, folglich hat sie die eine Seitenkante BE zur Höhe. Wird die zweite Pyramide $ADEC$ mit einer Pyramide $BACD$ verglichen, welche dadurch entsteht, dass durch die drei Punkte B, C und D eine Ebene gelegt wird, so ergiebt sich deren Inhaltsgleichheit, da dieselben in der Grundfläche ACD übereinstimmen, die beiden Spitzen E und B aber in einer zu der Grundfläche parallelen Geraden EB liegen, mithin auch gleiche Höhe haben; die zweite Teilpyramide $EACD$ ist demnach ebenso gross wie eine Pyramide $ABCD$ mit der Grundfläche ABC und der Höhe AD. Die dritte Teilpyramide $ECDF$ endlich wird mit einer anderen dreiseitigen Pyramide verglichen, welche dadurch entsteht, dass man durch die drei Punkte B, A und F eine Ebene legt; die beiden Dreiecke ECF und BCF sind infolge ihrer Übereinstimmung in der Grundseite FC und der Höhe, als Abstand der beiden Parallelen BE und FC, inhaltsgleich, mithin haben die beiden Pyramiden $ECDF$ und $ABCF$ übereinstimmende Grundflächen, wenn man die eben genannten Dreiecke als solche ansieht. Die gegenüberliegenden Spitzen A und D liegen aber in einer zu der Fläche $BCFE$, parallelen Geraden AD, mithin haben die beiden Pyramiden $ECDF$ und $ABCF$ auch übereinstimmende Höhen, als Abstand der Geraden AD von der Ebene $BCFE$, woraus die Inhaltsgleichheit dieser Pyramide folgt. Demnach setzt sich das schiefabgeschnittene Prisma wirklich aus drei Pyramiden zusammen, welche die Grundfläche ABC gemeinschaftlich haben und deren Spitzen in den Eckpunkten D, E und F der oberen Grundfläche liegen, mithin die drei Seitenkanten AD, BE und CF zu Höhen haben.

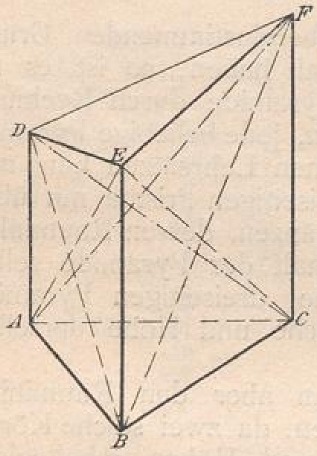

Fig. 34.

c) Der Pyramidenstumpf.

Die Mantelfläche eines Pyramidenstumpfes setzt sich aus so vielen Trapezen zusammen, wie der Stumpf Seiten hat. Ist der Pyramidenstumpf ein regelmässiger, so sind die einzelnen Seitenflächen untereinander gleich, und man hat nur nötig, den Flächeninhalt einer Seitenfläche (Trapez) mit der Anzahl der Seiten zu multiplizieren. Unter Berücksichtigung des Lehrsatzes für die Mittellinie eines Trapezes (vergl. Hoch, Ebene Geometrie Seite 52) ergiebt sich folgende Regel:

Die Mantelfläche eines geraden regelmässigen Pyramidenstumpfes ist gleich dem Produkte aus dem

Umfange des mittleren Schnittes und der Seitenhöhe des Stumpfes.

Der Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes ist gleich der Summe des Rauminhalts dreier Pyramiden von der Höhe des Stumpfes, an denen die erste die grosse Grundfläche, die zweite die kleine Grundfläche und die dritte die mittlere geometrische Proporzionale aus beiden Grundflächen zur Grundfläche hat.

Man ergänze zunächst den gegebenen Pyramidenstumpf (Fig. 35) zu einer ganzen Pyramide, deren Höhe H sich zusammensetzt aus der Höhe h des Stumpfes und der Höhe x der Ergänzungspyramide; diese Höhe x der Ergänzungspyramide muss zunächst aus den bekannten Grössen, den beiden Grundflächen $ABCD = G$ und $EFIK = g$, sowie der Höhe h des Stumpfes berechnet werden, indem man berücksichtigt, dass bei jeder Pyramide parallele Schnitte sich verhalten wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze (vergl. Seite 19).

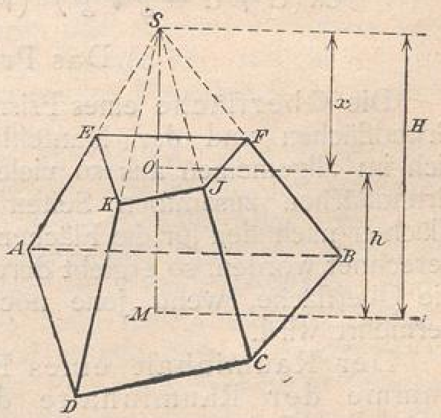

Fig. 35.

$$G : g = (h + x)^2 : x^2$$

$$G : g = H^2 : x^2$$

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = (h + x) : x$$

$$(\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g} = (h + x - x) : x \text{ (vgl. Hoch, Ebene Geom. S. 55).}$$

$$x = \frac{h \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

Der Rauminhalt des Pyramidenstumpfes ergiebt sich, wenn man von dem Rauminhalt der ganzen Pyramide, denjenigen der Ergänzungspyramide abzieht, mithin:

$$I_{St} = I_P - I_E$$

$$= \frac{G \cdot H}{3} - \frac{g \cdot x}{3}$$

$$= \frac{G}{3} \cdot (h + x) - \frac{g}{3} \cdot x$$

$$= \frac{G}{3}\left(h + \frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{h \sqrt{g}}\right) - \frac{g}{3} \cdot \frac{h \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$= \frac{G}{3} \cdot \frac{h \cdot \sqrt{G} - h\sqrt{g} + h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} - \frac{g}{3} \cdot \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$= \frac{h}{3} \cdot \frac{G \cdot \sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$= \frac{h}{3} \cdot (G + \sqrt{Gg} + g)$$

da $(G\sqrt{G} - g\sqrt{g}) : (\sqrt{G} - \sqrt{g}) = G + \sqrt{Gg} + g$ ist.

b) Das Prismatoid.

Die Oberfläche eines Prismatoides besteht aus den beiden Grundflächen und der Mantelfläche; die Mantelfläche setzt sich im allgemeinen aus so vielen Dreiecken zusammen als beide Grundflächen zusammen Seiten haben. Sind diese sämtlichen Flächen nach den für die Flächenrechnung gültigen Regeln einzeln berechnet worden, so ergiebt deren Summe die Mantelfläche, bezw. die Oberfläche, wenn jene noch um die beiden Grundflächen vermehrt wird.

Der Rauminhalt eines Prismatoides ist gleich der Summe der Rauminhalte dreier Pyramiden von der Höhe des Prismatoides, von denen die erste das arithmetische Mittel aus beiden Grundflächen, jede der beiden anderen aber die mittlere Durchschnittsfläche des Prismatoides zur Grundfläche hat.

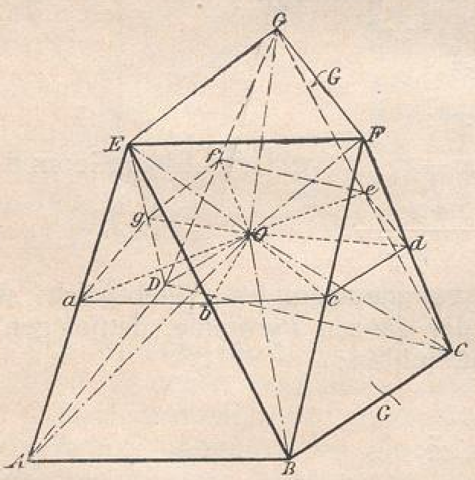

Fig. 36.

Von den beiden Grundflächen des Prismatoides habe die eine drei und die andere vier Kanten, (Fig. 36) so dass die mittlere Durchschnittsfläche M ein Siebeneck ist; die beiden Grundflächen bezeichne man der Einfachheit wegen mit G und g, die Höhe des Prismatoides aber mit h. Um den Inhalt des Prismatoides zu berechnen, wähle man in der mittleren Durchschnittsfläche einen beliebigen Punkt O, der mit sämtlichen Eckpunkten der beiden Grundflächen verbunden wird, um dann durch jede Grundflächen-Kante und den angenommenen Punkt O Ebenen zu legen, wodurch zunächst zwei Pyramiden entstehen, deren Grundflächen die Grundflächen des

Prismatoides sind, und deren Höhe gleich der halben Höhe des Prismatoides ist. Die Inhalte i und i_1 dieser beiden Pyramiden können nach dem obigen (vergleiche Seite 41) berechnet werden

$$i = \frac{G}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{G \cdot h}{6}$$

$$i_1 = \frac{g}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{g \cdot h}{6}.$$

Legt man nun noch durch je eine Seitenkante des Prismatoides und je eine Seitenkante der oberen und unteren Pyramide eine Ebene, so entstehen 7 dreiseitige Pyramiden, welche mit den beiden anderen Pramiden zusammen den Rauminhalt des Prismatoides ergeben.

Jede dieser 7 dreiseitigen Pyramiden wird durch den mittleren Schnitt in zwei Teile zerlegt, von denen der eine viermal so gross ist als der andere; denn berücksichtigt man z. B. die Pyramide $ABEO$, und betrachtet zunächst ABE als Grundfläche und O als Spitze, so wird die Grundfläche durch den mittleren Schnitt ab in zwei Teile $ABba$ und abE so geteilt, dass der erste Teil dreimal so gross ist wie der zweite Teil; mithin muss auch diejenige Pyramide, welche $ABba$ zur Grundfläche und O als Spitze hat, dreimal so gross sein wie diejenige Pyramide, die abE als Grundfläche und O als Spitze hat, oder aber die ganze Pyramide $ABEO$ (Grundfläche ABE, Spitze O) ist viermal so gross wie diejenige Pyramide $abEO$, in welcher man aber auch abO als Grundfläche und den Abstand des Punktes E von dieser Ebene als Höhe ansehen kann; dass dieser Abstand aber gleich der halben Höhe h des Prismatoides ist, ist klar, da Oab ein Teil des mittleren Schnittes ist. Führt man die gleiche Betrachtung für alle 7 dreiseitigen Pyramiden durch, so erhält man den Rauminhalt i_2, für alle zusammen das vierfache einer Pyramide, deren Grundfläche die Grösse des mittleren Schnittes ist, deren Höhe aber die halbe Höhe des Prismatoides ist, mithin

$$i_2 = 4 \cdot \frac{M}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{2\,Mh}{3}.$$

Durch Zusammenlegen der Rauminhalte i, i_1 und i_2 erhält man den Rauminhalt J des Prismatoides

$$I = i + i_1 + i_2$$

$$I = \frac{G \cdot h}{6} + \frac{gh}{6} + \frac{2\,H\,h}{3}$$

$$I = \frac{h}{3}\left(\frac{G+g}{2} + 2\,M\right).$$

Ein Keil oder Sphenisk ist jenes Prismatoid, in welchem die eine Grundfläche als gerade Linie erscheint, die man gewöhnlich Schneide nennt; setzt man daher in die obige Formel für den Inhalt eines Prismatoides für $g = 0$ ein, so erhält man die Formel für die Berechnung eines Keiles mit

$$I = \frac{h}{3}\left(\frac{G}{2} + 2\,M\right).$$

2. Die runden Körper.

a) Der Cylinder.

Da jeder Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, so werden alle für die Berechnung eines Prismas geltenden Regeln auch für den Cylinder Anwendung finden.

Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche eines geraden Cylinders mit r, die Höhe desselben aber mit h, so ergiebt sich für die Mantelfläche $M = 2\pi r h$, d. h.

der Mantel eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und Höhe.

Die Oberfläche O erhält man, wenn zu der Mantelfläche die doppelte Grundfläche $G = \pi r^2$ hinzugezählt wird, d. h.

$$O = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Der Rauminhalt I eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe oder

$$I = \pi r^2 h.$$

b) Der Kegel.

Ebenso wie der Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, ebenso kann auch ein Kegel als eine Pyramide mit unendlich kleinen Seiten angesehen werden, weshalb alle für eine Pyramide gültigen Regeln auch hier Anwendung finden können.

Für jeden geraden Kreiskegel besteht zwischen den drei Grössen: Halbmesser r der Grundfläche, Höhe h und Länge s der Seitenkante oder Erzeugenden des Kegels folgende wichtige Beziehung

$$s^2 = h^2 + r^2$$

da diese drei geraden Linien für jeden Achsenschnitt ein rechtwinkliges Dreieck bilden, bei dem der Pythagoräische Lehrsatz Anwendung findet.

Um den Mantel eines geraden Kegels zu berechnen, denke man sich denselben längs einer Erzeugenden aufgeschnitten und in eine Ebene abgerollt, dann erhält man einen Kreisausschnitt, dessen Halbmesser ebenso gross ist als die Kegelkante s, während die Länge des Kreisbogens mit dem Umfange $2\pi r$ der Grundfläche übereinstimmt. Der Flächeninhalt dieses Kreisausschnittes wird ebenso wie der Inhalt eines Dreiecks mit der Grundseite $2\pi r$ und der Höhe s berechnet,

$$M = \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \pi r s.$$

Der Mantel eines geraden Kreiskegels ist gleich dem Produkte aus Grundflächen-Halbmesser und Seite, multipliziert mit der Ludolphschen Zahl.

Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels setzt sich aus dessen Mantelfläche M und Grundfläche $G = \pi r^2$ zusammen, weshalb man erhält

$$O = \pi r s \cdot + \pi^2 = \pi r (s + r) \text{ dh.}$$

Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels ist ebenso gross wie die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels mit derselben Grundfläche, dessen Seitenkante gleich ist der um den Halbmesser der Grundfläche vermehrten Seitenkante des Kegels.

Der Rauminhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Grundfläche und Höhe; bezeichnet man daher den Halbmesser der Grundfläche mit r, die Höhe mit h so erhält man:

$$I = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}.$$

c) Der Kegelstumpf.

Auch für den Kegelstumpf gelten dieselben Regeln wie für den Pyramidenstrumpf unter Einführung der runden Grundflächen.

Bezeichnet man die Halbmesser der beiden Grundflächen mit R und r, die Höhe des geraden Kegelstumpfes mit h, die Seitenkante aber mit s, so ergiebt sich für diese vier Grössen folgende wichtige Beziehung

$$s^2 = h^2 + (R - r)^2$$

denn jeder Achsenschnitt eines geraden Kegelstumpfes ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten mit den Durchmessern der beiden Grundflächen übereinstimmen, während die nicht parallelen Seiten gleich den Seitenkanten sind; fällt man von dem Endpunkt der kleineren parallelen Seite in diesem gleichschenkligen Trapeze eine Winkelrechte auf die grössere parallele Seite, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Seitenkante des Kegelstumpfes, dessen eine Kathete die Höhe desselben und dessen zweite Kathete der Unterschied $R - r$ der beiden Grundflächenhalbmesser ist, woraus sich unter Benutzung des Pythagoräischen Lehrsatzes obige Beziehung ergiebt.

Um die Mantelfläche eines geraden kreisförmigen Kegelstumpfes mit den Grundflächen-Halbmessern R und r und der Seitenkante s zu bestimmen, denke man sich den Kegelstumpf nach einer Seite aufgeschnitten und in eine Ebene ausgerollt, wodurch man einen Teil eines Kreisringes oder ein Bogentrapez erhält, für welches der Abstand ber beiden Kreisbogen mit der Seitenkante des Kegelstumpfes übereinstimmt und die beiden Kreisbogen ebenso gross sind, wie die Umfänge der beiden Grundflächen. Der Flächeninhalt des Bogentrapezes wird ebenso berechnet, wie der Flächeninhalt eines geradlinigen Trapezes, weshalb man erhält

$$M = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} s = \pi (R + r) s$$

d. h. der Mantel eines Kegelstumpfes ist gleich dem Produkte aus der Summe der beiden Grundflächenhalbmesser und der Seite des Stumpfes multipliziert mit der Ludolphschen Zahl.

Statt dem Produkte aus der Summe der beiden Grundflächenhalbmesser und der Ludolphschen Zahl kann man auch den Umfang des mittleren Schnittes setzen, sodass man auch folgende Regel erhält: der Mantel eines Kegelstumpfes ist gleich dem Produkte aus dem Umfange des mittleren Schnittes multipliziert mit der Seitenkante des Stumpfes.

Die Oberfläche O des Kegelstumpfes erhält man, wenn man die Mantelfläche M und die beiden Grundflächen vermehrt d. h.

$$O = \pi (R + r) s + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Setzt man die Formel den Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes, die besonderen Worte für die Grundflächen eines Kegelstumpfes ein, so erhält man den Rauminhalt I desselben wie folgt:

$$I = \frac{h}{3} (G + g = \sqrt{Gg})$$

$$I = \frac{h}{3} \left(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}\right)$$

$$I = \frac{h}{3} (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r)$$

$$I = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + R r).$$

d) Die Kugel und deren Teile.

Um die Oberfläche einer Kugel zu berechnen, denke man sich dieselbe durch Umdrehung eines regelmässigen Vieleckes um einen Durchmesser desselben entstanden. Die Oberfläche dieses so entstandenen Umdrehungskörpers wird um so mehr sich der Kugeloberfläche nähern, je grösser die Anzahl der Seiten des regelmässigen Vielecks ist, also je kleiner die Seiten selbst sind. Infolge der Umdrehung des regelmässigen Vielecks entsteht ein Umdrehungskörper, dessen Oberfläche sich aus den Mantelflächen von Kugelstumpfen zusammensetzt. Um eine Beziehung für diese Mantelflächen der Kugelstumpfe mit den Abmessungen der Kugel zu finden, greife man einen der Kugelstumpfe heraus und untersuche denselben genauer. Der halbe Achsenschnitt eines solchen Kegelstumpfes (Fig. 37) ist ein Trapez $ABED$ mit zwei rechten Winkeln. Bezeichnet man den Mantel des Kegelstumpfes, der durch Umdrehung der geraden Berührungslinie oder Vielecksseite AB gebildet wird mit m, so erhält man (vergleiche Seite 48)

$$m = 2\pi CF \cdot AB$$

wobei CF der Halbmesser des mittleren Schnittes ist. Fällt man von A auf BE die Winkelrechte AG

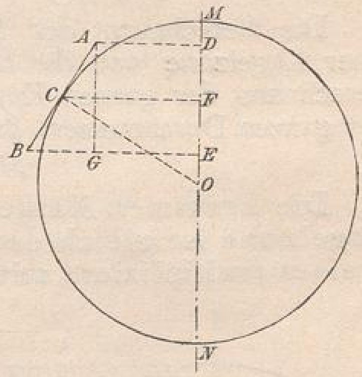

Fig. 37.

und verbindet C mit O, so entstehen zwei ähnliche Dreiecke ABG und CFO infolge der Übereinstimmung in zwei Winkeln; deshalb haben die zugehörigen Seiten dasselbe Verhältnis.

$$AB : AG = CO : CF$$
$$AB : DE = CO : CF$$
$$AB \cdot CF = CO \cdot DE$$
$$AB \cdot CF = r \cdot DE.$$

Setzt man diesen Wert in die obige Formel für den Mantel m ein, so erhält man

$$m = 2\pi r \cdot DE.$$

d. h. der Mantel eines solchen Teilkegelstumpfes ist gleich dem Umfange des grössten Kugelkreises, multipliziert mit der Projektion der Kegelstumpfseite auf die Umdrehungsachse. Wie aus der Betrachtung der Figur ohne weiteres hervorgeht hat man den Durchmesser $2r$ der Kugel für die eben erwähnte Projektion einzusetzen, wenn der Mantel m des einen Kegelstumpfes erweitert wird zu der Oberfläche O der Kugel

$$O = 2\pi r \cdot 2r \cdot = 4\pi r^2.$$

Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so gross wie der Flächeninhalt eines grössten Kugelkreises.

Um den Rauminhalt I einer Kugel zu berechnen, denke man sich dieselbe in eine sehr grossen Anzahl von Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen in der Kugeloberfläche, deren Spitzen aber im Kugelmittelpunkte liegen. Diese Pyramiden haben dann alle den Halbmesser der Kugel zur Höhe, wenn man die Teilchen der Kugeloberfläche möglichst klein gewählt hat.

Der Rauminhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teil aus dem Produkte aus Grundfläche und Höhe, weshalb man für die Berechnung des Rauminhaltes der ganzen Kugel nur die Kugeloberfläche O einzusetzen hat,

$$I = \frac{O \cdot r}{3} = \frac{4\pi r^2 \cdot r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Die Berechnung der Mantelfläche einer Kugelhaube oder einer Kugelzone von der Höhe h erfolgt ganz ähnlich wie die Berechnung der ganzen Kugeloberfläche, nur hat man an Stelle des ganzen Durchmessers der Kugel nur die Höhe h einzuführen.

$$M = 2\pi r \cdot h.$$

Die krummen Mantelstriche einer Kugelhaube oder Kugelzone ist gleich dem Umfange des grössten Kugelkreises multipliziert mit der Höhe.

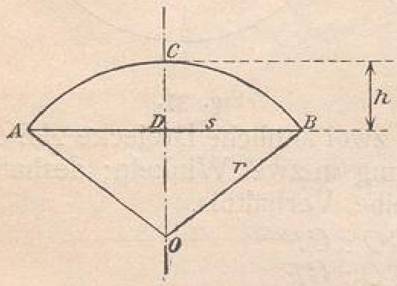

Fig. 38.

Ergänzt man eine Kugelhaube von der Höhe h durch einen Kegel (Fig. 38) dessen Grundfläche die Schnittfläche der Kugel und dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, so erhält man einen Kugelausschnitt. Bezeichnet man den Halbmesser desjenigen Kreises mit welchem die Kegel und die Kugelhaube zusammensetzen mit s, so besteht zwischen den drei Grössen r, h und s folgende Beziehung

$$s^2 + (r-h)^2 = r^2$$
$$s^2 + r^2 - 2rh + h^2 = r^2$$
$$s^2 = 2rh - h^2.$$

Soll die Oberfläche eines Kugelausschnittes berechnet werden, so muss die Mantelfläche der Kugelhaube um die Mantelfläche des Kegels mit dem Grundflächenhalbmesser s und der Seitenkante r vergrössert werden.

$$O = 2\pi rh + \pi rs = \pi r\,(2h + s).$$

Der Rauminhalt eines Kugelausschnittes ist ähnlich zu berechnen wie der Rauminhalt einer Kugel, nur hat an die Stelle der ganzen Kugeloberfläche nur die krumme Mantelfläche M der zugehörigen Kugelhaube zu treten.

$$I = M \cdot \frac{r}{3} = 2\pi r \cdot h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

Der Rauminhalt eines Kugelausschnittes ist gleich dem Flächeninhalte des grössten Kugelkreises, multipliziert mit der zweidrittelfachen Höhe der dazugehörigen Kugelhaube.

Der Rauminhalt einer Kugelhaube (Fig. 38) ergiebt sich als Unterschied der Rauminhalte eines Kugelausschnittes und des zugehörigen Kegels mit der Höhe $r-h$.

$$I = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{\pi s^2 (r-h)}{3}$$

$$s^2 = 2rh - h^2$$

$$I = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{\pi}{3}(2rh - h^2)(r-h)$$

$$I = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{\pi}{3}(2r^2 h - 3rh^2 + h^3)$$

$$I = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^2 h + \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3}$$

$$I = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3}$$

$$I = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

Der Rauminhalt einer Kugelzone (Fig. 39) von der Höhe h mit den Grundflächenhalbmessern s und s_1 herausgeschnitten aus einer Kugel mit dem Halbmesser r ergiebt sich als Unterschied zweier Kugelhauben mit den Höhen H und h mit

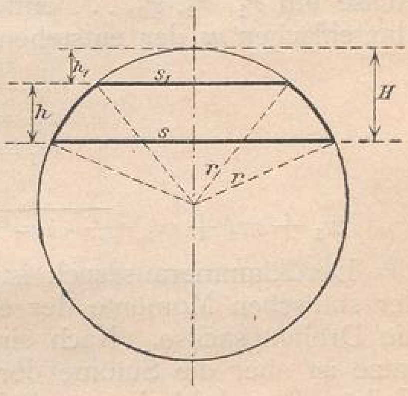

Fig. 39.

$$I = \frac{\pi H^2}{3}(3r - H) - \frac{\pi h_1^2}{3}(3r - h_1)$$

wobei zwischen den einzelnen hier in Betracht kommenden Grössen folgende Beziehungen bestehen, welche unter Berücksichtigung eines Achsenschnittes sich aus der Figur ergeben:

$$h = H - h_1$$

$$r^2 = s^2 - (r - H)^2$$

$$r^2 = s_1^2 - (r - h_1)^2$$

$$r^2 = s^2 - (r - H)^2 = s_1^2 - (r - h_1)^2$$

$$s^2 - r^2 + 2rH - H^2 = s_1^2 - r^2 + 2rh_1 - h_1^2$$

$$2r(H - h_1) = s_1^2 - s^2 + H^2 - h_1^2$$

$$H = h + h_1$$

$$2r \cdot h = s_1^2 - s \cdot {}^2 + h^2 + 2hh_1.$$

e) Die Umdrehungskörper.

Wenn auch der Cylinder, Kugel, Kugelstumpf, die Kugel und einzelne Teile derselben als Umdrehungskörper angesehen werden können, so soll hier besonders der allgemeinen Umdrehungskörper gedacht werden, um die Oberfläche und den Rauminhalt derselben zu bestimmen. Bemerkt muss jedoch werden, dass eine genaue Abteilung der Formeln hier nicht stattfinden kann, weil die nötigen Unterlagen fehlen.

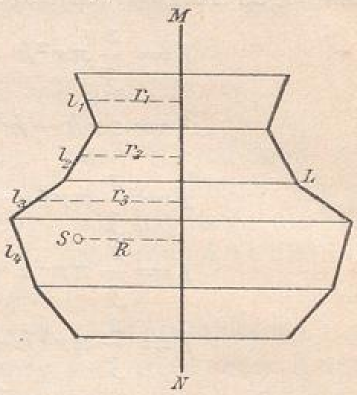

Fig. 40.

Entsteht durch Umdrehung des gebrochenen Linienzuges L, (Fig. 40) welcher aus den kleinen Teilstrecken l_1, l_2, l_3, . . . besteht um die Umdrehungsachse MN ein Körper in der Weise, dass die Mitten der einzelnen Teilstrecken von der Achse um r_1, r_2, r_3, . . . entfernt sind, so erhält man für die Mantelflächen m der entstehenden Kegelstumpfe (vergl. Seite 48)

$$m_1 = 2\pi r_1 \cdot l_1$$
$$m_2 = 2\pi r_2 \cdot l_2$$
$$m_3 = 2\pi r_3 \cdot l_3$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = 2\pi (r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + \cdots).$$

Der Klammerausdruck ist aber nichts anderes als die Summe der statischen Momente der einzelnen Teilstrecken, bezogen auf die Drehungsachse. Nach einem bekannten mechanischen Lehrsatze ist aber die Summe der statischen Momente der einzelnen Teilstrecken gleich dem statischen Moment des ganzen Linienzuges L bezogen auf dieselbe Achse, weshalb man als Umdrehungshalbmesser den Abstand R des Schwerpunktes S des ganzen Linienzuges von der Umdrehungsachse zu nehmen hat.

$$r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_2 + \cdots\cdots = LR$$
$$O = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$$
$$O = 2\pi R \cdot L.$$

Die Oberfläche eines Umdrehungskörpers ist gleich der Länge des sich drehenden Linienzuges multipliziert mit dem Umfange desjenigen Kreises den der Schwerpunkt beschreibt (I. Guldini'sche Regel.).

Um den Rauminhalt eines durch Umdrehung eines Linienzuges entstehenden Körpers zu bestimmen, versuche man zunächst die oben gegebene Regel für den Rauminhalt eines Kegelstumpfes in Beziehung zu bringen zu dem Umfange desjenigen fange desjenigen Kreises, den der Schwerpunkt des halben Achsenschnitt bei der Umdrehung beschreibt.

Der Rauminhalt i eines Kegelstumpfes (Fig. 41) mit den Grundflächenhalbmessern R und r und der Höhe h ist

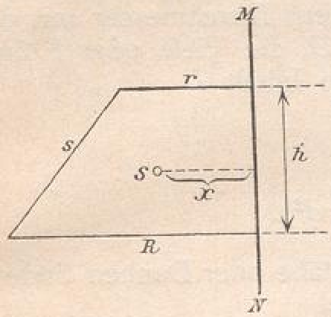

Fig. 41.

$$i = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Bezeichnet man die Entfernung des Schwerpunktes S von der Umdrehungsachse MN mit x so ergiebt sich nach einem bekannten mechanischen Satze über die Lage des Schwerpunktes

$$x = \frac{R^2 + Rr + r^2}{3(R + r)}.$$

Bezeichnet man endlich mit F den Flächeninhalt des Halbachsenschnittes, so ergiebt sich derselbe mit

$$F = \frac{R + r}{2} \cdot h$$

oder durch Einsetzung in den Wert für

$$x = \frac{(R^2 + Rr + r^2)\,h}{3 \cdot 2F}$$

woraus folgt

$$R^2 + Rr + r^2 = \frac{6Fx}{h}$$

mithin durch Einsetzung in die Formel i für den Rauminhalt des Kegelstumpfes

$$i = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{6Fx}{h} = 2\pi x \cdot F.$$

Der Rauminhalt dieses Kegelstumpfes wird also auch gefunden, wenn man den Flächeninhalt seines halben Achsenschnittes mit dem Umfange jenes Kreises multipliziert, den der Schwerpunkt der erzeugenden Fläche beschreibt.

Erweitert man diesen Satz sinngemäss unter Anwendung entsprechender Lehrsätze aus der Mechanik, so erhält man die II. Guldini'sche Regel: **Der Rauminhalt eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkte aus dem Flächeninhalte der erzeugenden Fläche und dem Umfange jenes Kreises, den der Schwerpunkt beschreibt.**

Der Vollständigkeit wegen seien hier noch die Regeln für die Bestimmung des **Rauminhaltes** eines **Fasses** angegeben, ohne auf eine Ableitung derselben näher einzugehen. Bemerkt soll nur werden, dass je nach der Form der Mantelfläche, bezw. je nachdem dieselbe durch Umdrehung eines Kreisbogens, eines

Ellipsenbogens oder eines Parabelbogens entstanden gedacht, und eine grössere oder geringere Genauigkeit gewünscht worden ist, sich die untenstehenden verschiedenen Werte ergeben haben.

Bezeichnet man den kleinsten (Boden) Durchmesser mit d, dem grössten (Bauch) Durchmesser mit D, die Tiefe oder Höhe des Fasses mit h, so ergiebt sich für den Inhalt I

$$I = \frac{\pi h}{12}(2D^2 + d^2)$$

$$I = \frac{\pi h}{12}(D^2 + Dd + d^2).$$

Bei sehr starken Krümmungen der Fassstäbe oder Dauben findet man den Inhalt genauer nach der Formel

$$I = \frac{\pi h}{12}\left(\frac{2D + d}{3}\right)^2.$$