



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

c) Die Kugel.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76720](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76720)

der Mantel des Cylinders. Die beiden Grundflächen und der Mantel des Cylinders zusammen bilden die Oberfläche desselben.

Unter der Höhe des Cylinders versteht man den Abstand der beiden parallelen Grundflächen.

Stehen die beiden Grundflächen zur Cylinderachse winkelrecht, so nennt man den Cylinder einen geraden, zum Unterschiede von einem schiefen Cylinder, dessen Grundflächen gegen die Cylinderachse geneigt sind. Bei einem geraden Cylinder ist die Höhe desselben ebenso gross wie dessen Achse, bei einem schiefen Cylinder aber ist die Höhe kleiner als die Cylinderachse.

Ebenso wie der Kegel als eine Pyramide mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, ebenso kann auch jeder Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden.

Jeder Schnitt eines Cylinders mit einer Ebene, welche durch die Achse geht, ist ein Parallelogramm, und zwar stimmen dieselben in einem Paare der parallelen Seiten überein. Ist der Cylinder ein gerader, so ist jeder Achsenschnitt ein rechtwinkliges Parallelogramm; ist aber der Cylinder ein schiefer, so ist jeder Achsenschnitt ein schiefwinkliges Parallelogramm.

Jeder Schnitt eines Cylinders mit einer Ebene, parallel zur Cylinderachse, ist ein Parallelogramm und zwar ist dasselbe um so breiter, je kleiner die Entfernung der Schnittebene von der Cylinderachse ist.

Wird ein Cylinder durch eine Ebene geschnitten, welche geneigt zur Cylinderachse steht, so entsteht eine Ellipse.

c) Die Kugel.

Wird ein Halbkreis um seinen Durchmesser so gedreht, dass jeder Punkt der Kreislinie einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in dem feststehenden Kreisdurchmesser liegt, so entsteht eine Kugelfläche; derjenige Körper, der von einer Kugelfläche begrenzt wird, heisst eine Kugel.

Jeder Punkt der Kugeloberfläche ist von dem Mittelpunkte des erzeugenden Kreises gleichweit entfernt, weshalb derselbe auch Mittelpunkt der Kugel heisst. Die Verbindungslinie eines Punktes der Kugeloberfläche mit dem Mittelpunkte derselben heisst Halbmesser; jede gerade Verbindungslinie zweier Punkte der Kugeloberfläche, welche durch den Kugelmittelpunkt geht, heisst Durchmesser; die Endpunkte des Durchmessers heissen Gegenpunkte.

Alle Halbmesser einer Kugel sind untereinander gleich.

Jeder Durchmesser einer Kugel ist doppelt so gross wie ein Halbmesser derselben.

Alle Durchmesser einer Kugel sind untereinander gleich.

Der geometrische Ort aller Punkte im Raume, welche von einem Punkte gleichen Abstand haben, ist die Oberfläche jener Kugel, deren Mittelpunkt der gegebene Punkt ist und deren Halbmesser gleich dem gegebenen Abstände ist.

Ein Punkt liegt ausserhalb, auf oder innerhalb der Oberfläche einer Kugel, je nachdem seine Entfernung grösser, gleich oder kleiner als der Kugelhalbmesser ist.

Jeder Schnitt einer Kugel mit einer Ebene ist ein Kreis.

Eine beliebige Ebene schneide die Kugeloberfläche nach der krummen Linie ABC (Fig. 30). Fällt man von dem Kugelmittelpunkte M auf die Schnittebene eine

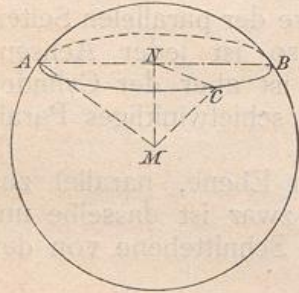


Fig. 30.

Winkelrechte MN , so muss diese (vergleiche Seite 4) mit jeder durch den Fusspunkt N in der Ebene gezogenen Geraden einen rechten Winkel einschliessen. Verbindet man dann zwei beliebige Punkte A und C der Schnittlinie mit dem Kugelmittelpunkte M und dem Fusspunkte N der Winkelrechten MN , so entstehen zwei deckungsgleiche Dreiecke MNA und MNC , da dieselben in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren Seite übereinstimmen ($MN = MN$; $MA = MC$; $\sphericalangle MNA = \sphericalangle MNC = 90^\circ$), woraus die Gleichheit der dritten Seiten $NA = NC$ folgt. Daraus folgt, dass jeder Punkt der Schnittlinie ABC von einem Punkte N den gleichen Abstand hat, also die Schnittlinie ein Kreis sein muss, welcher Kugelkreis genannt wird.

Dieser Lehrsatz folgt auch unmittelbar aus der Erzeugung einer Kugel durch Umdrehung in Bezug auf eine zur Drehungsachse winkelrechte Ebene; da man aber jeden beliebigen Kugeldurchmesser als Drehungsachse ansehen kann, so muss jeder ebene Schnitt mit einer Kugel ein Kreis sein.

Infolge der Gleichheit der Erzeugung eines Kreises und einer Kugel lassen sich alle für die Sehnen eines Kreises geltenden Lehrsätze (vergleiche: Hoch, Ebene Geometrie Seite 25) folgerichtig für die Kugel erweitern und anwenden, so dass man erhält:

1. Gleiche Kugelkreise haben gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte und umgekehrt.

2. Ungleiche Kugelkreise haben ungleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte, und zwar sind die Kugelkreise um so grösser, je kleiner ihre Entfernung vom Kugelmittelpunkte ist und umgekehrt.

3. Diejenigen Kugelkreise, welche durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, sind die grössten aller möglichen Schnittkreise und heissen daher grösste Kugelkreise.

4. Jede Ebene, welche im Endpunkte eines Kugelhalbmessers auf diesem winkelrecht steht, heisst eine Berührungsebene der Kugel, woraus auch umgekehrt folgt, dass der Halbmesser im Berührungspunkte einer Berührungsebene winkelrecht zu dieser steht.

5. Durch einen Punkt einer Kugel lässt sich nur eine einzige Berührungsebene zeichnen.

6. Durch einen Punkt ausserhalb einer Kugel lassen sich unendlich viele Berührungsebenen an dieselbe zeichnen, deren Berührungspunkte alle in dem Umfange eines Kugelkreises liegen.

7. Durch eine Gerade ausserhalb einer Kugel lassen sich an dieselbe nur zwei Berührungsebenen legen.

Jede Ebene, welche eine Kugel schneidet, teilt dieselbe in zwei Teile, welche Kugelabschnitte oder Kugelhauben (Kugel-segmente) genannt werden; der gemeinschaftliche Schnittkreis heisst die Grundfläche jedes Kugelabschnittes, der zu jedem Abschnitt gehörige Teil der Körperoberfläche aber der Mantel des Kugelabschnittes. Der zwischen der Oberfläche der Kugel und der Grundfläche liegende Teil desjenigen Durchmesser, welcher winkelrecht zur Grundfläche steht, heisst die Höhe des Kugelhaube.

Derjenige Teil einer Kugel, welcher begrenzt wird von einem Kugelabschnitt und einem Kegel, dessen Grundfläche mit derjenigen des Abschnittes übereinstimmt, und dessen Spitze im Kugelmittelpunkte liegt, heisst ein Kugelausschnitt.

Der Kugelabschnitt entsteht durch Umdrehung eines Kreisabschnittes um die Mittelwinkelrechte der Sehne, der Kugelausschnitt entsteht durch Umdrehung eines Kreisabschnittes um die Halbierungslinie des Centriwinkels.

Derjenige Teil einer Kugel, welcher von zwei parallelen Kugelkreisen begrenzt wird, heisst eine Kugelzone.

Kugeln mit demselben Mittelpunkt heissen konzentrisch.

Kugeln mit verschiedenem Mittelpunkt heissen exzentrisch.

Die Lage zweier Kugeln (vergleiche Hoch, Ebene Geometrie Seite 32) ist abhängig von der Entfernung ihrer Mittelpunkte voneinander und der Grösse ihrer Halbmesser und zwar können folgende Fälle unterschieden werden:

1. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte grösser als die Summe der Halbmesser, so liegen beide Kugeln ganz ausserhalb einander und haben keinen Punkt miteinander gemeinschaftlich.

2. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte ebenso gross wie die Summe der Halbmesser, so berühren die beiden Kugeln einander ausschliessend und haben eine gemeinschaftliche Berührungsebene, welche winkelrecht auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte steht.

3. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte kleiner als die Summe der beiden Halbmesser und grösser als der Unterschied der beiden Halbmesser, so schneiden die beiden Kugeln einander und haben einen Kugelkreis gemeinschaftlich, dessen Ebene winkelrecht zur Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte steht.

4. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte ebenso gross wie der Unterschied der beiden Halbmesser, so berühren die beiden Kugeln einander einschliessend und haben ebenfalls eine gemeinschaftliche Berührungsebene, welcher winkelrecht auf der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte steht.

5. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte kleiner als der Unterschied der beiden Halbmesser, so liegt die kleinere Kugel ganz innerhalb der grösseren, ohne dass beide Oberflächen auch nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich haben.

6. Ist endlich die Entfernung der Kugelmittelpunkte gleich Null, so heissen die Kugeln konzentrisch.

D. Die Berechnung der Körper.

Bei der Berechnung oder Ausmessung der Körper handelt es sich hauptsächlich um die Bestimmung der Oberfläche und des Rauminhaltes desselben.

Die Oberfläche eines Körpers setzt sich aus einer oder mehreren, teils ebenen, teils krummen Flächen zusammen. Der Flächeninhalt sämtlicher Begrenzungsflächen zusammen genommen ergibt die Oberfläche des Körpers, die häufig aus den beiden Hauptteilen Mantel und Grundfläche zusammengesetzt ist.

Um den Rauminhalt eines Körpers zu bestimmen, vergleicht man denselben mit einem Würfel, dessen Kante ebenso gross ist wie die Längeneinheit. Die Einheit für die Raummessung ist das Kubik- oder Raummeter, d. i. ein Würfel, dessen Seitenkante ein Meter lang ist. Ein Raummeter hat 1000 Raum- oder Kubikdezimeter; ein Kubikdezimeter hat 1000 Kubikzentimeter; ein Kubikzentimeter hat 1000 Kubikmillimeter.

Nur der Rauminhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedes kann durch unmittelbare Vergleichung mit dem Rauminhalte eines Würfels gefunden werden, da nur ein rechtwinkliges Parallelepiped sich durch entsprechende Schnitte in Würfel zerlegen lässt.