Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

b) Der Kegel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

lich Schneide nennt; setzt man daher in die obige Formel für den Inhalt eines Prismatoides für $g = 0$ ein, so erhält man die Formel für die Berechnung eines Keiles mit

$$I = \frac{h}{3}\left(\frac{G}{2} + 2M\right).$$

2. Die runden Körper.

a) Der Cylinder.

Da jeder Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, so werden alle für die Berechnung eines Prismas geltenden Regeln auch für den Cylinder Anwendung finden.

Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche eines geraden Cylinders mit r, die Höhe desselben aber mit h, so ergiebt sich für die Mantelfläche $M = 2\pi r h$, d. h.

der Mantel eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und Höhe.

Die Oberfläche O erhält man, wenn zu der Mantelfläche die doppelte Grundfläche $G = \pi r^2$ hinzugezählt wird, d. h.

$$O = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Der Rauminhalt I eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe oder

$$I = \pi r^2 h.$$

b) Der Kegel.

Ebenso wie der Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, ebenso kann auch ein Kegel als eine Pyramide mit unendlich kleinen Seiten angesehen werden, weshalb alle für eine Pyramide gültigen Regeln auch hier Anwendung finden können.

Für jeden geraden Kreiskegel besteht zwischen den drei Grössen: Halbmesser r der Grundfläche, Höhe h und Länge s der Seitenkante oder Erzeugenden des Kegels folgende wichtige Beziehung

$$s^2 = h^2 + r^2$$

da diese drei geraden Linien für jeden Achsenschnitt ein rechtwinkliges Dreieck bilden, bei dem der Pythagoräische Lehrsatz Anwendung findet.

Um den Mantel eines geraden Kegels zu berechnen, denke man sich denselben längs einer Erzeugenden aufgeschnitten und in eine Ebene abgerollt, dann erhält man einen Kreisausschnitt, dessen Halbmesser ebenso gross ist als die Kegelkante s, während die Länge des Kreisbogens mit dem Umfange $2\pi r$ der Grundfläche übereinstimmt. Der Flächeninhalt dieses Kreisausschnittes wird ebenso wie der Inhalt eines Dreiecks mit der Grundseite $2\pi r$ und der Höhe s berechnet,

$$M = \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \pi r s.$$

Der Mantel eines geraden Kreiskegels ist gleich dem Produkte aus Grundflächen-Halbmesser und Seite, multipliziert mit der Ludolphschen Zahl.

Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels setzt sich aus dessen Mantelfläche M und Grundfläche $G = \pi r^2$ zusammen, weshalb man erhält

$$O = \pi r s \cdot + \pi^2 = \pi r (s + r) \text{ dh.}$$

Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels ist ebenso gross wie die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels mit derselben Grundfläche, dessen Seitenkante gleich ist der um den Halbmesser der Grundfläche vermehrten Seitenkante des Kegels.

Der Rauminhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Grundfläche und Höhe; bezeichnet man daher den Halbmesser der Grundfläche mit r, die Höhe mit h so erhält man:

$$I = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}.$$

c) Der Kegelstumpf.

Auch für den Kegelstumpf gelten dieselben Regeln wie für den Pyramidenstrumpf unter Einführung der runden Grundflächen.

Bezeichnet man die Halbmesser der beiden Grundflächen mit R und r, die Höhe des geraden Kegelstumpfes mit h, die Seitenkante aber mit s, so ergiebt sich für diese vier Grössen folgende wichtige Beziehung

$$s^2 = h^2 + (R - r)^2$$

denn jeder Achsenschnitt eines geraden Kegelstumpfes ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten mit den Durchmessern der beiden Grundflächen übereinstimmen, während die nicht parallelen Seiten gleich den Seitenkanten sind; fällt man von dem Endpunkt der kleineren parallelen Seite in diesem gleichschenkligen Trapeze eine Winkelrechte auf die grössere parallele Seite, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Seitenkante des Kegelstumpfes, dessen eine Kathete die Höhe desselben und dessen zweite Kathete der Unterschied $R - r$ der beiden Grundflächenhalbmesser ist, woraus sich unter Benutzung des Pythagoräischen Lehrsatzes obige Beziehung ergiebt.