Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

a) Die Pyramide.

Da aber $m + m_1 + m_2$ nichts anderes ist als die Anzahl der Ecken des oberflächigen Körpers, so erhält man

$$
\begin{aligned}
S &= (E-2)\,360 \\
S &= (K-F)\,360 \\
\hline
(E-2)\cdot 360 &= (K-F)\,360 \\
E-2 &= K-F \\
E+F &= K+2
\end{aligned}
$$

a) Die Pyramide.

Der von einer körperlichen Ecke teilweise begrenzte, nach einer Seite offene Raum, heisst ein pyramidaler Raum; schneidet man denselben durch eine Ebene, welche sämtliche Kanten der körperlichen Ecke schneidet, so entsteht eine Pyramide. Der Scheitelpunkt oder die Spitze der körperlichen Ecke heisst die Spitze der Pyramide, die Kanten der körperlichen Ecke aber die Seitenkanten der Pyramide. Die in der Spitze der Pyramide zusammentreffenden Flächen, welche unter allen Umständen Dreiecke sein müssen, heissen die Seitenflächen der Pyramide und die Summe aller Seitenflächen heisst der Mantel der Pyramide. Die den pyramidalen Raum abschliessende Ebene, soweit dieselbe zwischen den Seitenflächen der Pyramide liegt, heisst die Grundfläche der Pyramide, welche mit dem Mantel derselben zusammen die Oberfläche der Pyramide ergiebt.

Unter der Höhe der Pyramide versteht man die Länge der Winkelrechten, welche von der Spitze auf die Grundfläche gefällt werden kann.

Nach der Anzahl der Seitenflächen einer Pyramide wird dieselbe als drei-, vier- und mehrseitig bezeichnet.

Ist die Grundfläche einer Pyramide ein regelmässiges Vieleck und fällt der Fusspunkt der Höhe mit dem Mittelpunkt der Grundfläche zusammen, so nennt man die Pyramide eine regelmässige und gerade. In jeder regelmässigen, geraden Pyramide sind die Seitenkanten untereinander gleich gross und die Seitenflächen sind untereinander deckungsgleiche Dreiecke. Die Höhe eines solchen Seitendreiecks einer geraden regelmässigen Pyramide heisst eine Seitenhöhe.

Schneidet man eine Pyramide durch eine Ebene, welche durch die Spitze der Pyramide geht, so ist der Schnitt immer ein Dreieck.

Wird eine Pyramide durch eine zu der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche der Grundfläche ähnlich oder gestaltgleich und die Flächeninhalte dieser beiden Flächen verhalten sich wie Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Wird die Pyramide $ABCDE$ mit der Spite S (Fig. 11) durch eine zur Grundfläche parallele Ebene so geschnitten, dass die Schnittfigur $abcde$ entsteht, so müssen die an den gleichen Seitenkanten liegenden Winkel dieser beiden Figuren gleich sein, da die Schenkel derselben in derselben Richtung parallel laufen (vergleiche Seite 9). Da aber ferner jede Seitenfläche durch eine zur entsprechenden Grundkante parallele Transversale geschnitten wird, so ergeben sich für zwei benachbarte Seitenflächen folgende Projektionen (vergleiche Ebene Geometrie Seite 58).

$$\begin{array}{c} AE : ae = SE : Se \\ \underline{ED : ed = SE : Se} \\ AE : ae = ED : ed \end{array}$$

Ebenso lässt sich aber für alle gleichliegenden Seiten nachweisen, dass dieselben dasselbe Verhältnis haben, woraus unter Hinzufügung der Bedingung Gleichheit der gleichliegenden Winkel die Ähnlichkeit der beiden Figuren $ABCDE$ und $abcde$ folgt.

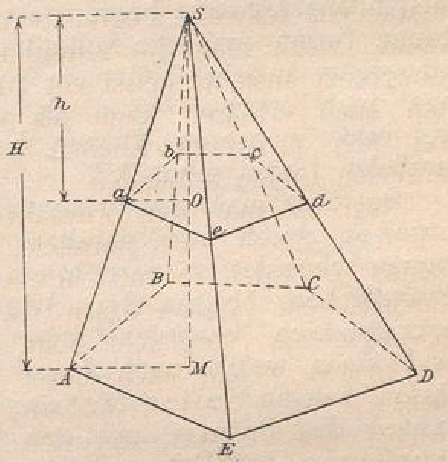

Fig. 11.

Die von der Spitze S auf die grosse Grundfläche gefällte Winkelrechte (Höhe) trifft diese in M, die parallele Schnittfläche aber in O, so dass SM und SO die Abstände der beiden in Frage kommenden Flächen von der Spitze sind. Verbindet man die so erhaltenen Fusspunkte M und O der Höhe mit je einem zugehörigen Eckpunkt, z. B. mit A und a, so ergiebt sich infolge der Gestaltgleichheit der hierdurch entstehenden Dreiecke folgende Proportionen:

$$\begin{array}{c} SM : SO = SA : Sa \\ \underline{SA : Sa = AE : ae} \\ AE : ae = SM : SO \end{array}$$

Da sich aber (vergleiche Ebene Geometrie Seite 66) gestaltgleiche Figuren ihrem Flächeninhalte nach verhalten wie die Quadrate zweier gleichliegender Seiten, so erhält man:

$$\begin{array}{c} ABCDE : abcde = \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 \\ \underline{\overline{AE}^2 \; : \; \overline{ae}^2 = \overline{SM}^2 : \overline{SO}^2} \\ ABCDE : abcde = \overline{SM}^2 : \overline{SO}^2 \end{array}$$

Wird eine Pyramide durch eine zur Grundebene parallele Ebene geschnitten, so heisst der zwischen den beiden parallelen

Ebene liegende Teil ein Pyramidenstumpf und der zwischen der kleineren Schnittfläche und der Spitze liegende Teil der Pyramide die Ergänzungspyramide des Stumpfes. Demnach wird ein Pyramidenstumpf von zwei einander ähnlichen Vielecken als Grundflächen begrenzt, von denen die eine die grosse, die andere die kleine Grundfläche heisst und von so vielen Trapezen, Seitenflächen genannt, als jedes Vieleck Seiten hat. Der Abstand der beiden parallelen Grundflächen eines Pyramidenstumpfes heisst die Höhe desselben.

b) Das Prisma.

Denkt man sich die Spitze einer Pyramide entferne sich immer mehr und mehr von ihrer Grundfläche, so erhält man, wenn die Spitze in unendliche Entfernung gerückt ist, ein Prisma, indem die Seitenkanten endlich parallel geworden sind. Der so entstandene teilweise begrenzte nach zwei Seiten hin unbegrenzte Raum, (wenn man die Seitenkanten nach beiden Seiten hin als unbegrenzt ansieht) heisst ein prismatischer Raum, welchen man auch erklären kann als einen Raum, der teilweise von drei oder mehreren Ebenen begrenzt wird, die einander in parallelen Linien schneiden.

Begrenzt man den prismatischen Raum dadurch, dass man denselben durch zwei parallele, sämtliche Kanten schneidende Ebenen schneidet, so entsteht ein Prisma. Die beiden parallelen Schnittflächen, heissen Grundflächen und sind untereinander deckungsgleich (vergleiche Seite 12). Die übrigen Grenzflächen des Prismas, welche nach dieser Erklärung Parallelogramme sein müssen, heissen Seitenflächen; dieselben bilden zusammen den Mantel des Prismas, mit den beiden Grundflächen aber die Oberfläche des Prismas. Die Durchschnittslinien zweier aufeinander folgender Seitenflächen eines Prismas heissen die Seitenkanten oder Kanten des Prismas, welche alle untereinander gleich sind. Der Abstand der beiden Grundflächen heisst die Höhe des Prismas.

Die Anzahl der Seitenflächen, der Seitenkanten und der Kanten der Grundfläche ist bei ein und demselben Prisma dieselbe; nach der Anzahl dieser Bestimmungsstücke wird das Prisma ein drei-, vier- oder mehrseitiges genannt. Stehen die Seitenkanten winkelrecht zur Grundseite, so nennt man das Prisma ein gerades, in jedem anderen Falle ein schiefes. Bei dem geraden Prisma ist die Höhe ebenso gross wie jede Seitenkante; bei einem schiefen Prisma aber ist die Höhe kleiner als jede Seitenkante.

Ein Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm, ist wird ein Parallelepiped genannt, welches ebenso wie jedes Prisma gerade oder schief sein kann. Jedes gerade Pararellepipod heisst