UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

2. Die runden Körper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

Visual Library

lich Schneide nennt; setzt man daher in die obige Formel für den Inhalt eines Prismatoides für $g = 0$ ein, so erhält man die Formel für die Berechnung eines Keiles mit

$$I = \frac{h}{3}\left(\frac{G}{2} + 2M\right).$$

2. Die runden Körper.

a) Der Cylinder.

Da jeder Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, so werden alle für die Berechnung eines Prismas geltenden Regeln auch für den Cylinder Anwendung finden.

Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche eines geraden Cylinders mit r, die Höhe desselben aber mit h, so ergiebt sich für die Mantelfläche $M = 2\pi r h$, d. h.

der Mantel eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und Höhe.

Die Oberfläche O erhält man, wenn zu der Mantelfläche die doppelte Grundfläche $G = \pi r^2$ hinzugezählt wird, d. h.

$$O = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Der Rauminhalt I eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe oder

$$I = \pi r^2 h.$$

b) Der Kegel.

Ebenso wie der Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, ebenso kann auch ein Kegel als eine Pyramide mit unendlich kleinen Seiten angesehen werden, weshalb alle für eine Pyramide gültigen Regeln auch hier Anwendung finden können.

Für jeden geraden Kreiskegel besteht zwischen den drei Grössen: Halbmesser r der Grundfläche, Höhe h und Länge s der Seitenkante oder Erzeugenden des Kegels folgende wichtige Beziehung

$$s^2 = h^2 + r^2$$

da diese drei geraden Linien für jeden Achsenschnitt ein rechtwinkliges Dreieck bilden, bei dem der Pythagoräische Lehrsatz Anwendung findet.

Um den Mantel eines geraden Kegels zu berechnen, denke man sich denselben längs einer Erzeugenden aufgeschnitten und in eine Ebene abgerollt, dann erhält man einen Kreisausschnitt, dessen Halbmesser ebenso gross ist als die Kegelkante s, während

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

die Länge des Kreisbogens mit dem Umfange $2\pi r$ der Grundfläche übereinstimmt. Der Flächeninhalt dieses Kreisausschnittes wird ebenso wie der Inhalt eines Dreiecks mit der Grundseite $2\pi r$ und der Höhe s berechnet,

$$M = \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \pi r s.$$

Der Mantel eines geraden Kreiskegels ist gleich dem Produkte aus Grundflächen-Halbmesser und Seite, multipliziert mit der Ludolphschen Zahl.

Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels setzt sich aus dessen Mantelfläche M und Grundfläche $G = \pi r^2$ zusammen, weshalb man erhält

$$O = \pi r s \cdot + \pi^2 = \pi r (s + r) \text{ dh.}$$

Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels ist ebenso gross wie die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels mit derselben Grundfläche, dessen Seitenkante gleich ist der um den Halbmesser der Grundfläche vermehrten Seitenkante des Kegels.

Der Rauminhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Grundfläche und Höhe; bezeichnet man daher den Halbmesser der Grundfläche mit r, die Höhe mit h so erhält man:

$$I = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}.$$

c) Der Kegelstumpf.

Auch für den Kegelstumpf gelten dieselben Regeln wie für den Pyramidenstrumpf unter Einführung der runden Grundflächen.

Bezeichnet man die Halbmesser der beiden Grundflächen mit R und r, die Höhe des geraden Kegelstumpfes mit h, die Seitenkante aber mit s, so ergiebt sich für diese vier Grössen folgende wichtige Beziehung

$$s^2 = h^2 + (R - r)^2$$

denn jeder Achsenschnitt eines geraden Kegelstumpfes ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten mit den Durchmessern der beiden Grundflächen übereinstimmen, während die nicht parallelen Seiten gleich den Seitenkanten sind; fällt man von dem Endpunkt der kleineren parallelen Seite in diesem gleichschenkligen Trapeze eine Winkelrechte auf die grössere parallele Seite, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Seitenkante des Kegelstumpfes, dessen eine Kathete die Höhe desselben und dessen zweite Kathete der Unterschied $R - r$ der beiden Grundflächenhalbmesser ist, woraus sich unter Benutzung des Pythagoräischen Lehrsatzes obige Beziehung ergiebt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Um die Mantelfläche eines geraden kreisförmigen Kegelstumpfes mit den Grundflächen-Halbmessern R und r und der Seitenkante s zu bestimmen, denke man sich den Kegelstumpf nach einer Seite aufgeschnitten und in eine Ebene ausgerollt, wodurch man einen Teil eines Kreisringes oder ein Bogentrapez erhält, für welches der Abstand ber beiden Kreisbogen mit der Seitenkante des Kegelstumpfes übereinstimmt und die beiden Kreisbogen ebenso gross sind, wie die Umfänge der beiden Grundflächen. Der Flächeninhalt des Bogentrapezes wird ebenso berechnet, wie der Flächeninhalt eines geradlinigen Trapezes, weshalb man erhält

$$M = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} s = \pi (R + r) s$$

d. h. der Mantel eines Kegelstumpfes ist gleich dem Produkte aus der Summe der beiden Grundflächenhalbmesser und der Seite des Stumpfes multipliziert mit der Ludolphschen Zahl.

Statt dem Produkte aus der Summe der beiden Grundflächenhalbmesser und der Ludolphschen Zahl kann man auch den Umfang des mittleren Schnittes setzen, sodass man auch folgende Regel erhält: der Mantel eines Kegelstumpfes ist gleich dem Produkte aus dem Umfange des mittleren Schnittes multipliziert mit der Seitenkante des Stumpfes.

Die Oberfläche O des Kegelstumpfes erhält man, wenn man die Mantelfläche M und die beiden Grundflächen vermehrt d. h.

$$O = \pi (R + r) s + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Setzt man die Formel den Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes, die besonderen Worte für die Grundflächen eines Kegelstumpfes ein, so erhält man den Rauminhalt I desselben wie folgt:

$$I = \frac{h}{3} (G + g = \sqrt{Gg})$$

$$I = \frac{h}{3} \left(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}\right)$$

$$I = \frac{h}{3} (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r)$$

$$I = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + R r).$$

d) Die Kugel und deren Teile.

Um die Oberfläche einer Kugel zu berechnen, denke man sich dieselbe durch Umdrehung eines regelmässigen Vieleckes um einen Durchmesser desselben entstanden. Die Oberfläche dieses so entstandenen Umdrehungskörpers wird um so mehr sich der Kugeloberfläche nähern, je grösser die Anzahl der Seiten des regelmässigen Vielecks ist, also je kleiner die Seiten selbst sind. Infolge der Umdrehung des regelmässigen Vielecks entsteht ein Umdrehungskörper, dessen Oberfläche sich aus den Mantelflächen von Kugelstumpfen zusammensetzt. Um eine Beziehung für diese Mantelflächen der Kugelstumpfe mit den Abmessungen der Kugel zu finden, greife man einen der Kugelstumpfe heraus und untersuche denselben genauer. Der halbe Achsenschnitt eines solchen Kegelstumpfes (Fig. 37) ist ein Trapez $ABED$ mit zwei rechten Winkeln. Bezeichnet man den Mantel des Kegelstumpfes, der durch Umdrehung der geraden Berührungslinie oder Vielecksseite AB gebildet wird mit m, so erhält man (vergleiche Seite 48)

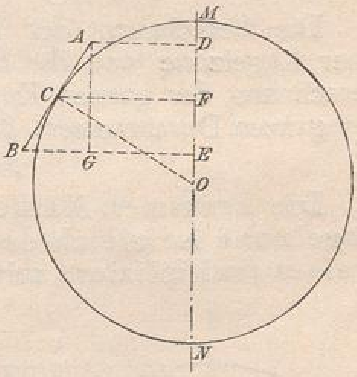

Fig. 37.

$$m = 2\pi CF \cdot AB$$

wobei CF der Halbmesser des mittleren Schnittes ist. Fällt man von A auf BE die Winkelrechte AG und verbindet C mit O, so entstehen zwei ähnliche Dreiecke ABG und CFO infolge der Übereinstimmung in zwei Winkeln; deshalb haben die zugehörigen Seiten dasselbe Verhältnis.

$$AB : AG = CO : CF$$
$$AB : DE = CO : CF$$
$$AB \cdot CF = CO \cdot DE$$
$$AB \cdot CF = \ r \ \cdot DE.$$

Setzt man diesen Wert in die obige Formel für den Mantel m ein, so erhält man

$$m = 2\pi r \cdot DE.$$

d. h. der Mantel eines solchen Teilkegelstumpfes ist gleich dem Umfange des grössten Kugelkreises, multipliziert mit der Projektion der Kegelstumpfseite auf die Umdrehungsachse. Wie aus der Betrachtung der Figur ohne weiteres hervorgeht hat man den Durchmesser $2\ r$ der Kugel für die eben erwähnte Projektion einzusetzen, wenn der Mantel m des einen Kegelstumpfes erweitert wird zu der Oberfläche O der Kugel

$$O = 2\pi r \cdot 2r \cdot = 4\pi r^2.$$

Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so gross wie der Flächeninhalt eines grössten Kugelkreises.

Um den Rauminhalt I einer Kugel zu berechnen, denke man sich dieselbe in eine sehr grossen Anzahl von Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen in der Kugeloberfläche, deren Spitzen aber im Kugelmittelpunkte liegen. Diese Pyramiden haben dann alle den Halbmesser der Kugel zur Höhe, wenn man die Teilchen der Kugeloberfläche möglichst klein gewählt hat.

Der Rauminhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teil aus dem Produkte aus Grundfläche und Höhe, weshalb man für die Berechnung des Rauminhaltes der ganzen Kugel nur die Kugeloberfläche O einzusetzen hat,

$$I = \frac{O \cdot r}{3} = \frac{4\pi r^2 \cdot r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Die Berechnung der Mantelfläche einer Kugelhaube oder einer Kugelzone von der Höhe h erfolgt ganz ähnlich wie die Berechnung der ganzen Kugeloberfläche, nur hat man an Stelle des ganzen Durchmessers der Kugel nur die Höhe h einzuführen.

$$M = 2\pi r \cdot h.$$

Die krummen Mantelstriche einer Kugelhaube oder Kugelzone ist gleich dem Umfange des grössten Kugelkreises multipliziert mit der Höhe.

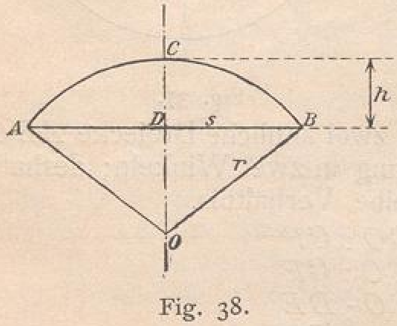

Fig. 38.

Ergänzt man eine Kugelhaube von der Höhe h durch einen Kegel (Fig. 38) dessen Grundfläche die Schnittfläche der Kugel und dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, so erhält man einen Kugelausschnitt. Bezeichnet man den Halbmesser desjenigen Kreises mit welchem die Kegel und die Kugelhaube zusammensetzen mit s, so besteht zwischen den drei Grössen r, h und s folgende Beziehung

$$s^2 + (r-h)^2 = r^2$$
$$s^2 + r^2 - 2rh + h^2 = r^2$$
$$s^2 = 2rh - h^2.$$

Soll die Oberfläche eines Kugelausschnittes berechnet werden, so muss die Mantelfläche der Kugelhaube um die Mantelfläche des Kegels mit dem Grundflächenhalbmesser s und der Seitenkante r vergrössert werden.

$$O = 2\pi rh + \pi rs = \pi r(2h + s).$$

Der Rauminhalt eines Kugelausschnittes ist ähnlich zu berechnen wie der Rauminhalt einer Kugel, nur hat an die Stelle der ganzen Kugeloberfläche nur die krumme Mantelfläche M der zugehörigen Kugelhaube zu treten.

$$I = M \cdot \frac{r}{3} = 2\pi r \cdot h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

Der Rauminhalt eines Kugelausschnittes ist gleich dem Flächeninhalte des grössten Kugelkreises, multipliziert mit der zweidrittelfachen Höhe der dazugehörigen Kugelhaube.

Der **Rauminhalt** einer **Kugelhaube** (Fig. 38) ergiebt sich als Unterschied der Rauminhalte eines Kugelausschnittes und des zugehörigen Kegels mit der Höhe $r-h$.

$$I = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{\pi s^2 (r-h)}{3}$$

$$s^2 = 2rh - h^2$$

$$I = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{\pi}{3}(2rh - h^2)(r-h)$$

$$I = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{\pi}{3}(2r^2 h - 3rh^2 + h^3)$$

$$I = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^2 h + \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3}$$

$$I = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3}$$

$$I = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

Der **Rauminhalt** einer **Kugelzone** (Fig. 39) von der Höhe h mit den Grundflächenhalbmessern s und s; herausgeschnitten aus einer Kugel mit dem Halbmesser r ergiebt sich als Unterschied zweier Kugelhauben mit den Höhen H und h mit

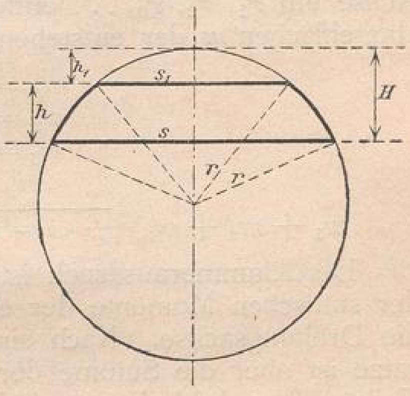

Fig. 39.

$$I = \frac{\pi H^2}{3}(3r - H) - \frac{\pi h_1^2}{3}(3r - h_1)$$

wobei zwischen den einzelnen hier in Betracht kommenden Grössen folgende Beziehungen bestehen, welche unter Berücksichtigung eines Achsenschnittes sich aus der Figur ergeben:

$$h = H - h_1$$

$$r^2 = s^2 - (r - H)^2$$

$$r^2 = s_1^2 - (r - h_1)^2$$

$$r^2 = s^2 - (r - H)^2 = s_1^2 - (r - h_1)^2$$

$$s^2 - r^2 + 2rH - H^2 = s_1^2 - r^2 + 2rh_1 - h_1^2$$

$$2r(H - h_1) = s_1^2 - s^2 + H^2 - h_1^2$$

$$H = h + h_1$$

$$2r \cdot h = s_1^2 - s^2 + h^2 + 2hh_1.$$

e) Die Umdrehungskörper.

Wenn auch der Cylinder, Kugel, Kugelstumpf, die Kugel und einzelne Teile derselben als Umdrehungskörper angesehen werden können, so soll hier besonders der allgemeinen Umdrehungskörper gedacht werden, um die Oberfläche und den Rauminhalt derselben zu bestimmen. Bemerkt muss jedoch werden, dass eine genaue Abteilung der Formeln hier nicht stattfinden kann, weil die nötigen Unterlagen fehlen.

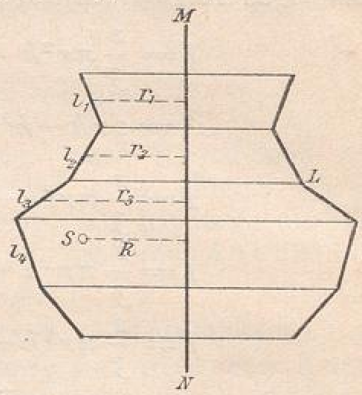

Fig. 40.

Entsteht durch Umdrehung des gebrochenen Linienzuges L, (Fig. 40) welcher aus den kleinen Teilstrecken l_1, l_2, l_3, . . . besteht um die Umdrehungsachse MN ein Körper in der Weise, dass die Mitten der einzelnen Teilstrecken von der Achse um r_1, r_2, r_3, . . . entfernt sind, so erhält man für die Mantelflächen m der entstehenden Kegelstumpfe (vergl. Seite 48)

$$m_1 = 2\pi r_1 \cdot l_1$$
$$m_2 = 2\pi r_2 \cdot l_2$$
$$m_3 = 2\pi r_3 \cdot l_3$$
$$\cdots$$
$$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = 2\pi (r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + \cdots).$$

Der Klammerausdruck ist aber nichts anderes als die Summe der statischen Momente der einzelnen Teilstrecken, bezogen auf die Drehungsachse. Nach einem bekannten mechanischen Lehrsatze ist aber die Summe der statischen Momente der einzelnen Teilstrecken gleich dem statischen Moment des ganzen Linienzuges L bezogen auf dieselbe Achse, weshalb man als Umdrehungshalbmesser den Abstand R des Schwerpunktes S des ganzen Linienzuges von der Umdrehungsachse zu nehmen hat.

$$r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_2 + \cdots\cdots = LR$$
$$O = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$$
$$O = 2\pi R \cdot L.$$

Die Oberfläche eines Umdrehungskörpers ist gleich der Länge des sich drehenden Linienzuges multipliziert mit dem Umfange desjenigen Kreises den der Schwerpunkt beschreibt (I. Guldini'sche Regel.).

Um den Rauminhalt eines durch Umdrehung eines Linienzuges entstehenden Körpers zu bestimmen, versuche man zunächst die oben gegebene Regel für den Rauminhalt eines Kegelstumpfes in Beziehung zu bringen zu dem Umfange desjenigen fange desjenigen Kreises, den der Schwerpunkt des halben Achsenschnitt bei der Umdrehung beschreibt.

Der Rauminhalt i eines Kegelstumpfes (Fig. 41) mit den Grundflächenhalbmessern R und r und der Höhe h ist

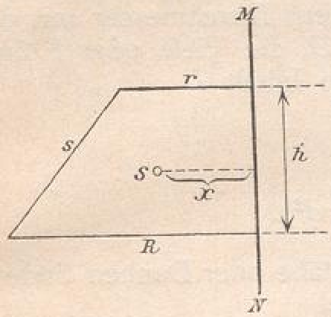

Fig. 41.

$$i = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$

Bezeichnet man die Entfernung des Schwerpunktes S von der Umdrehungsachse MN mit x so ergiebt sich nach einem bekannten mechanischen Satze über die Lage des Schwerpunktes

$$x = \frac{R^2 + Rr + r^2}{3(R + r)}.$$

Bezeichnet man endlich mit F den Flächeninhalt des Halbachsenschnittes, so ergiebt sich derselbe mit

$$F = \frac{R + r}{2} \cdot h$$

oder durch Einsetzung in den Wert für

$$x = \frac{(R^2 + Rr + r^2)\, h}{3 \cdot 2F}$$

woraus folgt

$$R^2 + Rr + r^2 = \frac{6Fx}{h}$$

mithin durch Einsetzung in die Formel i für den Rauminhalt des Kegelstumpfes

$$i = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{6Fx}{h} = 2\pi x \cdot F.$$

Der Rauminhalt dieses Kegelstumpfes wird also auch gefunden, wenn man den Flächeninhalt seines halben Achsenschnittes mit dem Umfange jenes Kreises multipliziert, den der Schwerpunkt der erzeugenden Fläche beschreibt.

Erweitert man diesen Satz sinngemäss unter Anwendung entsprechender Lehrsätze aus der Mechanik, so erhält man die II. Guldini'sche Regel: Der Rauminhalt eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkte aus dem Flächeninhalte der erzeugenden Fläche und dem Umfange jenes Kreises, den der Schwerpunkt beschreibt.

Der Vollständigkeit wegen seien hier noch die Regeln für die Bestimmung des Rauminhaltes eines Fasses angegeben, ohne auf eine Ableitung derselben näher einzugehen. Bemerkt soll nur werden, dass je nach der Form der Mantelfläche, bezw. je nachdem dieselbe durch Umdrehung eines Kreisbogens, eines

Ellipsenbogens oder eines Parabelbogens entstanden gedacht, und eine grössere oder geringere Genauigkeit gewünscht worden ist, sich die untenstehenden verschiedenen Werte ergeben haben.

Bezeichnet man den kleinsten (Boden) Durchmesser mit d, dem grössten (Bauch) Durchmesser mit D, die Tiefe oder Höhe des Fasses mit h, so ergiebt sich für den Inhalt I

$$I = \frac{\pi h}{12}(2D^2 + d^2)$$

$$I = \frac{\pi h}{12}(D^2 + Dd + d^2).$$

Bei sehr starken Krümmungen der Fassstäbe oder Dauben findet man den Inhalt genauer nach der Formel

$$I = \frac{\pi h}{12}\left(\frac{2D + d}{3}\right)^2.$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN