Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

1. Ebenflächige Körper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

b) in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel,

c) in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln und

d) in den drei Winkeln.

C. Die Eigenschaften der Körper im allgemeinen.

1. Ebenflächige Körper oder Polyeder.

Ein allseitig begrenzter Teil des unendlichen Raumes heisst ein Körper.

Wird der Körper nur von ebenen Flächen begrenzt, so heisst derselbe ein ebenflächiger Körper oder Polyeder zu dessen Begrenzung mindestens vier Ebenen erforderlich sind.

Bei jedem ebenflächigen Körper unterscheidet man:

a) Die Kanten, als Durchschnittslinien zweier aufeinander folgender den Körper begrenzender Ebenen;

b) die Seiten oder Flächen, als die einzelnen den Körper begrenzenden ebenen Figuren; die Summe aller Seiten oder Flächen bildet die Oberfläche des Körpers;

c) die Ecken endlich sind die Endpunkte oder Schnittpunkte je zweier Kanten.

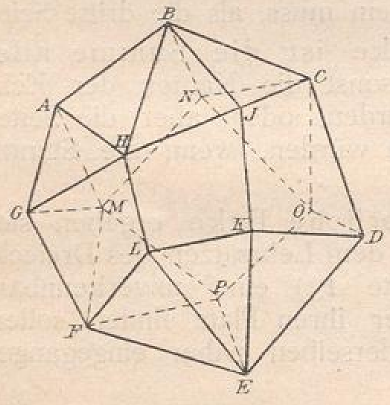

Fig. 10.

In jedem ebenflächigen Körper ist die Anzahl aller Kantenwinkel doppelt so gross als die Anzahl aller Kanten, weil in jeder Seitenfläche die Anzahl der Winkel und die Anzahl der Kanten gleich gross ist und jede Kante als gleichzeitig zwei Begrenzungsflächen angehörend doppelt gezählt wird.

In jedem ebenflächigen Körper ist die Anzahl der Flächenwinkel ebenso gross wie die Anzahl der Kanten.

In jedem ebenflächigen Körper ist die Summe aus der Anzahl der Ecken und Flächen ebenso gross wie die um zwei vermehrte Anzahl der Kanten.

Dieser Satz ist allgemein bekannt unter dem Namen Euler'scher Lehrsatz, nach dem Mathematiker Leonhard Euler 1707—1783, welcher denselben zuerst aufgestellt hat so benannt. Zum Zweck des Beweises dieses Lehrsatzes, denke man sich einen ebenflächigen Körper (Fig. 10) so auf die Zeichenebene projiziert, dass keine einzige der Brgrenzungsflächen sich als gerade Linie darstellt, also dass man sämtliche Flächen als solche sehen kann, wodurch man erreicht, dass die so erhaltene Projektion des ebenflächigen Körpers ebenso viel Flächen, Kanten und Ecken hat wie der Körper selbst. Um nun eine Beziehung zwischen diesen drei Bestimmungsstücken des ebenflächigen Körpers aufzustellen, berechnet man die Summe sämtlicher Umfangswinkel der Begrenzungsflächen in der Projektion auf doppelte Art und Weise, wobei man bezeichnet mit

E die Anzahl der Ecken des ebenflächigen Körpers,
F „ „ „ Flächen „ „ „
K „ „ „ Kanten „ „ „

Bezeichnet man ferner mit $n_1, n_2, n_3, \ldots$ die Anzahl der Seiten der einzelnen Begrenzungsfiguren des Körpers, so ist die Summe aller Umfangswinkel (vergl. Ebene Geometrie Seite 20) in einer Fläche gleich $(n-2)\ 180^0$ mithin die Summe S sämtlicher Umfangswinkel

$$S = [(n_1-2) + (n_2-2) + (n_3-2) + \ldots\ldots] \cdot 180$$
$$S = (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots) \cdot 180 - 2.\ F.\ 180$$

da dieser Körper F Flächen hat, mithin ebenso viel mal die Summe in 2 vorkommt. Da aber bei dieser Art der Aufzählung jede Kante des ebenflächigen Körpers zweimal gezählt wird, so ist

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots, \ldots = 2\,K$$

weshalb man durch Einsetzen erhält:

$$S = (2K - 2F) \cdot 180 = (K - F) \cdot 360.$$

Bezeichnet man ferner mit m die Anzahl der Eckpunkte (A, B, C, D, E, F und G) der gemeinschaftlichen Umfangslinie der Projektion dieses Körpers, mit m_1 die Anzahl derjenigen Ecken (H, I, K, L), welche innerhalb dieser gemeinschaftlichen Umfangslinie auf der sichtbaren Seite liegen, mit m_2 aber die Anzahl derjenigen Ecken (M, N, O, P), welche innerhalb dieser gemeinschaftlichen Umfangslinie auf der unsichtbaren Seite liegen, so erhält man für die Summe S den Umfangswinkel der Projektion des oberflächlichen Körpers.

$$S = (m-2) \cdot 180 + (m-2) \cdot 180 + m_1 \cdot 360 + m_2 \cdot 360$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass die Winkelsumme an der Umfangslinie liegend doppelt gerechnet werden muss, weil die einzelnen Winkel sowohl auf der sichtbaren, als auch auf der unsichtbaren Seite der Projektion liegen, mithin ergiebt sich

$$S = (m+m)\ 180 - 4 \cdot 180 + m_1 \cdot 360 + m_2 \cdot 360$$
$$S = 2m \cdot 180 - 4 \cdot 180 + m_1 \cdot 360 + m_2 \cdot 360$$
$$S = (m + m_1 + m_2 - 2)\ 360$$

Da aber $m + m_1 + m_2$ nichts anderes ist als die Anzahl der Ecken des oberflächigen Körpers, so erhält man

$$\begin{aligned} S &= (E-2)\,360 \\ S &= (K-F)\,360 \\ \hline (E-2) \cdot 360 &= (K-F)\,360 \\ E - 2 &= K - F \\ E + F &= K + 2 \end{aligned}$$

a) Die Pyramide.

Der von einer körperlichen Ecke teilweise begrenzte, nach einer Seite offene Raum, heisst ein pyramidaler Raum; schneidet man denselben durch eine Ebene, welche sämtliche Kanten der körperlichen Ecke schneidet, so entsteht eine Pyramide. Der Scheitelpunkt oder die Spitze der körperlichen Ecke heisst die Spitze der Pyramide, die Kanten der körperlichen Ecke aber die Seitenkanten der Pyramide. Die in der Spitze der Pyramide zusammentreffenden Flächen, welche unter allen Umständen Dreiecke sein müssen, heissen die Seitenflächen der Pyramide und die Summe aller Seitenflächen heisst der Mantel der Pyramide. Die den pyramidalen Raum abschliessende Ebene, soweit dieselbe zwischen den Seitenflächen der Pyramide liegt, heisst die Grundfläche der Pyramide, welche mit dem Mantel derselben zusammen die Oberfläche der Pyramide ergiebt.

Unter der Höhe der Pyramide versteht man die Länge der Winkelrechten, welche von der Spitze auf die Grundfläche gefällt werden kann.

Nach der Anzahl der Seitenflächen einer Pyramide wird dieselbe als drei-, vier- und mehrseitig bezeichnet.

Ist die Grundfläche einer Pyramide ein regelmässiges Vieleck und fällt der Fusspunkt der Höhe mit dem Mittelpunkt der Grundfläche zusammen, so nennt man die Pyramide eine regelmässige und gerade. In jeder regelmässigen, geraden Pyramide sind die Seitenkanten untereinander gleich gross und die Seitenflächen sind untereinander deckungsgleiche Dreiecke. Die Höhe eines solchen Seitendreiecks einer geraden regelmässigen Pyramide heisst eine Seitenhöhe.

Schneidet man eine Pyramide durch eine Ebene, welche durch die Spitze der Pyramide geht, so ist der Schnitt immer ein Dreieck.

Wird eine Pyramide durch eine zu der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche der Grundfläche ähnlich oder gestaltgleich und die Flächeninhalte dieser beiden Flächen verhalten sich wie Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Wird die Pyramide $ABCDE$ mit der Spite S (Fig. 11) durch eine zur Grundfläche parallele Ebene so geschnitten, dass die Schnittfigur $abcde$ entsteht, so müssen die an den gleichen Seitenkanten liegenden Winkel dieser beiden Figuren gleich sein, da die Schenkel derselben in derselben Richtung parallel laufen (vergleiche Seite 9). Da aber ferner jede Seitenfläche durch eine zur entsprechenden Grundkante parallele Transversale geschnitten wird, so ergeben sich für zwei benachbarte Seitenflächen folgende Projektionen (vergleiche Ebene Geometrie Seite 58).

$$\begin{array}{l} AE : ae = SE : Se \\ \underline{ED : ed = SE : Se} \\ AE : ae = ED : ed \end{array}$$

Ebenso lässt sich aber für alle gleichliegenden Seiten nachweisen, dass dieselben dasselbe Verhältnis haben, woraus unter Hinzufügung der Bedingung Gleichheit der gleichliegenden Winkel die Ähnlichkeit der beiden Figuren $ABCDE$ und $abcde$ folgt.

Die von der Spitze S auf die grosse Grundfläche gefällte Winkelrechte (Höhe) trifft diese in M, die parallele Schnittfläche aber in O, so dass SM und SO die Abstände der beiden in Frage kommenden Flächen von der Spitze sind. Verbindet man die so erhaltenen Fusspunkte M und O der Höhe mit je einem zugehörigen Eckpunkt, z. B. mit A und a, so ergiebt sich infolge der Gestaltgleichheit der hierdurch entstehenden Dreiecke folgende Proportionen:

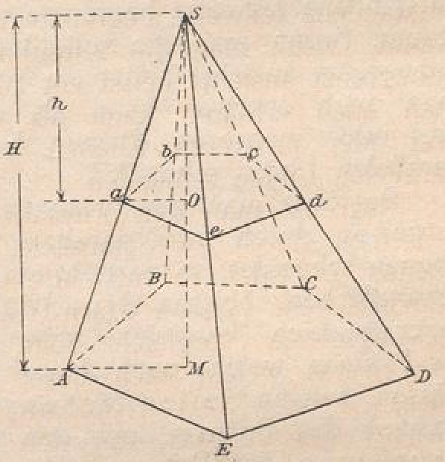

Fig. 11.

$$\begin{array}{l} SM : SO = SA : Sa \\ \underline{SA : Sa = AE : ae} \\ AE : ae = SM : SO \end{array}$$

Da sich aber (vergleiche Ebene Geometrie Seite 66) gestaltgleiche Figuren ihrem Flächeninhalte nach verhalten wie die Quadrate zweier gleichliegender Seiten, so erhält man:

$$\begin{array}{l} ABCDE : abcde = \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 \\ \underline{\overline{AE}^2 \; : \; \overline{ae}^2 \; = \overline{SM}^2 : \overline{SO}^2} \\ ABCDE : abcde = \overline{SM}^2 : \overline{SO}^2 \end{array}$$

Wird eine Pyramide durch eine zur Grundebene parallele Ebene geschnitten, so heisst der zwischen den beiden parallelen

Ebene liegende Teil ein Pyramidenstumpf und der zwischen der kleineren Schnittfläche und der Spitze liegende Teil der Pyramide die Ergänzungspyramide des Stumpfes. Demnach wird ein Pyramidenstumpf von zwei einander ähnlichen Vielecken als Grundflächen begrenzt, von denen die eine die grosse, die andere die kleine Grundfläche heisst und von so vielen Trapezen, Seitenflächen genannt, als jedes Vieleck Seiten hat. Der Abstand der beiden parallelen Grundflächen eines Pyramidenstumpfes heisst die Höhe desselben.

b) Das Prisma.

Denkt man sich die Spitze einer Pyramide entferne sich immer mehr und mehr von ihrer Grundfläche, so erhält man, wenn die Spitze in unendliche Entfernung gerückt ist, ein Prisma, indem die Seitenkanten endlich parallel geworden sind. Der so entstandene teilweise begrenzte nach zwei Seiten hin unbegrenzte Raum, (wenn man die Seitenkanten nach beiden Seiten hin als unbegrenzt ansieht) heisst ein prismatischer Raum, welchen man auch erklären kann als einen Raum, der teilweise von drei oder mehreren Ebenen begrenzt wird, die einander in parallelen Linien schneiden.

Begrenzt man den prismatischen Raum dadurch, dass man denselben durch zwei parallele, sämtliche Kanten schneidende Ebenen schneidet, so entsteht ein Prisma. Die beiden parallelen Schnittflächen, heissen Grundflächen und sind untereinander deckungsgleich (vergleiche Seite 12). Die übrigen Grenzflächen des Prismas, welche nach dieser Erklärung Parallelogramme sein müssen, heissen Seitenflächen; dieselben bilden zusammen den Mantel des Prismas, mit den beiden Grundflächen aber die Oberfläche des Prismas. Die Durchschnittslinien zweier aufeinander folgender Seitenflächen eines Prismas heissen die Seitenkanten oder Kanten des Prismas, welche alle untereinander gleich sind. Der Abstand der beiden Grundflächen heisst die Höhe des Prismas.

Die Anzahl der Seitenflächen, der Seitenkanten und der Kanten der Grundfläche ist bei ein und demselben Prisma dieselbe; nach der Anzahl dieser Bestimmungsstücke wird das Prisma ein drei-, vier- oder mehrseitiges genannt. Stehen die Seitenkanten winkelrecht zur Grundseite, so nennt man das Prisma ein gerades, in jedem anderen Falle ein schiefes. Bei dem geraden Prisma ist die Höhe ebenso gross wie jede Seitenkante; bei einem schiefen Prisma aber ist die Höhe kleiner als jede Seitenkante.

Ein Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm, ist wird ein Parallelepiped genannt, welches ebenso wie jedes Prisma gerade oder schief sein kann. Jedes gerade Pararellepipod heisst auch ein rechtwinkeliges und hat es als Begrenzungsflächen Quadrate, so nennt man dieses Prisma einen Würfel oder einen Kubus.

In jedem Prisma ist jeder zur Grundfläche parallele Schnitt mit dieser Grundfläche deckungsgleich.

Jeder Schnitt eines Prismas mit einer Ebene parallel zu einer Seitenkante ist ein Parallelogramm.

Ist die Grundfläche eines geraden Prismas ein regelmässiges Vieleck, so heisst das Prisma ein regelmässiges.

c) Das Prismatoid.

Jener Körper (Fig. 12) welcher begrenzt wird von zwei beliebigen in parallelen Ebenen liegenden Vielecken als Grundflächen, und von Dreiecken als Seitenflächen, von denen jedes mit einem Vieleck einer Seite, mit dem anderen aber eine Ecke gemeinschaftlich hat, heisst ein Prismatoid. Der Abstand der beiden parallelen Grundflächen heisst die Höhe des Pramatoides. Die Seiten der beiden Grundflächenvielecke heissen Grundkanten, die Durchschnittslinien zweier aufeinanderfolgender Seitenflächen heissen Seitenkanten. Im allgemeinen ist die Anzahl der Seitenflächen gleich der Summe aus den Seitenzahlen der beiden Grundflächen, doch kann unter Umständen die Anzahl der Seitenflächen auch kleiner sein, wenn zwei Seiten der beiden Grundflächen einander parallel sind.

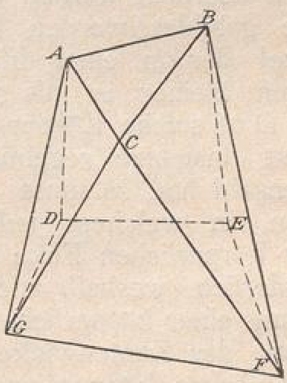

Fig. 12.

Aus der Entstehung eines Prismatoids folgt unter Berücksichtigung des Umstandes, dass parallele Ebenen parallele Schnitte haben, dass eine durch die Mitte einer Seitenkante zu den beiden Grundflächen parallele Schnittebene alle übrigen Seitenkanten des Prismatoides sowohl als auch die Höhe desselben halbiert. Die so erhaltene Schnittebene, welche ebensoviel Kanten hat, als das Prismatoid Seitenflächen, heisst der Mittelschnitt des Prismatoides.

Der Mittelschnitt hat im allgemeinen so viel Kanten wie die Anzahl der Kanten der beiden Grundflächen zusammen beträgt, und jede Kante ist halb so gross wie je eine Kante einer Grundfläche.

Verbindet man irgend einen beliebigen Punkt des Mittelschnittes mit sämtlichen Eckpunkten des Prismatoides, so wird dieses in Pyramiden zerlegt, welche alle ihre Spitzen in dem angenommenen Punkte haben, und an denen zwei die beiden

Grundflächen, die anderen aber je eine Seitenfläche des Prismatoides zur Grundfläche haben.

Haben die beiden Grundflächen eines Prismatoides gleichviel Seiten und sind ausserdem je zwei gegenüber liegende Seiten pararallel, so heisst dieser Körper ein Obelisk.

d) Die regelmässigen Polyeder.

Ein ebenflächiger Körper oder Polyeder, dessen Begrenzungsflächen regelmässige, untereinander deckungsgleiche Vielecke sind und ausserdem von untereinander deckungsgleichen körperlichen Ebenen gebildet wird, heisst ein regelmässiger Polyeder oder platonischer Körper.

Da die regelmässigen Polyeder nur von regelmässigen Vielecken begrenzt werden sollen und nur dann eine körperliche Ecke gebildet werden kann, wenn die Summe aller Kantenwinkel der in einer Fläche zusammentreffenden Begrenzungsflächen kleiner ist als 360° (vergleiche Seite 15), so kann es nur fünf solche Körper geben. Denn berücksichtigt man zunächst dasjenige regelmässige Vieleck, welches die geringste Seitenzahl hat, so muss man vom gleichseitigen Dreieck ausgehen, in welchem jeder Winkel 60° beträgt. Zur Bildung einer körperlichen Ecke sind bekanntlich mindestens drei Ebenen erforderlich, weshalb auch drei gleichseitige Dreiecke wohl zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten können, da die Summe der Kantenwinkel $3 \cdot 60^0 = 180^0$ ist, mithin kleiner als 360^0; ebenso können auch noch vier gleichseitige Dreiecke zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten, da die Summe der Kantenwinkel $4 \cdot 60^0 = 240^0$, auch noch kleiner ist, als 360^0; auch fünf gleichseitige Dreiecke können noch zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten, da auch hier noch die Summe der Kantenwinkel $5 \cdot 60^0 = 300^0$ noch immer kleiner als 360^0 ist. Nun können aber nicht mehr als fünf gleichseitige Dreiecke eine körperliche Ecke bilden, weil die Summe der Kantenwinkel gleich oder grösser als 360^0 wäre, was unmöglich ist. Demnach kann es nur drei regelmässige Polyeder geben, welche von gleichseitigen Dreiecken begrenzt werden, und zwar sind es:

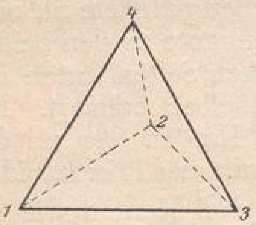

Fig. 13.

1. Das Tetraeder (Fig. 13.), auch Vierflächner genannt, begrenzt von vier gleichseitigen Dreiecken, von denen immer je drei zu einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper hat vier Ecken und sechs Kanten.

2. Das Oktaeder (Fig. 14), auch Achtflächner genannt, begrenzt von acht gleichseitigen Dreiecken, von denen immer

je vier zu einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper hat sechs Ecken und zwölf Kanten.

3. Das **Ikosaeder** (Fig. 15), auch Zwanzigflächner genannt, begrenzt von zwanzig gleichseitigen Dreiecken, von denen immer je fünf zu einer körperlichen Ecke zusammentreten· dieser Körper hat zwöif Ecken und dreissig Kanten.

Nach dem gleichseitigen Dreieck folgt das gleichseitige Viereck oder Quadrat, in welchem jeder Winkel 90^0 beträgt, weshalb drei Quadrate zur Bildung einer körperlichen Ecke benutzt werden können, weil die Summe der Kantenwinkel $3.90^0 = 270^0$

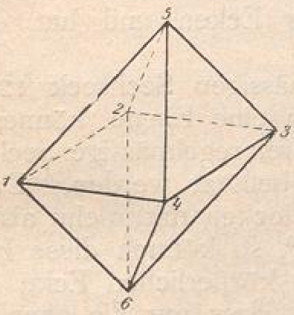

Fig. 14

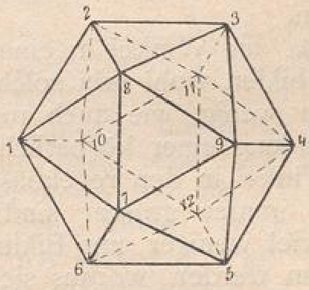

Fig. 15.

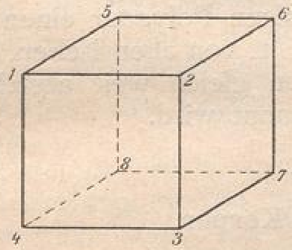

Fig. 16.

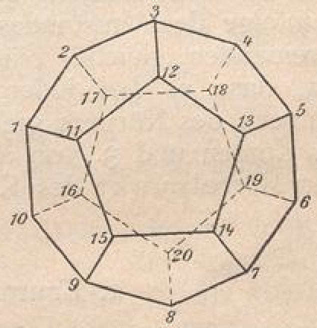

Fig. 17.

kleiner als 360^0, ist. Vier oder mehr Quadrate können keine körperliche Ecke mehr bilden, weil die Summe der Kantenwinkel gleich oder grösser als 360^0 wäre; demnach giebt es nur einen einzigen regelmässigen Polyeder, welcher von Quadraten begrenzt wird, nämlich:

Das **Hexander oder der Würfel** (Fig. 16), begrenzt von sechs Quadraten, von denen immer je drei zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper hat sechs Ecken und zwölf Kanten.

Nach dem Quadrate folgt das regelmässige Fünfeck, in welchem jeder Winkel 108° beträgt, weshalb drei regelmässige Fünfecke wohl zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten können, da die Summe der Kantenwinkel $3 \cdot 108^0 = 324^0$, noch immer kleiner ist als 360°. Da aber die Summe von vier Umfangswinkeln eines regelmässigen Vierecks $4 \cdot 108^0 = 432^0$, grösser ist als 360°, so können nur drei regelmässige Fünfecke zur Bildung einer körperlichen Ecke herangezogen werden, weshalb es auch hier nur einen einzigen regelmässigen Polyeder giebt, nämlich:

Das Dodekaeder oder den Zwölfflächner (Fig. 17), begrenzt von zwölf regelmässigen Fünfecken, von denen immer je drei zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper wird begrenzt von zwanzig Ecken und hat dreissig Kanten.

Da der Winkel in einem regelmässigen Sechseck 120° beträgt, bilden wohl drei solche Figuren eine Ebene, können aber ebenso wenig, wie auch mehr als drei regelmässige Sechsecke, zur Bildung einer körperlichen Ecke benützt werden. Da aber die Winkel in den regelmässigen Vielecken mit mehr als sechs Seiten immer grösser sind als 120°, so können diese Figuren noch viel weniger zur Bildung einer körperlichen Ecke herangezogen werden, woraus sich ergiebt, dass nur die oben angeführten fünf platonischen Körper gebildet werden können.

Infolge der vollständig gleichmässigen Anordnung der einzelnen Flächen, Kanten und Ecken der regelmässigen Polyeder und infolge des Umstandes, dass die Begrenzungsflächen sämtlich untereinander gleiche Flächenwinkel bilden, ergiebt sich sehr leicht, dass es bei jedem regelmässigen Polyeder einen Punkt im Innern des Körpers giebt, welcher 1. von allen Ecken, 2. von allen Kanten und 3. von allen Flächen gleich weit absteht und daher Mittelpunkt des Körpers genannt wird.

2. Krummflächige Körper.

Diejenigen Körper, welche ganz oder teilweise von krummen Flächen begrenzt werden, heissen krummflächige Körper. In diesem Leidfaden können nur jene krummflächige Körper behandelt werden, welche eine gewisse Regelmässigkeit zeigen oder deren Entstehung bestimmten Gesetzen unterworfen ist. Die hier in Betracht kommenden Körper sind alle von sogenannten Umdrehungsflächen begrenzt, d. h. von Flächen, welche dadurch entstehen, dass bestimmte Linien sich so um eine gerade Linie, Drehungsachse genannt, bewegen, dass jeder Punkt einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in der Drehungsachse liegt. Diese so gebildeten Kreise, welche alle untereinander parallel sind, heissen Meridiane; die Ebenen der einzelnen Meridiane stehen alle auf der Drehungsachse winkelrecht.