Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

1. Gerade Linie und Ebene.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

A) Die geraden Linien und Ebenen in gegenseitiger Beziehung zu einander.

1. Gerade Linie und Ebene.

a) Gerade Linie winkelrecht zur Ebene.

Aus dem Vorstehenden ist ersichtlich, dass eine gerade Linie entweder mit einer Ebene einen oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich haben kann, wenn man von dem Falle absieht, dass die Gerade mit der Ebene zwei Punkte gemeinschaftlich hat, mithin ganz in dieselbe hineinfällt.

Wenn eine gerade Linie eine Ebene schneidet, d. h. mit derselben einen Punkt gemeinschaftlich hat, so ist vor allem diejenige Lage von Bedeutung, welche entsteht wenn die Gerade auf der Ebene winkelrecht steht, d. h. mit jeder durch den Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden einen rechten Winkel einschliesst. Zur Feststellung des Winkelrechtstehens einer Geraden zu einer Ebene genügt jedoch der Nachweis, dass die gerade Linie auf zwei durch den Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden winkelrecht steht, weil sich folgender Lehrsatz sehr leicht beweisen lässt:

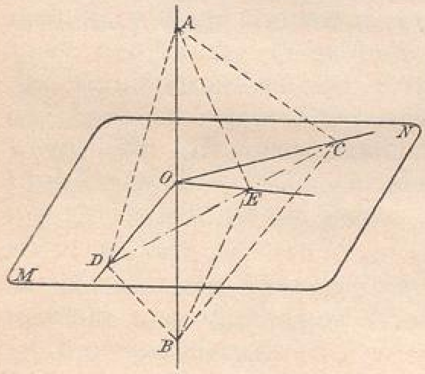

Fig. 1.

Steht eine gerade Linie winkelrecht auf zwei durch den Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden, so steht sie auch winkelrecht auf jeder dritten durch den Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden.*)

Die Gerade AB (Fig. 1) trifft die Ebene MN in dem Punkte O und hat zu der Ebene eine solche Lage, dass die Gerade mit den beiden durch O hindurch-

*) Bei den bildlichen Darstellungen können die Ebenen sowohl wie die geraden Linien nicht unbegrenzt gezeichnet werden; die Ebenen werden daher gewöhnlich durch ein schiefwinkliges Parallelogramm dargestellt. Besonders ist aber darauf zu achten, dass hier räumliche Figuren vorliegen, welche infolge ihrer perspektivischen Darstellung eigentümliche Verschiebungen und Verzerrungen inbezug auf die Grösse zeigen.

gehenden Strahlen OC und OD je einen rechten Winkel einschliesst; dann muss auch die gerade Linie AB mit dem beliebig durch O in der Ebene MN gezogenen Strahl OE einen rechten Winkel einschliessen. Um dies zu beweisen, trage man von dem Schnittpunkte O aus, auf der Geraden AB nach oben und unten gleiche Stücke ab, sodass $OA = OB$ ist; ferner zeichne man in der Ebene MN eine Gerade DC, welche die drei durch O gehenden Strahlen OC, OD und OE in den Punkten C, D und E schneidet, die mit den Punkten A und B verbunden werden; dann sind die beiden Dreiecke AOD und BOD deckungsgleich, wegen der Übereinstimmung von zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ($AO = BO$; $OD = OD$; $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOD = 90^0$), woraus die Gleichheit der Seiten AD und BD folgt. Ganz gleichmässig kann auch die Deckungsgleichheit der beiden Dreiecke AOC und BOC bewiesen werden ($AO = BO$, $OC = OC$, $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC = 90^0$), woraus die Gleichheit der Seiten AC und BC folgt. Infolge der Übereinstimmung in den drei Seiten ($DC = DC$, $AD = BD$ und $AC = BC$) folgt die Deckungsgleichheit der beiden Dreiecke ADC und BDC, woraus die Gleichheit der Winkel ADC und BDC folgt. Infolge der Übereinstimmung in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ($DE = DE$, $AD = BD$, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDE$) folgt die Deckungsgleichheit der beiden Dreiecke ADE und BDE, woraus sich die Gleichheit der dritten Seiten AE und BE ergiebt. Infolge der Übereinstimmung in den drei Seiten ($OE = OE$, $AE = BE$, $AO = BO$) folgt endlich die Deckungsgleichheit der beiden Dreiecke AOE und BOE, weshalb auch die beiden Winkel AOE und BOE gleich sein müssen; da dieselben aber Nebenwinkel sind, so muss jeder gleich 90^0 sein, woraus aber folgt, dass die Gerade AB mit dem durch O beliebig gezogenen Strahl OE einen rechten Winkel einschliesst.

Aus diesem Satze ergeben sich dann durch Umkehrung bezw. Folgerung ohne weiteres folgendes:

1. Die von einem Punkte ausserhalb einer Ebene nach derselben gezogene Winkelrechte ist die kürzeste Gerade, welche von dem Punkt ausserhalb der Ebene nach irgend einem Punkt in der Ebene gezogen werden kann. Man nennt daher auch die Länge dieser Winkelrechten den **Abstand des Punktes** von der Ebene.

2. Von einem Punkte ausserhalb einer Ebene lässt sich nur **eine** Winkelrechte nach der Ebene zeichnen.

3 Durch einen Punkt einer Ebene lässt sich nur **eine** Winkelrechte zu dieser Ebene errichten.

4. Steht eine gerade Linie auf drei durch einen Punkt dieser Geraden gehende Strahlen gleichzeitig

winkelrecht, so liegen diese drei Strahlen in einer Ebene.

Steht eine von zwei parallelen Linien winkelrecht auf einer Ebene, so steht auch die zweite parallele Linie winkelrecht.

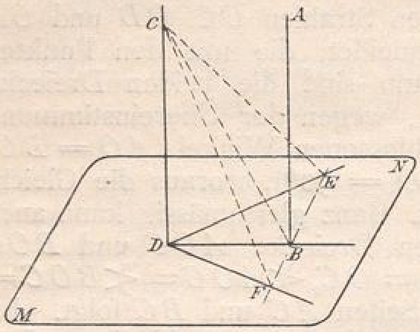

Fig. 2.

Steht die eine Gerade Linie CD der beiden Parallelen CD und AB (Fig. 2) auf der Ebene MN winkelrecht, so muss auch die zweite Parallele AB winkelrecht stehen, was dann nachgewiesen ist, wenn diese Gerade auf zwei durch den Fusspunkt B in der Ebene MN liegenden Strahlen winkelrecht steht. Zu diesem Zwecke verbinde man die Fusspunkte D und B der beiden Parallelen miteinander und erhält dann, da diese Parallelen in einer Ebene liegen, zwei Parallele von einer dritten geschnitten, (vergl.*) Ebene Geometrie Seite 8), weshalb die Summe der beiden Gegenwinkel 180^0 sein muss, d. h.

$$\sphericalangle CDB + \sphericalangle ABD = 180^0$$

Da aber der eine ($\sphericalangle CDB$) dieser beiden Winkel ein Rechter sein muss, weil die Gerade CD winkelrecht zu der Ebene MN steht, mithin auch winkelrecht zu jeder durch den Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden, so muss auch der zweite Winkel ABD gleich 90^0 sein, woraus folgt, dass die Gerade AB auf dem einen durch B hindurch gehenden Strahl BD winkelrecht steht. Als zweiten durch B hindurch gehenden Strahl wähle man eine Gerade EF, welche winkelrecht zu der Verbindungslinie BD der Fusspunkte B und D steht, auf der man dann nach beiden Seiten hin gleiche Stücke von B ausgehend abträgt, so dass $BE = BF$ ist und verbinde die drei Punkte E, B und F mit einem beliebigen Punkt C der Geraden CD. Dann sind infolge der Übereinstimmung in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ($BD = BD$; $BF = BE$; $\sphericalangle DBF = \sphericalangle DBE = 90^0$) die beiden Dreiecke DBF und DBE deckungsgleich, woraus die Gleichheit der Seiten DF und DE folgt; ferner sind ebenfalls infolge der Übereinstimmung von zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ($DC = DC$, $DF = DE$, $\sphericalangle CDF = \sphericalangle CDE = 90^0$) die beiden Dreiecke CDF und CDE deckungsgleich, woraus wieder die Gleicheit der dritten Seiten CF und CE folgt; endlich aber sind auch infolge der Übereinstimmung in den

*) Hoch, Ebene Geometrie im gleichen Verlage M. 2.—

drei Seiten ($CB = CB$; $CF = CE$, $BF = BE$) die beiden Dreiecke CBF und CBE deckungsgleich, woraus die Gleichheit der beiden Winkel CBF und CBE folgt, von denen aber jeder, da sie beide Nebenwinkel sind, gleich 90^0 sein muss, d. h. die Gerade FB steht winkelrecht auf dem Strahl CB. Da aber die Gerade FB nicht nur auf dem Strahl BC, sondern auch auf dem Strahl BD (laut Konstruktion) winkelrecht steht, so steht auch diese Gerade auf jedem dritten durch den Fusspunkt B hindurchgehenden Strahl BA winkelrecht, welcher mit den beiden anderen Strahlen BD und BC in einer Ebene liegt; mithin ist der Winkel ABF wirklich gleich 90^0. Da aber die Gerade AB winkelrecht steht auf den beiden durch den Fusspunkt B hindurchgehenden Strahlen BD und BF so muss die Gerade AB auf der Ebene MN winkelrecht stehen. (Vergl. Seite 4.)

Durch folgerichtigen Schluss, bezw. durch Umkehrung ergeben sich folgende Sätze:

1. Stehen zwei gerade Linien auf einer Ebene gleichzeitig winkelrecht, so sind diese beiden geraden Linien parallel.

2. Zwei gerade Linien, welche auf einer Ebene winkelrecht stehen, liegen in **einer** Ebene.

3. Sind zwei gerade Linien einer dritten Geraden parallel, so sind sie untereinander parallel.

b) Die gerade Linie geneigt zur Ebene.

Der Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene ist der **kleinste** Winkel, den die Gerade mit einem durch den Schnittpunkt in der Ebene gezogenen Strahl einschliesst.

Schneidet die Gerade AB (Fig. 3) die Ebene MN in dem Punkte B und ist BC die Projektion von AB auf MN (vergl. Seite 2) so ist der Winkel ABC der Neigungswinkel der Geraden AB mit der Ebene MN; zeichnet man durch den Fusspunkt B den beliebigen in der Ebene MN liegenden Strahl BD und macht man $BD = BC$, so ergiebt sich nach Ziehung der entsprechenden Verbindungslinien, das rechtwinklige Dreieck ACD, in welchem die Hypotenuse AD grösser sein muss als die eine Kathete AC. Die beiden Dreiecke ABC und ABD stimmen dann in den zwei Seiten ($AB = AB$, $BC = BC$) übereinVerbindungslinien, jedoch nicht in der dritten Seite; dann stimmen dieselben auch nicht in dem von den gleichen Seiten

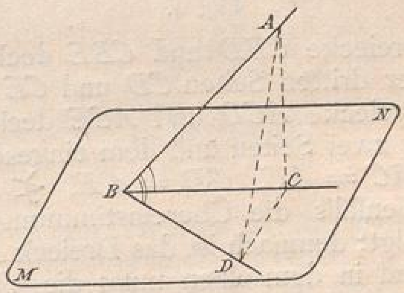

Fig. 3.

eingeschlossenen Winkel überein, sondern es liegt der grösseren Seite auch der grössere Winkel gegenüber, d. h. der Winkel ABD muss wirklich grösser sein als der Winkel ABC, oder der Neigungswinkel muss der kleinste Winkel sein.

Daraus ergiebt sich durch folgerichtigen Schluss:

1. Der Nebenwinkel des Neigungswinkels ist der grösste Winkel den eine gerade Linie mit einer durch den Fusspunkt in der Ebene gezogenen Strahl einschliessen kann.

2. Parallele Linien bilden mit ein und derselben Ebene gleiche Neigungswinkel.

3. Bilden mehrere Gerade mit ein und derselben Ebene gleiche Neigungswinkel, so sind dieselben parallel.

Steht eine durch den Durchschnittspunkt einer geneigten Geraden mit einer Ebene gezogenen, in der Ebene liegender Strahl winkelrecht zu der Projektion der geneigten Geraden auf dieser Ebene, so steht dieser Strahl auch winkelrecht zu den geneigten Geraden selbst.

Ist BC (Fig. 4) die Projektion der geneigten Geraden AB auf der Ebene MN, d. h. also ist $AC \perp MN$ und ist ferner der durch B gehende Strahl BD so gezeichnet, dass der Winkel $CBD = 90^0$ ist, so soll auch der Winkel $ABE = 90^0$ sein. Um dies zu beweisen, verlängere man den Strahl BD über B hinaus, trage dann nach beiden Seiten von C ausgehend gleiche Stücke ab, so dass $BD = BE$ ist und verbinde die so erhaltenen Punkte D und E mit A und C, dann sind infolge der Übereinstimmung in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ($BC = BC$; $BD = BE$, $\sphericalangle\, CBD = \sphericalangle\, CBE = 90^0$) die beiden Dreiecke CBD und CBE deckungsgleich, woraus die Gleichheit der dritten Seiten CD und CE folgt; ferner sind auch die beiden Dreiecke ACD und ACE deckungsgleich, da dieselben ebenfalls in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen ($AC = AC$, $CD = CE$, $\sphericalangle\, ACD = \sphericalangle\, ACE = 90^0$) woraus ebenfalls die Übereinstimmung der dritten Seiten AD und AE folgt; demnach ist das Dreieck ADE ein gleichschenkliges Dreieck und in demselben muss die Verbindungslinie der Spitze mit der Mitte der Grundseite (vergleiche: Ebene Geometrie Seite 14) winkelrecht zu dieser stehen, d. h. der Winkel ABD ist wirklich ein Rechter.

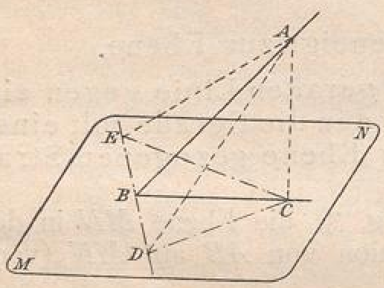

Fig. 4.

Ist eine gerade Linie mit einer in einer Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie auch zu der Ebene selbst parallel, denn es ist nicht möglich, dass die ausserhalb der Ebene liegende Gerade mit der Ebene einen Punkt gemeinschaftlich hat, da dieser nur in derjenigen Ebene liegen könnte, die durch die beiden parallelen Geraden gelegt werden kann, was aber der Voraussetzung widerspricht, dass die beiden ursprünglichen Geraden parallel sind.

1. Ist eine gerade Linie mit einer Ebene parallel, so ist die gerade Linie auch mit jeder Durchschnittslinie parallel, welche man erhält als Schnitt einer durch die gegebene Gerade gelegten Ebene mit der ursprünglichen Ebene selbst.

2. Ist eine von zwei parallelen Geraden einer Ebene parallel, so ist es auch die zweite.

3. Die Durchschnittslinien aller Ebenen mit einer gegebenen Ebene, welche durch eine zu dieser Ebene parallelen Geraden gelegt werden können, sind untereinander parallel.

Alle Winkelrechten, welche sich von den einzelnen Punkten einer mit einer Ebene parallelen Geraden auf diese Ebene fällen lassen, sind untereinander gleich.

Die von den Punkten C, D, E u. s. w. (Fig. 5) auf die Ebene MN gefällten Winkelrechten CF, DG, EH u. s. w. sind untereinander gleich, da dieselben zwischen Parallelen in der durch AB und CF gehenden Ebene liegen. Diese unveränderte Länge der Winkelrechten, welche an den Punkten der parallelen Geraden auf die Ebene gefällt werden können, nennt man die Entfernung der parallelen Geraden von der Ebene.

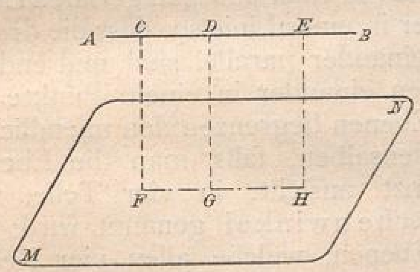

Fig. 5.

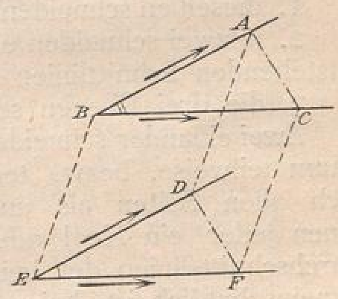

Fig. 6.

Zwei Winkel im Raume mit paarweise gleich gerichteten parallelen Schenkeln sind einander gleich.

Wenn die Schenkel der beiden Winkel ABC und DEF (Fig. 6) in demselben Sinne parallel gerichtet sind (vergleiche: Ebene Geometrie Seite 8 und beachte die hinzugefügten Pfeile), aber in verschiedenen Ebenen liegen, so trage man auf den Schenkeln vom Scheitelpunkt ausgehend gleiche Stücke ab, so dass

$$BA = ED \text{ und } BC = EF$$

ist, und verbinde die so erhaltenen Punkte auf den Schenkeln des einen Winkels mit den gleichliegenden Punkten auf den Schenkeln des anderen Winkels, dann sind die beiden Geraden AD und CF ein und derselben dritten Geraden BE gleich und parallel, weshalb dieselben auch untereinander parallel und gleich sein müssen, woraus aber auch folgt, dass die beiden Geraden AC und DF gleich und parallel sind, da sie in einer einzigen Ebene liegen. Infolge der Übereinstimmung der beiden Dreiecke ABC und DEF in den drei Seiten ($AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$) sind dieselben aber auch deckungsgleich, mithin müssen die beiden Winkel ABC und DEF einander gleich sein.

Unter Bezugnahme auf die gleichen Verhältnisse in der Ebenen Geometrie (vergl. Seite 8) erhält dieser Satz folgende allgemeine Fassung:

Winkel im Raume mit paarweise parallelen Schenkeln sind dann einander gleich, wenn beide Paare Schenkel in derselben oder in entgegengesetzter Richtung parallel laufen; sie ergänzen einander zu 180°, wenn das eine Schenkelpaar in derselben, das andere in entgegengesetzter Richtung parallel läuft.

2. Die Lage der Ebenen gegeneinander.

a) Einander schneidende Ebenen.

Zwei Ebenen, welche einander schneiden, haben immer eine gerade Linie miteinander gemeinschaftlich, welche die Durchschnittslinie heisst.

Drei Ebenen können, abgesehen von dem Falle, dass dieselben untereinander parallel sind, folgende Lagen einnehmen:

1. dieselben schneiden einander in einer einzigen geraden Linie,
2. je zwei schneiden einander in einer Linie so, dass die drei so entstehenden Schnittlinien untereinander parallel sind und endlich
3. die drei Ebenen schneiden einander in einem Punkte.

Zwei einander schneidende Ebenen begrenzen den unendlichen Raum teilweise, bezw. teilen denselben, falls man die Ebenen nach allen Seiten als unbegrenzt ansieht, in vier Teile, von denen jeder ein Keil oder Flächenwinkel genannt wird; die Durchschnittslinien der beiden Ebenen, welche allen vier Keilen gemeinschaftlich ist, heisst Kant- oder Scheitellinie.

Unter dem Neigungswinkel zweier einander schneidender Ebenen versteht man denjenigen Winkel, der von zwei durch einen Punkt der Scheitellinie hindurchgehenden Geraden gebildet wird, von denen jede in einer Ebene liegt und winkelrecht zur gemeinschaftlichen Schnittlinie steht. In welchem Punkte der Durchschnittslinie die Winkelrechten errichtet werden, ist gleichgültig, da Winkel im Raume, mit gleichgerichteten Schenkeln einander gleich sind. (S. 9.)