Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

d) Die regelmässigen Polyeder.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

Grundflächen, die anderen aber je eine Seitenfläche des Prismatoides zur Grundfläche haben.

Haben die beiden Grundflächen eines Prismatoides gleichviel Seiten und sind ausserdem je zwei gegeuüber liegende Seiten pararallel, so heisst dieser Körper ein Obelisk.

d) Die regelmässigen Polyeder.

Ein ebenflächiger Körper oder Polyeder, dessen Begrenzungsflächen regelmässige, untereinander deckungsgleiche Vielecke sind und ausserdem von untereinander deckungsgleichen körperlichen Ebenen gebildet wird, heisst ein regelmässiger Polyeder oder platonischer Körper.

Da die regelmässigen Polyeder nur von regelmässigen Vielecken begrenzt werden sollen und nur dann eine körperliche Ecke gebildet werden kann, wenn die Summe aller Kantenwinkel der in einer Fläche zusammentreffenden Begrenzungsflächen kleiner ist als 360⁰ (vergleiche Seite 15), so kann es nur fünf solche Körper geben. Denn berücksichtigt man zunächst dasjenige regelmässige Vieleck, welches die geringste Seitenzahl hat, so muss man vom gleichseitigen Dreieck ausgehen, in welchem jeder Winkel 60⁰ beträgt. Zur Bildung einer körperlichen Ecke sind bekanntlich mindestens drei Ebenen erforderlich, weshalb auch drei gleichseitige Dreiecke wohl zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten können, da die Summe der Kantenwinkel $3 \cdot 60^0 = 180^0$ ist, mithin kleiner als 360^0; ebenso können auch noch vier gleichseitige Dreiecke zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten, da die Summe der Kantenwinkel $4 \cdot 60^0 = 240^0$, auch noch kleiner ist, als 360^0; auch fünf gleichseitige Dreiecke können noch zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten, da auch hier noch die Summe der Kantenwinkel $5 \cdot 60^0 = 300^0$ noch immer kleiner als 360^0 ist. Nun können aber nicht mehr als fünf gleichseitige Dreiecke eine körperliche Ecke bilden, weil die Summe der Kantenwinkel gleich oder grösser als 360^0 wäre, was unmöglich ist. Demnach kann es nur drei regelmässige Polyeder geben, welche von gleichseitigen Dreiecken begrenzt werden, und zwar sind es:

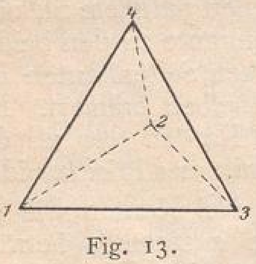

Fig. 13.

1. Das Tetraeder (Fig. 13.), auch Vierflächner genannt, begrenzt von vier gleichseitigen Dreiecken, von denen immer je drei zu einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper hat vier Ecken und sechs Kanten.

2. Das Oktaeder (Fig. 14), auch Achtflächner genannt, begrenzt von acht gleichseitigen Dreiecken, von denen immer

je vier zu einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper hat sechs Ecken und zwölf Kanten.

3. Das Ikosaeder (Fig. 15), auch Zwanzigflächner genannt, begrenzt von zwanzig gleichseitigen Dreiecken, von denen immer je fünf zu einer körperlichen Ecke zusammentreten· dieser Körper hat zwölf Ecken und dreissig Kanten.

Nach dem gleichseitigen Dreieck folgt das gleichseitige Viereck oder Quadrat, in welchem jeder Winkel 90^0 beträgt, weshalb drei Quadrate zur Bildung einer körperlichen Ecke benutzt werden können, weil die Summe der Kantenwinkel $3.90^0 = 270^0$

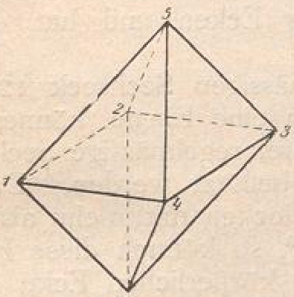

Fig. 14

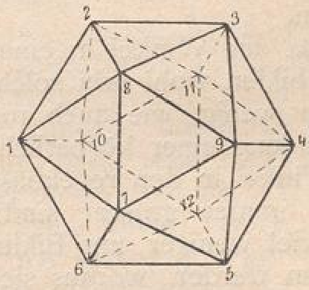

Fig. 15.

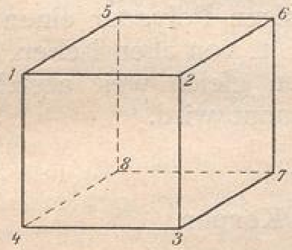

Fig. 16.

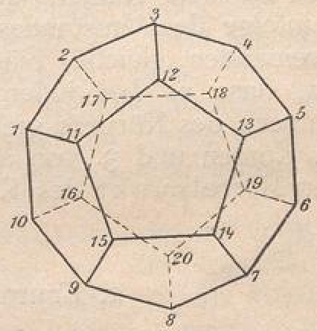

Fig. 17.

kleiner als 360^0, ist. Vier oder mehr Quadrate können keine körperliche Ecke mehr bilden, weil die Summe der Kantenwinkel gleich oder grösser als 360^0 wäre; demnach giebt es nur einen einzigen regelmässigen Polyeder, welcher von Quadraten begrenzt wird, nämlich:

Das Hexander oder der Würfel (Fig. 16), begrenzt von sechs Quadraten, von denen immer je drei zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper hat sechs Ecken und zwölf Kanten.

Nach dem Quadrate folgt das regelmässige Fünfeck, in welchem jeder Winkel 108° beträgt, weshalb drei regelmässige Fünfecke wohl zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten können, da die Summe der Kantenwinkel $3 \cdot 108^0 = 324^0$, noch immer kleiner ist als 360°. Da aber die Summe von vier Umfangswinkeln eines regelmässigen Vierecks $4 \cdot 108^0 = 432^0$, grösser ist als 360°, so können nur drei regelmässige Fünfecke zur Bildung einer körperlichen Ecke herangezogen werden, weshalb es auch hier nur einen einzigen regelmässigen Polyeder giebt, nämlich:

Das Dodekaeder oder den Zwölfflächner (Fig. 17), begrenzt von zwölf regelmässigen Fünfecken, von denen immer je drei zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper wird begrenzt von zwanzig Ecken und hat dreissig Kanten.

Da der Winkel in einem regelmässigen Sechseck 120° beträgt, bilden wohl drei solche Figuren eine Ebene, können aber ebenso wenig, wie auch mehr als drei regelmässige Sechsecke, zur Bildung einer körperlichen Ecke benützt werden. Da aber die Winkel in den regelmässigen Vielecken mit mehr als sechs Seiten immer grösser sind als 120°, so können diese Figuren noch viel weniger zur Bildung einer körperlichen Ecke herangezogen werden, woraus sich ergiebt, dass nur die oben angeführten fünf platonischen Körper gebildet werden können.

Infolge der vollständig gleichmässigen Anordnung der einzelnen Flächen, Kanten und Ecken der regelmässigen Polyeder und infolge des Umstandes, dass die Begrenzungsflächen sämtlich untereinander gleiche Flächenwinkel bilden, ergiebt sich sehr leicht, dass es bei jedem regelmässigen Polyeder einen Punkt im Innern des Körpers giebt, welcher 1. von allen Ecken, 2. von allen Kanten und 3. von allen Flächen gleich weit absteht und daher Mittelpunkt des Körpers genannt wird.

2. Krummflächige Körper.

Diejenigen Körper, welche ganz oder teilweise von krummen Flächen begrenzt werden, heissen krummflächige Körper. In diesem Leidfaden können nur jene krummflächige Körper behandelt werden, welche eine gewisse Regelmässigkeit zeigen oder deren Entstehung bestimmten Gesetzen unterworfen ist. Die hier in Betracht kommenden Körper sind alle von sogenannten Umdrehungsflächen begrenzt, d. h. von Flächen, welche dadurch entstehen, dass bestimmte Linien sich so um eine gerade Linie, Drehungsachse genannt, bewegen, dass jeder Punkt einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in der Drehungsachse liegt. Diese so gebildeten Kreise, welche alle untereinander parallel sind, heissen Meridiane; die Ebenen der einzelnen Meridiane stehen alle auf der Drehungsachse winkelrecht.