Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

d) Die Kugel und deren Teile.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

Um die Mantelfläche eines geraden kreisförmigen Kegelstumpfes mit den Grundflächen-Halbmessern R und r und der Seitenkante s zu bestimmen, denke man sich den Kegelstumpf nach einer Seite aufgeschnitten und in eine Ebene ausgerollt, wodurch man einen Teil eines Kreisringes oder ein Bogentrapez erhält, für welches der Abstand ber beiden Kreisbogen mit der Seitenkante des Kegelstumpfes übereinstimmt und die beiden Kreisbogen ebenso gross sind, wie die Umfänge der beiden Grundflächen. Der Flächeninhalt des Bogentrapezes wird ebenso berechnet, wie der Flächeninhalt eines geradlinigen Trapezes, weshalb man erhält

$$M = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} s = \pi (R + r) s$$

d. h. der Mantel eines Kegelstumpfes ist gleich dem Produkte aus der Summe der beiden Grundflächenhalbmesser und der Seite des Stumpfes multipliziert mit der Ludolphschen Zahl.

Statt dem Produkte aus der Summe der beiden Grundflächenhalbmesser und der Ludolphschen Zahl kann man auch den Umfang des mittleren Schnittes setzen, sodass man auch folgende Regel erhält: der Mantel eines Kegelstumpfes ist gleich dem Produkte aus dem Umfange des mittleren Schnittes multipliziert mit der Seitenkante des Stumpfes.

Die Oberfläche O des Kegelstumpfes erhält man, wenn man die Mantelfläche M und die beiden Grundflächen vermehrt d. h.

$$O = \pi (R + r) s + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Setzt man die Formel den Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes, die besonderen Worte für die Grundflächen eines Kegelstumpfes ein, so erhält man den Rauminhalt I desselben wie folgt:

$$I = \frac{h}{3} (G + g = \sqrt{Gg})$$

$$I = \frac{h}{3} \left(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}\right)$$

$$I = \frac{h}{3} (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r)$$

$$I = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + R r).$$

d) Die Kugel und deren Teile.

Um die Oberfläche einer Kugel zu berechnen, denke man sich dieselbe durch Umdrehung eines regelmässigen Vieleckes um einen Durchmesser desselben entstanden. Die Oberfläche dieses so entstandenen Umdrehungskörpers wird um so mehr sich der Kugeloberfläche nähern, je grösser die Anzahl der Seiten des regelmässigen Vielecks ist, also je kleiner die Seiten selbst sind. Infolge der Umdrehung des regelmässigen Vielecks entsteht ein Umdrehungskörper, dessen Oberfläche sich aus den Mantelflächen von Kugelstumpfen zusammensetzt. Um eine Beziehung für diese Mantelflächen der Kugelstumpfe mit den Abmessungen der Kugel zu finden, greife man einen der Kugelstumpfe heraus und untersuche denselben genauer. Der halbe Achsenschnitt eines solchen Kegelstumpfes (Fig. 37) ist ein Trapez $ABED$ mit zwei rechten Winkeln. Bezeichnet man den Mantel des Kegelstumpfes, der durch Umdrehung der geraden Berührungslinie oder Vielecksseite AB gebildet wird mit m, so erhält man (vergleiche Seite 48)

$$m = 2\pi CF \cdot AB$$

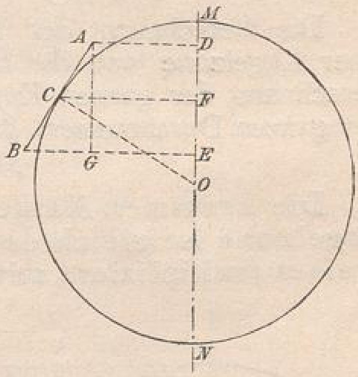

Fig. 37.

wobei CF der Halbmesser des mittleren Schnittes ist. Fällt man von A auf BE die Winkelrechte AG und verbindet C mit O, so entstehen zwei ähnliche Dreiecke ABG und CFO infolge der Übereinstimmung in zwei Winkeln; deshalb haben die zugehörigen Seiten dasselbe Verhältnis.

$$AB : AG = CO : CF$$
$$AB : DE = CO : CF$$
$$AB \cdot CF = CO \cdot DE$$
$$AB \cdot CF = r \cdot DE.$$

Setzt man diesen Wert in die obige Formel für den Mantel m ein, so erhält man

$$m = 2\pi r \cdot DE.$$

d. h. der Mantel eines solchen Teilkegelstumpfes ist gleich dem Umfange des grössten Kugelkreises, multipliziert mit der Projektion der Kegelstumpfseite auf die Umdrehungsachse. Wie aus der Betrachtung der Figur ohne weiteres hervorgeht hat man den Durchmesser $2\,r$ der Kugel für die eben erwähnte Projektion einzusetzen, wenn der Mantel m des einen Kegelstumpfes erweitert wird zu der Oberfläche O der Kugel

$$O = 2\pi r \cdot 2r \cdot = 4\pi r^2.$$

Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so gross wie der Flächeninhalt eines grössten Kugelkreises.

Um den Rauminhalt I einer Kugel zu berechnen, denke man sich dieselbe in eine sehr grossen Anzahl von Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen in der Kugeloberfläche, deren Spitzen aber im Kugelmittelpunkte liegen. Diese Pyramiden haben dann alle den Halbmesser der Kugel zur Höhe, wenn man die Teilchen der Kugeloberfläche möglichst klein gewählt hat.

Der Rauminhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teil aus dem Produkte aus Grundfläche und Höhe, weshalb man für die Berechnung des Rauminhaltes der ganzen Kugel nur die Kugeloberfläche O einzusetzen hat,

$$I = \frac{O \cdot r}{3} = \frac{4\pi r^2 \cdot r}{3} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Die Berechnung der Mantelfläche einer Kugelhaube oder einer Kugelzone von der Höhe h erfolgt ganz ähnlich wie die Berechnung der ganzen Kugeloberfläche, nur hat man an Stelle des ganzen Durchmessers der Kugel nur die Höhe h einzuführen.

$$M = 2\pi r \cdot h.$$

Die krummen Mantelstriche einer Kugelhaube oder Kugelzone ist gleich dem Umfange des grössten Kugelkreises multipliziert mit der Höhe.

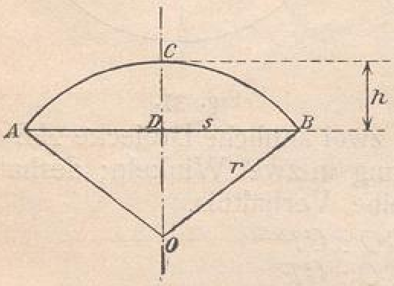

Fig. 38.

Ergänzt man eine Kugelhaube von der Höhe h durch einen Kegel (Fig. 38) dessen Grundfläche die Schnittfläche der Kugel und dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, so erhält man einen Kugelausschnitt. Bezeichnet man den Halbmesser desjenigen Kreises mit welchem die Kegel und die Kugelhaube zusammensetzen mit s, so besteht zwischen den drei Grössen r, h und s folgende Beziehung

$$s^2 + (r-h)^2 = r^2$$
$$s^2 + r^2 - 2rh + h^2 = r^2$$
$$s^2 = 2rh - h^2.$$

Soll die Oberfläche eines Kugelausschnittes berechnet werden, so muss die Mantelfläche der Kugelhaube um die Mantelfläche des Kegels mit dem Grundflächenhalbmesser s und der Seitenkante r vergrössert werden.

$$O = 2\pi rh + \pi rs = \pi r\,(2h + s).$$

Der Rauminhalt eines Kugelausschnittes ist ähnlich zu berechnen wie der Rauminhalt einer Kugel, nur hat an die Stelle der ganzen Kugeloberfläche nur die krumme Mantelfläche M der zugehörigen Kugelhaube zu treten.

$$I = M \cdot \frac{r}{3} = 2\pi r \cdot h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3} \pi r^2 h.$$

Der Rauminhalt eines Kugelausschnittes ist gleich dem Flächeninhalte des grössten Kugelkreises, multipliziert mit der zweidrittelfachen Höhe der dazugehörigen Kugelhaube.

Der Rauminhalt einer Kugelhaube (Fig. 38) ergiebt sich als Unterschied der Rauminhalte eines Kugelausschnittes und des zugehörigen Kegels mit der Höhe $r-h$.

$$I=\frac{2}{3}\pi r^2 h-\frac{\pi s^2(r-h)}{3}$$

$$s^2=2rh-h^2$$

$$I=\frac{2}{3}\pi r^2 h-\frac{\pi}{3}(2rh-h^2)(r-h)$$

$$I=\frac{2}{3}\pi r^2 h-\frac{\pi}{3}(2r^2h-3rh^2+h^3)$$

$$I=\frac{2}{3}\pi r^2 h-\frac{2}{3}\pi r^2 h+\pi r h^2-\frac{\pi h^3}{3}$$

$$I=\pi r h^2-\frac{\pi h^3}{3}$$

$$I=\frac{\pi h^2}{3}(3r-h).$$

Der Rauminhalt einer Kugelzone (Fig. 39) von der Höhe h mit den Grundflächenhalbmessern s und s_1 herausgeschnitten aus einer Kugel mit dem Halbmesser r ergiebt sich als Unterschied zweier Kugelhauben mit den Höhen H und h mit

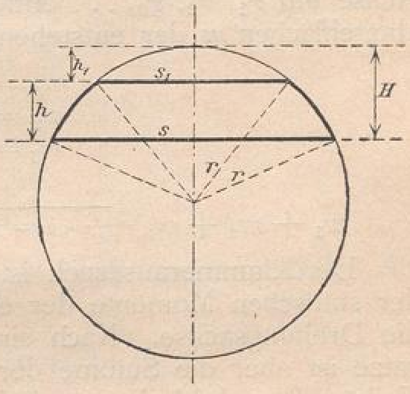

Fig. 39.

$$I=\frac{\pi H^2}{3}(3r-H)-\frac{\pi h_1^2}{3}(3r-h_1)$$

wobei zwischen den einzelnen hier in Betracht kommenden Grössen folgende Beziehungen bestehen, welche unter Berücksichtigung eines Achsenschnittes sich aus der Figur ergeben:

$$h=H-h_1$$

$$r^2=s^2-(r-H)^2$$

$$r^2=s_1^2-(r-h_1)^2$$

$$r^2=s^2-(r-H)^2=s_1^2-(r-h_1)^2$$

$$s^2-r^2+2rH-H^2=s_1^2-r^2+2rh_1-h_1^2$$

$$2r(H-h_1)=s_1^2-s^2+H^2-h_1^2$$

$$H=h+h_1$$

$$2r\cdot h=s_1^2-s^2+h^2+2hh_1.$$