Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

c) Der Kegelstumpf.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

die Länge des Kreisbogens mit dem Umfange $2\pi r$ der Grundfläche übereinstimmt. Der Flächeninhalt dieses Kreisausschnittes wird ebenso wie der Inhalt eines Dreiecks mit der Grundseite $2\pi r$ und der Höhe s berechnet,

$$M = \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \pi r s.$$

Der Mantel eines geraden Kreiskegels ist gleich dem Produkte aus Grundflächen-Halbmesser und Seite, multipliziert mit der Ludolphschen Zahl.

Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels setzt sich aus dessen Mantelfläche M und Grundfläche $G = \pi r^2$ zusammen, weshalb man erhält

$$O = \pi r s \cdot + \pi^2 = \pi r (s + r) \text{ dh.}$$

Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels ist ebenso gross wie die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels mit derselben Grundfläche, dessen Seitenkante gleich ist der um den Halbmesser der Grundfläche vermehrten Seitenkante des Kegels.

Der Rauminhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Grundfläche und Höhe; bezeichnet man daher den Halbmesser der Grundfläche mit r, die Höhe mit h so erhält man:

$$I = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}.$$

c) Der Kegelstumpf.

Auch für den Kegelstumpf gelten dieselben Regeln wie für den Pyramidenstrumpf unter Einführung der runden Grundflächen.

Bezeichnet man die Halbmesser der beiden Grundflächen mit R und r, die Höhe des geraden Kegelstumpfes mit h, die Seitenkante aber mit s, so ergiebt sich für diese vier Grössen folgende wichtige Beziehung

$$s^2 = h^2 + (R - r)^2$$

denn jeder Achsenschnitt eines geraden Kegelstumpfes ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten mit den Durchmessern der beiden Grundflächen übereinstimmen, während die nicht parallelen Seiten gleich den Seitenkanten sind; fällt man von dem Endpunkt der kleineren parallelen Seite in diesem gleichschenkligen Trapeze eine Winkelrechte auf die grössere parallele Seite, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Seitenkante des Kegelstumpfes, dessen eine Kathete die Höhe desselben und dessen zweite Kathete der Unterschied $R-r$ der beiden Grundflächenhalbmesser ist, woraus sich unter Benutzung des Pythagoräischen Lehrsatzes obige Beziehung ergiebt.

Um die Mantelfläche eines geraden kreisförmigen Kegelstumpfes mit den Grundflächen-Halbmessern R und r und der Seitenkante s zu bestimmen, denke man sich den Kegelstumpf nach einer Seite aufgeschnitten und in eine Ebene ausgerollt, wodurch man einen Teil eines Kreisringes oder ein Bogentrapez erhält, für welches der Abstand ber beiden Kreisbogen mit der Seitenkante des Kegelstumpfes übereinstimmt und die beiden Kreisbogen ebenso gross sind, wie die Umfänge der beiden Grundflächen. Der Flächeninhalt des Bogentrapezes wird ebenso berechnet, wie der Flächeninhalt eines geradlinigen Trapezes, weshalb man erhält

$$M = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} s = \pi (R + r) s$$

d. h. der Mantel eines Kegelstumpfes ist gleich dem Produkte aus der Summe der beiden Grundflächenhalbmesser und der Seite des Stumpfes multipliziert mit der Ludolphschen Zahl.

Statt dem Produkte aus der Summe der beiden Grundflächenhalbmesser und der Ludolphschen Zahl kann man auch den Umfang des mittleren Schnittes setzen, sodass man auch folgende Regel erhält: der Mantel eines Kegelstumpfes ist gleich dem Produkte aus dem Umfange des mittleren Schnittes multipliziert mit der Seitenkante des Stumpfes.

Die Oberfläche O des Kegelstumpfes erhält man, wenn man die Mantelfläche M und die beiden Grundflächen vermehrt d. h.

$$O = \pi (R + r) s + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Setzt man die Formel den Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes, die besonderen Worte für die Grundflächen eines Kegelstumpfes ein, so erhält man den Rauminhalt I desselben wie folgt:

$$I = \frac{h}{3} (G + g = \sqrt{Gg})$$

$$I = \frac{h}{3} \left(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}\right)$$

$$I = \frac{h}{3} (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r)$$

$$I = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + R r).$$

d) Die Kugel und deren Teile.

Um die Oberfläche einer Kugel zu berechnen, denke man sich dieselbe durch Umdrehung eines regelmässigen Vieleckes um einen Durchmesser desselben entstanden. Die Oberfläche dieses so entstandenen Umdrehungskörpers wird um so mehr sich der Kugeloberfläche nähern, je grösser die Anzahl der Seiten