



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

2. Die Lage der Ebenen gegeneinander.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76720](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76720)

$$BA = ED \text{ und } BC = EF$$

ist, und verbinde die so erhaltenen Punkte auf den Schenkeln des einen Winkels mit den gleichliegenden Punkten auf den Schenkeln des anderen Winkels, dann sind die beiden Geraden AD und CF ein und derselben dritten Geraden BE gleich und parallel, weshalb dieselben auch untereinander parallel und gleich sein müssen, woraus aber auch folgt, dass die beiden Geraden AC und DF gleich und parallel sind, da sie in einer einzigen Ebene liegen. Infolge der Übereinstimmung der beiden Dreiecke ABC und DEF in den drei Seiten ($AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$) sind dieselben aber auch deckungsgleich, mithin müssen die beiden Winkel ABC und DEF einander gleich sein.

Unter Bezugnahme auf die gleichen Verhältnisse in der Ebenen Geometrie (vergl. Seite 8) erhält dieser Satz folgende allgemeine Fassung:

Winkel im Raume mit paarweise parallelen Schenkeln sind dann einander gleich, wenn beide Paare Schenkel in derselben oder in entgegengesetzter Richtung parallel laufen; sie ergänzen einander zu 180° , wenn das eine Schenkelpaar in derselben, das andere in entgegengesetzter Richtung parallel läuft.

2. Die Lage der Ebenen gegeneinander.

a) Einander schneidende Ebenen.

Zwei Ebenen, welche einander schneiden, haben immer eine gerade Linie miteinander gemeinschaftlich, welche die Durchschnittslinie heisst.

Drei Ebenen können, abgesehen von dem Falle, dass dieselben untereinander parallel sind, folgende Lagen einnehmen:

1. dieselben schneiden einander in einer einzigen geraden Linie,
2. je zwei schneiden einander in einer Linie so, dass die drei so entstehenden Schnittlinien untereinander parallel sind und endlich
3. die drei Ebenen schneiden einander in einem Punkte.

Zwei einander schneidende Ebenen begrenzen den unendlichen Raum teilweise, bezw. teilen denselben, falls man die Ebenen nach allen Seiten als unbegrenzt ansieht, in vier Teile, von denen jeder ein Keil oder Flächenwinkel genannt wird; die Durchschnittslinien der beiden Ebenen, welche allen vier Keilen gemeinschaftlich ist, heisst Kant- oder Scheitellinie.

Unter dem Neigungswinkel zweier einander schneidender Ebenen versteht man denjenigen Winkel, der von zwei durch einen Punkt der Scheitellinie hindurchgehenden Geraden gebildet wird, von denen jede in einer Ebene liegt und winkelrecht zur gemeinschaftlichen Schnittlinie steht. In welchem Punkte der Durchschnittslinie die Winkelrechten errichtet werden, ist gleichgültig, da Winkel im Raume, mit gleichgerichteten Schenkeln einander gleich sind. (S. 9.)

Wird der auf diese Weise erhaltene Neigungswinkel zweier Ebenen gleich 90° , so sagt man, die Ebenen stehen aufeinander winkelrecht.

Je nachdem der Neigungswinkel zweier einander schneidenden Ebenen ein rechter oder ein schiefer Winkel ist, heissen die Ebenen winkelrecht oder schief zu einander stehend.

Steht eine gerade Linie auf einer Ebene winkelrecht, so steht auch jede durch diese Gerade hindurchgehende Ebene zu der Ebene winkelrecht.

Steht die Gerade AB (Fig. 7) auf der Ebene MN winkelrecht, so muss auch die durch AB hindurchgehende Ebene RS , welche die gegebene Ebene in CD schneidet, auf MN winkelrecht stehen, denn zeichnet man in der Ebene MN den durch B hindurchgehenden Strahl BF winkelrecht zu der Durchschnittsline CD , so muss der Winkel ABF ein Rechter sein, weil die Gerade AB winkelrecht zu der Ebene MN steht. Dieser Winkel BAF ist jedoch nach der oben gegebenen Erklärung der Neigungswinkel.

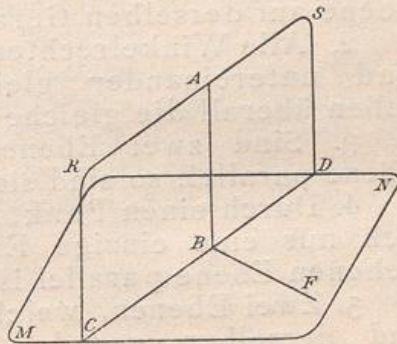


Fig. 7.

Durch folgerichtigen Schluss und Umkehrung ergibt sich:

1. Stehen zwei Ebenen aufeinander winkelrecht und errichtet man in einem beliebigen Punkt der Durchschnittsline eine Winkelrechte zu dieser in der einen Ebene, so muss dieselbe auch winkelrecht zur zweiten Ebene stehen.

2. Stehen zwei Ebenen aufeinander winkelrecht und errichtet man in einem beliebigen Punkte der Durchschnittsline eine Winkelrechte zu einer Ebene, so muss diese ganz in die zweite Ebene hineinfallen.

3. Stehen zwei Ebenen aufeinander winkelrecht und fällt man an einem beliebigen Punkt der einen Ebene eine Winkelrechte auf die andere Ebene, so muss diese ganz in die erste Ebene hineinfallen.

4. Stehen zwei einander schneidende Ebenen auf einer dritten Ebene winkelrecht, so steht auch die Durchschnittsline der beiden ersten Ebenen winkelrecht zur dritten Ebene.

5. Steht die Durchschnittsline zweier Ebenen auf einer dritten Ebene winkelrecht, so stehen auch die beiden Ebenen selbst winkelrecht zur dritten Ebene.

b) Parallele Ebenen.

Steht eine gerade Linie gleichzeitig auf zwei Ebenen winkelrecht, so sind diese parallel, denn würden die beiden Ebenen einander schneiden, so müsste die gemeinschaftliche Winkelrechte mit den Verbindungslinien ihrer Fusspunkte in den beiden Ebenen und irgend einem Punkte der Durchschnittslinie der beiden Ebenen ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln bilden, was unmöglich ist.

Daraus ergeben sich ohne weiteres folgende Sätze:

1. Steht eine von zwei parallelen Ebenen winkelrecht auf einer geraden Linie, so steht auch die zweite Ebene auf derselben Geraden winkelrecht.

2. Alle Winkelrechten zwischen parallelen Ebenen sind untereinander gleich, oder parallele Ebenen haben überall die gleiche Entfernung.

3. Sind zwei Ebenen gleichzeitig einer dritten Ebene parallel, so sind sie untereinander parallel.

4. Durch einen Punkt ausserhalb einer Ebene lässt sich nur eine einzige Ebene legen, welche der gegebenen Ebene parallel ist.

5. Zwei Ebenen, welche nicht gleichzeitig auf ein- und derselben geraden Linie winkelrecht stehen, können nicht parallel sein.

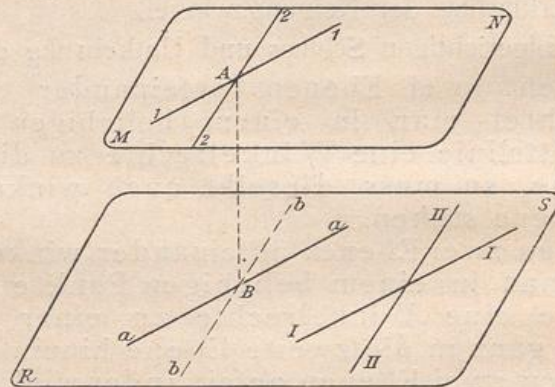


Fig. 8.

Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die Schnittlinien der Ebenen untereinander parallel, denn jede der beiden Schnittlinien mit der dritten Ebene liegt ihrer ganzen Ausdehnung nach in je einer der Ebenen, welche aber infolge ihrer Parallelität keinen Punkt miteinander gemein haben können.

Zwei Ebenen, welche je zwei einander schneidende paarweise parallele Gerade enthalten, sind einander parallel.

Sind die beiden einander schneidenden Geraden 1,1 und 2,2 in der Ebene MN (Fig. 8) den beiden einander schneidenden Geraden I,I u. II,II in der Ebene RS parallel, so sind die beiden Ebenen MN und RS auch einander parallel, denn errichtet man in dem Durchschnittspunkte A der beiden Geraden 1,1 und 2,2 der Ebene MN die Winkelrechte AB , so schliesst dieselbe mit jeder durch den Fusspunkt A gehenden, in der Ebene liegenden Geraden einen rechten Winkel ein. Zeichnet man durch den Fusspunkt B , in welchem die Winkelrechte AB die zweite Ebene RS trifft, die parallelen Geraden a,a und b,b zu den in dieser Ebene RS liegenden Geraden I,I und II,II, so müssen diese so erhaltenen Geraden a,a und b,b auch den in der Ebene MN liegenden Geraden 1,1 und 2,2 parallel sein. Demnach liegen die beiden Geraden 1,1 und a,a mit der Winkelrechten AB in einer Ebene und die Gerade AB muss auch mit a,a einen rechten Winkel einschliessen; aus demselben Grunde aber muss der Winkel, den die Gerade AB mit b,b einschliesst, ein rechter sein; da aber die Gerade AB auf zwei durch den Fusspunkt B in der Ebene RS , liegenden Geraden winkelrecht steht, so steht sie auch auf der Ebene RS winkelrecht; steht aber eine Gerade (vergleiche Seite 12) gleichzeitig auf zwei Ebenen winkelrecht, so sind dieselben parallel.

Eine gerade Linie, welche eine von zwei parallelen Ebenen schneidet, trifft auch die zweite Ebene und bildet mit beiden Ebenen den gleichen Neigungswinkel, denn zeichnet man durch einen Punkt der Geraden eine Winkelrechte zu der einen Ebene, so muss diese auch auf der zweiten Ebene winkelrecht stehen. Durch diese Winkelrechte und die ursprüngliche gerade Linie lässt sich jedoch eine Ebene legen, welche die beiden parallelen Ebenen in parallelen Linien (vergleiche Seite 12) schneidet; diejenigen Winkel aber, welche die ursprüngliche Gerade mit diesen parallelen Schnittlinien einschliesst, sind die Neigungswinkel der Geraden mit der Ebene und sind als korrespondierende Winkel gleich.

Eine Ebene, welche zwei parallele Ebenen schneidet, bildet mit beiden gleiche Neigungswinkel.

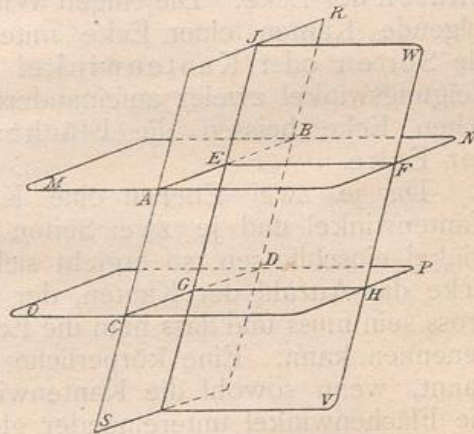


Fig. 9.

Werden die beiden parallelen Ebenen MN und OP (Fig. 9) von der Ebene RS in den parallelen Geraden AB und CD geschnitten, so lege man durch einen beliebigen Punkt E der einen Schnittlinie AB eine Ebene WV winkelrecht zu dieser Schnittlinie AB , dann muss diese Ebene auch winkelrecht stehen auf der zweiten Schnittlinie CD (vergleiche Seite 12). Die Winkel IEF und EGH aber sind demnach die Neigungswinkel der Ebenen MN und RS , bezw. PQ und RS ; diese Winkel aber sind als korrespondierende Winkel einander gleich.

Durch Umkehrung ergibt sich ohne weiteres:

Werden zwei Ebenen von einer dritten Ebene so geschnitten, dass die Durchschnittslinien parallel sind und die Neigungswinkel nach der gleichen Seite hin einander gleich, so sind die beiden ersten Ebenen einander parallel.

B. Die körperlichen Ecken.

Schneiden mehr als drei Ebenen einander, so dass alle durch einen Punkt hindurchgehen, so schliessen dieselben einen nach einer Seite hin unbegrenzten Raum ein, welcher eine körperliche Ecke oder eine Ecke genannt wird. Derjenige Punkt, in welchem die sämtlichen Ebenen einander schneiden, heisst der Scheitelpunkt oder die Spitze der Ecke, die Durchschnittslinien zweier aufeinander folgender Ebenen jedoch heissen die Kanten der Ecke. Diejenigen Winkel, welche zwei aufeinanderfolgende Kanten einer Ecke miteinander einschliessen, heissen die Seiten oder Kantenwinkel der Ecke; endlich aber, die Neigungswinkel zweier aufeinanderfolgender Seiten einer körperlichen Ecke heissen die Flächenwinkel oder die Winkel der Ecke.

Da je zwei Ebenen eine Kante, je zwei Kanten einen Kantenwinkel und je zwei Seiten oder Ebenen einen Flächenwinkel einschliessen, so ergibt sich, dass bei jeder körperlichen Ecke die Anzahl der Kanten, der Seiten und der Winkel gleich gross sein muss und dass man die Ecke nach der Zahl dieser Stücke benennen kann. Eine körperliche Ecke wird regelmässig genannt, wenn sowohl die Kantenwinkel untereinander, als auch die Flächenwinkel untereinander gleich sind.

Jede körperliche Ecke muss mindestens drei Ecken, bezw. Kanten und Winkel haben.

Denkt man sich die drei Ebenen, welche eine körperliche Ecke bilden können, nach allen Seiten unbegrenzt, so entstehen auf diese Weise acht körperliche Ecken, welche alle einen gemeinschaftlichen Scheitel haben und den unbegrenzten Raum in acht nur teilweise begrenzte Teile teilen; von diesen acht Ecken sind je