Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

a) Der Kegel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

Für den Gewerbetreibenden sind diese Drehkörper deshalb von ganz besonderer Bedeutung, weil sie in der Wirklichkeit auch durch „Drehen“ hergestellt werden, indem ein Werkzeug an dem um eine Achse sich drehenden rohen Arbeitsstück so vorbeigeführt wird, dass die vorstehenden Teile des Arbeitsstückes von dem Werkzeug entfernt werden können.

Ausser diesen Umdrehungskörpern giebt es auch noch andere krummflächige Körper, welche jedoch hier nicht weiter berücksichtigt werden sollen.

a) Der Kegel.

Bewegt sich einer von zwei Strahlen so um den anderen, dass jeder Punkt des beweglichen Strahles einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in dem festliegenden Strahl liegt, so heisst diese so entstandene Fläche, eine Kegelfläche. Der Schnittpunkt oder Scheitelpunkt der beiden Strahlen heisst die Spitze des Kegels; der sich drehende Strahl heisst eine Erzeugende der Kegelfläche, der feststehende aber die Achse die Kegelfläche.

Aus dieser Erklärung ergiebt sich ohne Weiteres, dass jeder Schnitt der Kegelfläche mit einer Ebene winkelrecht zur Kegelachse eine Kreislinie sein muss.

Wird die Kegelfläche durch eine zur Kegelachse winkelrechte Ebene begrenzt, so entsteht ein gerader Kegel, ist aber die schneidende Ebene gegen die Kegelachse geneigt, so entsteht der schiefe Kegel. Die auf diese Weise gebildete Schnittfläche, welche von der Kegelfläche begrenzt wird, heisst die Grundfläche des Kegels, derjenige Teil der Kegelfläche aber, welcher zwischen der Spitze und der schneidenden Ebene liegt, heisst der Mantel des Kegels. Beide zusammen bilden dessen Oberfläche.

Unter der Höhe des Kegels versteht man die Länge der Winkelrechten, welche von der Spitze auf die Grundfläche gefällt werden kann. Bei dem geraden Kegel ist die Kegelachse ebenso gross wie die Höhe, da diese beiden Linien zusammenfallen; bei dem schiefen Kegel ist die Höhe kleiner als die Kegelachse.

Der Kegel kann auch angesehen werden als eine Pyramide, deren Grundfläche unendlich viele, unendlich kleine Seiten hat. Daraus ergiebt sich aber auch, dass sämtliche für die Pyramide geltenden Lehrsätze auch auf den Kegel angewendet werden können, sodass man folgende Sätze erhält:

1. Jeder Schnitt eines Kegels mit einer Ebene, welche durch die Spitze des Kegels geht, ist ein Dreieck.

2. Alle Schnitte eines geraden Kegels mit Ebenen, welche durch die Höhe desselben gehen, sind untereinander deckungsgleich.

3. Alle Schnitte eines geraden Kegels mit Ebenen, welche durch die Spitze des Kegels gehen, sind gleichschenklige Dreiecke.

Wird ein Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so verhält sich die Schnittfläche zur Grundfläche wie die Quadrate der Entfernungen der beiden Ebenen von der Spitze.

Jeder Achsenschnitt eines Kegelstumpfes ist ein Trapez und zwar bei einem geraden Kegel ein gleichschenkliges Trapez.

Die Schnitte eines Kreiskegels mit Ebenen haben wegen der Entstehung der verschiedenartigen Schnittfiguren eine so grosse Bedeutung, insbesondere auch für die Gewerbetreibenden, dass es notwendig erscheint, auf diese Aufgabe hier näher einzugehen, obwohl dieselbe teilweise in das Gebiet der Projektionslehre gehört.

Eine Ebene, welche einen Kreiskegel schneidet, kann folgende Lage haben:

1. Die Ebene geht durch die Spitze des Kegels, wodurch ein gleichschenkliges Dreieck entsteht, dessen Grundseite um so grösser wird, je näher die Schnittebene dem Mittelpunkte der Grundfläche rückt und am grössten wird, wenn die Schnittebene durch die Kegelachse geht.

2. Die Schnittebene ist parallel zur Grundfläche, dann erhält man als Schnitt einen Kreis, der um so grösser ist, je grösser die Entfernung der Schnittebene von der Spitze ist, und um so kleiner, je kleiner die Entfernung von der Spitze ist, und zwar verhalten sich die Schnittflächen ihrer Grösse nach, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

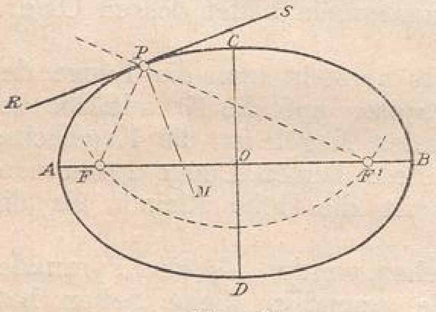

Fig. 18.

3. Ist die Schnittebene geneigt gegen die Grundfläche und trifft dieselbe sämtliche Erzeugenden des Kegels, dann ist der Schnitt eine Ellipse, deren Achsenverhältnis sich um so mehr von der Einheit entfernt, je grösser der Neigungswinkel der Schnittebene mit der Grundfläche wird.

4. Ist die Schnittebene geneigt gegen die Grundfläche, aber parallel zu einer Kegelerzeugenden, so ist der Schnitt eine Parabel und endlich

5. Ist die Scheitelebene geneigt gegen die Grundfläche, aber parallel zu zwei Kegelerzeugenden, so ist der Kegel eine Hyperbel.

Eine Ellipse ist jene Linie, bei welcher die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes P von zwei festen Punkten

F und F_1, Brennpunkte genannt, (Fig. 18) gleich einer bestimmten Linie der grossen Achse ist, d. h. $PF + PF_1 = AB$.

Sind die beiden Achsen AB und CD einer Ellipse gegeben, so findet man die beiden Brennpunkte F und F_1, indem man mit der halben grossen Achse AO als Halbmesser einen Kreisbogen beschreibt, dessen Mittelpunkt der Endpunkt C oder D der kleinen Achse ist; die beiden so erhaltenen Schnittpunkte F und F_1 sind, wie sich aus der oben angegebenen Erklärung für eine Ellipse ergiebt, die Brennpunkte derselben.

Verbindet man einen beliebigen Punkt P der Ellipse mit den beiden Brennpunkten F und F_1, so steht die Halbierungslinie PM dieses Winkels FPF_1 winkelrecht zu dem durch P hindurchgehenden Teil der Ellipse; mithin erhält man eine Berührungslinie RS in diesem Punkte P, wenn man zu dieser Winkelhalbierenden PM eine Winkelrechte errichtet, oder indem man den Nebenwinkel FPF_1 halbiert.

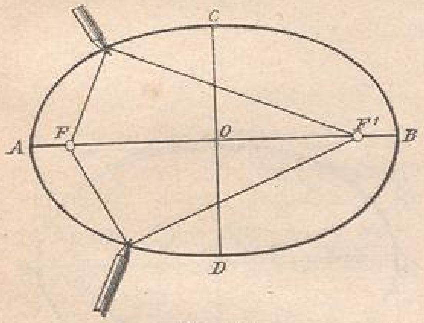

Fig. 19.

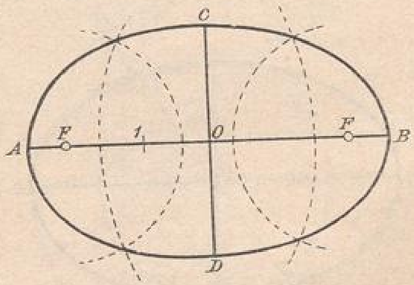

Fig. 20.

Eine Ellipse ist aus den beiden gegebenen Achsen zu zeichnen:

a) Sehr einfach erhält man eine Ellipse, wenn man die Enden eines Fadens von der Länge der grossen Achse AB in den Brennpunkten F und F_1 (Fig. 19) befestigt, und nun mit der Spitze eines Bleistiftes so auf der Zeichenebene hinfährt, dass der Faden stets gespannt erscheint, dann beschreibt die Spitze des Bleistiftes auf der darunter liegenden Papierfläche eine Ellipse. Diese Art der Erzeugung der Ellipse ist bei den Gärtnern besonders beliebt.

b) Sind die beiden Achsen AB und CD (Fig. 20) gegeben, so bestimme man nach der oben angegebenen Art und Weise zunächst die beiden Brennpunkte F und F_1, wobei bemerkt werden soll, dass man die Entfernung der beiden Brennpunkte Excentrizität nennt. Zur Bestimmung eines beliebigen Punktes der Ellipse nehme man irgendwo zwischen den beiden Brennpunkten einen Punkt 1 an und zeichne je einen Kreis, dessen Mittelpunkt je ein Brennpunkt ist, mit einem Halbmesser gleich der Entfernung $1A$ des angenommenen Punktes von dem einen Endpunkt A der grossen Achse; diesen so erhaltenen Kreisbogen durchschneide man durch zwei andere Kreise, deren Mittelpunkte ebenfalls die beiden Brennpunkte sind, für welche aber der Halbmesser gleich der Entfernung des Punktes 1 an dem zweiten Endpunkt B der grossen Achse ist. Die so erhaltenen vier Schnittpunkte der Kreise sind vier Ellipsenpunkte. Durch verschiedene Wahl der Punkte zwischen den beiden Brennpunkten kann man beliebige Ellipsenpunkte erhalten, durch deren folgerichtige Verbindung man dann die Ellipse zeichnen kann.

c) Sind die beiden Achsen AB und CD (Fig. 21) der Ellipse gegeben, so zeichne man über denselben als Durchmesser je einen Kreis und lege durch den Mittelpunkt O einen beliebigen Durchmesser EF, welcher den grossen Kreis 1 und 2 und den kleinen Kreis in 3 und 4 schneidet; durch die Schnittpunkte 1 und 2 mit dem grossen Kreise zeichne man je eine Parallele zur kleinen Achse und durch die Schnittpunkte 3 und 4 mit

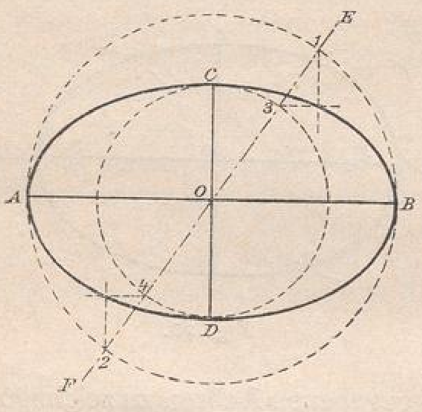

Fig. 21.

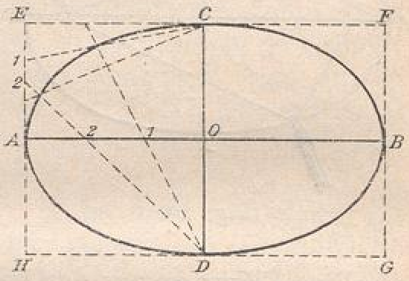

Fig. 22.

dem kleinen Kreise je eine Parallele zur grossen Achse; die Schuittpunkte dieser Parallelen ergeben Ellipsenpunkte. Durch geeignete Wahl der Durchmesser erhält man unter Befolgung der beschriebenen Konstruktion die erforderlichen Punkte, durch deren Verbindung man die Ellipse zeichnen kann.

d) Sind die beiden Achsen AB und CD (Fig. 22) der Ellipse gegeben, so zeichne man ein Rechteck $EFGH$, für welches die Ellipsenachsen die Mittellinien sind und teile die beiden Strecken AO und AE in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile; die so erhaltenen Teilpunkte verbinde man mit den Endpunkten C und D der kleinen Achse, wodurch man als Schnittpunkte der zusammengehörigen Linien Ellipsenpunkte des einen Quadranten erhält. Durch symmetrische Übertragung dieser Konstruktion auf die drei anderen Quadranten erhält man auch dort die erforderliche Anzahl von Ellipsenpunkten, die miteinander durch einen fortlaufenden Linienzug verbunden, die Ellipse ergeben.

e) Die Bauhandwerker zeichnen sehr häufig die Ellipse durch Vergatterung, weshalb hier eine der vielen hierhergehörigen Konstruktionen vorgeführt werden soll. Ist AO die halbe grosse Achse der Ellipse (Fig. 23), CD aber die ganze kleine Achse derselben, so zeichne man über der kleinen Achse als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte grosse Achse in E schneidet; die beiden Strecken OA und OE teile man nun in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile und errichte in den Teilpunkten Winkelrechte, welche selbstverständlich parallel zur kleinen Achse gehen. Durch die Schnittpunkte dieser Winkelrechten mit dem Halbkreise zeichne man Parallele zur grossen Achse und bringe dieselben zum Schnitt mit der dazugehörigen Winkelrechten, welche in den Schnittpunkten der grossen Achse errichtet wurden, wodurch man die gesuchten Ellipsenpunkte erhält.

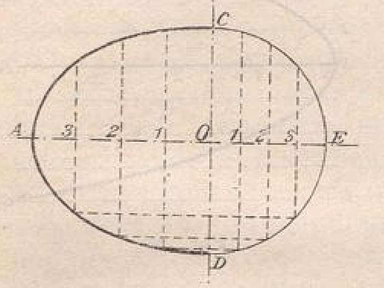

Fig. 23.

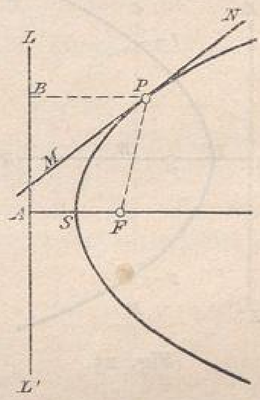

Fig. 24.

Eine Parabel ist jene Linie (Fig. 24) bei welcher jeder Punkt P derselben von einem Punkte F, Brennpunkt genannt, ebenso weit absteht, wie von einer bestimmten Linie LL, Leitlinie genannt, wobei besonders darauf hingewiesen werden soll, dass unter der Entfernung eines Punktes von einer Linie die Länge der Winkelrechten verstanden wird, welche von dem Punkte auf die Linie gefällt werden kann. Der Scheitelpunkt S der Parabel muss mit dem Halbierungspunkte der Entfernung des Brennpunktes F an der Leitlinie LL, zusammenfallen. Die Parabel ist zum Unterschiede von der Ellipse eine unbegrenzte Linie, da sich die beiden Teile bis ins Unendliche erstrecken.

Soll in einem Punkte P der Parabel eine Berührungslinie gezeichnet werden, so verbindet man dieselben mit dem Brennpunkt F, zeichnet die Winkelrechte PB zu der Leitlinie, und halbiert den so gebildeten Winkel BPF, so erhält man die Berührungslinie.

Eine Parabel ist zu zeichnen:

a) Ist die Leitlinie LL, und der Brennpunkt F gegeben (Fig. 25), so zeichnet man nach obigen Angaben zunächst den Scheitelpunkt S der Parabel und jenseits des Scheitelpunktes beliebige Winkelrechte CD zur Achse AH der Parabel; diese Winkelrechte wird durch einen Kreisbogen 1,2 durchschnitten, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt ist, und dessen Halbmesser gleich der Entfernung EA der Winkelrechten von der Leitlinie LL ist; so erhält man zwei Parabelpunkte. Ebenso erhält man weitere Parabelpunkte durch geeignete Wahl der Winkelrechten zur Parabelachse; die folgerichtige Verbindung der erhaltenen Punkte ergiebt die Parabel.

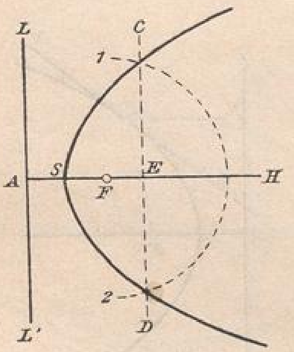

Fig. 25.

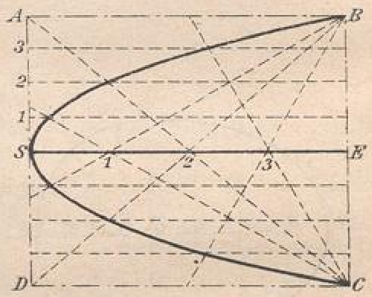

Fig. 26.

b) Soll in das Rechteck $ABCD$ (Fig. 26) eine Parabel so gezeichnet werden, dass der Halbierungspunkt S der Seite AD der Scheitelpunkt derselben ist; aber die Seite AB die Richtung der Achse der Parabel, so teile man die Mittellinie SE und die halbe Rechteckseite SA und SD in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile; durch die Teilpunkte der Rechteckseite AD zieht man zu der Parabelachse Parallele, welche man durch Strahlen durchschneidet, die die Punkte B und C mit den Teilpunkten der Parabelachse verbinden; die so erhaltenen Schnittpunkte ergehen Parabelpunkte, durch deren folgerichtige Verbindung man die Parabel erhält.

c) Sollen die einen Winkel einschliessenden Geraden AH und BY (Fig. 27) durch eine Kurve miteinander so verbunden werden, dass die den Punkten A und B die Anfangspunkte derselben sind, so erfolgt die Überführung der einen Richtung in die andere am zweckmässigsten durch eine Parabel, deren

Zeichnung am einfachsten durch Berührungslinien erfolgt. Zu diesem Zwecke verlängert man die beiden Geraden AX und BY bis zum Schnittpunkt S und teilt die so erhaltenen Strecken AS und BS in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, deren Nummerierung man einerseits bei A, andrerseits bei S beginnt; die Verbindungslinien der mit gleichen Ziffern bezeichneten Teilpunkten ergeben die gesuchten Parabeltangenten, mit deren Hülfe die durch die Punkte A und B hindurchgehende Parabel gezeichnet werden kann.

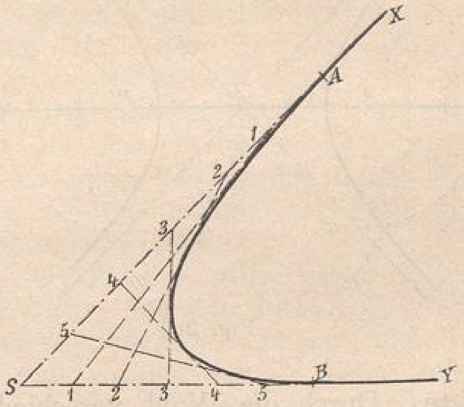

Fig. 27.

Eine **Hyperbel** ist jene Linie, bei welcher der Unterschied der Entfernungen eines jeden Punktes P (Fig. 28) an zwei gegebenen Punkten F und F_1, Brennpunkte genannt, gleich einer bestimmten Linie, der grossen Achse AB ist. Die Hyperbel ist, ebenso wie die Parabel, eine unbegrenzte Linie, welche sich ins Unendliche erstreckt, nur besteht die Hyperbel aus zwei Ästen, welche sowohl nach der grossen Achse, als auch nach der Mittelwinkelrechten MN zu derselben symmetrisch erscheint.

Zeichnet man über der Entfernung der beiden Brennpunkte F und F_1 einen Kreis, durch schneidet denselben durch zwei Winkelrechte zu der grossen Achse, welche man in den Scheitelpunkten A und B errichtet, und verbindet man die so erhaltenen Scknittpunkte durch Gerade parallel zur grossen Achse, so erhält man ein Rechteck $CDEF$, dessen beide Diagonalen CE und DG **Asymptoten** heissen und die Tangenten der Hyperlel in unendlicher Entfernung umgeben, d. h. diesen Linien muss sich die Hyperbel immer mehr und mehr nähern, ohne dieselben jedoch jemals zu erreichen.

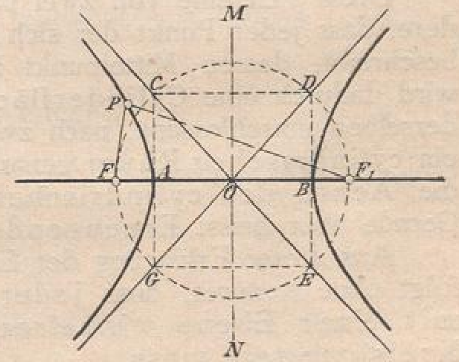

Fig. 28.

Soll eine Hyperbel, deren Brennpunkte F und F_1 und deren Scheitelpunkte A und B gegeben sind gezeichnet werden, so nehme man ausserhalb der Brennpunkte auf der verlängerten grossen Achse irgendwo einen beliebigen Punkt 1 (Fig. 29) vor und beschreibe je einen Kreis *a,a* und *b,b*, dessen Mittelpunkt je ein Brennpunkt ist mit einem Halbmesser gleich der Entfernung des Punktes 1 von dem einen Hyperbelscheitel *A*; diese so erhaltenen Kreisbogen durchschneide man durch zwei andere Kreise *mn* und *op* deren Mittelpunkte ebenfalls die beiden Brennpunkte sind, deren Halbmesser aber die Entfernung des Punktes 1 von dem zweiten Hyperbelscheitel *B* ist. Diese so erhaltenen vier Schnittpunkte der Kreise ergeben vier Hyperbelpunkte. Durch die Wahl verschiedener Punkte auf der Verlängerung der grossen Achse der Hyperbel, ausserhalb der beiden Brennpunkte, ergiebt die erforderliche Anzahl von Hyperbelpunkte, und durch deren folgerichtige Verbindung man die Hyperbel erhält.

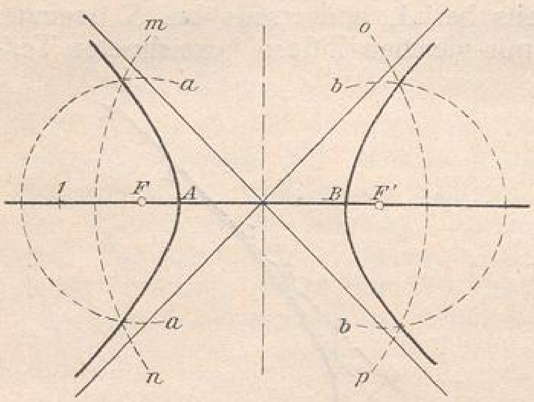

Fig. 29.

b) Der Cylinder.

Dreht sich eine von zwei parallelen Geraden so um die andere, dass jeder Punkt der sich drehenden Geraden einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in der festen Geraden liegt, so wird dadurch eine Cylinderfläche gebildet, während der von derselben umschlossene, nach zwei Seiten hin unbegrenzte Raum ein cylindrischer Raum genannt wird. Die feste Gerade heisst die Achse des cylindrischen Raumes, die sich drehende Gerade aber heisst Erzeugende.

Aus dieser Erklärung der Entstehung einer Cylinderfläche folgt ohne weiteres, dass jeder Schnitt der Cylinderfläche mit einer Ebene winkelrecht zur Cylinderachse eine Kreislinie sein mnss.

Alle Schnitte der Cylinderfläche mit Ebenen winkelrecht zur Cylinderachse sind untereinander deckungs gleiche Kreise.

Wird eine cylindrische Fläche durch zwei untereinander parallele Ebenen begrenzt, so heisst der so allseitig begrenzte Körper ein Cylinder; die beiden ebenen Schnittflächen heissen die Grundflächen, derjenige Teil der Cylinderfläche aber, welcher zwischen den beiden parallelen Schnittflächen liegt, heisst