Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

e) Die Umdrehungskörper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

e) Die Umdrehungskörper.

Wenn auch der Cylinder, Kugel, Kugelstumpf, die Kugel und einzelne Teile derselben als Umdrehungskörper angesehen werden können, so soll hier besonders der allgemeinen Umdrehungskörper gedacht werden, um die Oberfläche und den Rauminhalt derselben zu bestimmen. Bemerkt muss jedoch werden, dass eine genaue Abteilung der Formeln hier nicht stattfinden kann, weil die nötigen Unterlagen fehlen.

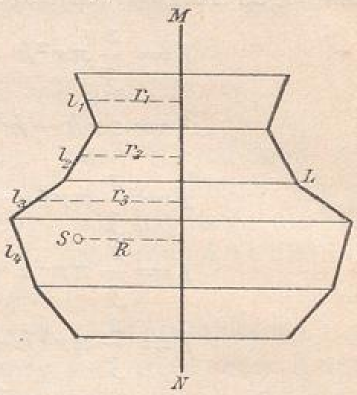

Fig. 40.

Entsteht durch Umdrehung des gebrochenen Linienzuges L, (Fig. 40) welcher aus den kleinen Teilstrecken $l_1, l_2, l_3, \ldots$ besteht um die Umdrehungsachse MN ein Körper in der Weise, dass die Mitten der einzelnen Teilstrecken von der Achse um $r_1, r_2, r_3, \ldots$ entfernt sind, so erhält man für die Mantelflächen m der entstehenden Kegelstumpfe (vergl. Seite 48)

$$m_1 = 2\pi r_1 \cdot l_1$$
$$m_2 = 2\pi r_2 \cdot l_2$$
$$m_3 = 2\pi r_3 \cdot l_3$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = 2\pi (r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + \cdots).$$

Der Klammerausdruck ist aber nichts anderes als die Summe der statischen Momente der einzelnen Teilstrecken, bezogen auf die Drehungsachse. Nach einem bekannten mechanischen Lehrsatze ist aber die Summe der statischen Momente der einzelnen Teilstrecken gleich dem statischen Moment des ganzen Linienzuges L bezogen auf dieselbe Achse, weshalb man als Umdrehungshalbmesser den Abstand R des Schwerpunktes S des ganzen Linienzuges von der Umdrehungsachse zu nehmen hat.

$$r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_2 + \cdots\cdots = LR$$
$$O = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$$
$$O = 2\pi R \cdot L.$$

Die Oberfläche eines Umdrehungskörpers ist gleich der Länge des sich drehenden Linienzuges multipliziert mit dem Umfange desjenigen Kreises den der Schwerpunkt beschreibt (I. Guldini'sche Regel.).

Um den Rauminhalt eines durch Umdrehung eines Linienzuges entstehenden Körpers zu bestimmen, versuche man zunächst die oben gegebene Regel für den Rauminhalt eines Kegelstumpfes in Beziehung zu bringen zu dem Umfange desjenigen fange desjenigen Kreises, den der Schwerpunkt des halben Achsenschnitt bei der Umdrehung beschreibt.

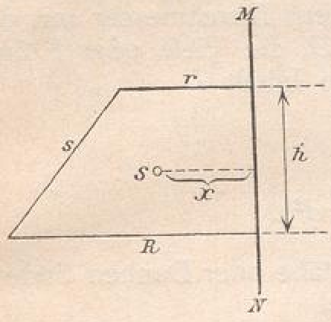

Fig. 41.

Der Rauminhalt i eines Kegelstumpfes (Fig. 41) mit den Grundflächenhalbmessern R und r und der Höhe h ist

$$i = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$

Bezeichnet man die Entfernung des Schwerpunktes S von der Umdrehungsachse MN mit x so ergiebt sich nach einem bekannten mechanischen Satze über die Lage des Schwerpunktes

$$x = \frac{R^2 + Rr + r^2}{3(R+r)}.$$

Bezeichnet man endlich mit F den Flächeninhalt des Halbachsenschnittes, so ergiebt sich derselbe mit

$$F = \frac{R+r}{2} \cdot h$$

oder durch Einsetzung in den Wert für

$$x = \frac{(R^2 + Rr + r^2)\, h}{3 \cdot 2F}$$

woraus folgt

$$R^2 + Rr + r^2 = \frac{6Fx}{h}$$

mithin durch Einsetzung in die Formel i für den Rauminhalt des Kegelstumpfes

$$i = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{6Fx}{h} = 2\pi x \cdot F.$$

Der Rauminhalt dieses Kegelstumpfes wird also auch gefunden, wenn man den Flächeninhalt seines halben Achsenschnittes mit dem Umfange jenes Kreises multipliziert, den der Schwerpunkt der erzeugenden Fläche beschreibt.

Erweitert man diesen Satz sinngemäss unter Anwendung entsprechender Lehrsätze aus der Mechanik, so erhält man die II. Guldini'sche Regel: Der Rauminhalt eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkte aus dem Flächeninhalte der erzeugenden Fläche und dem Umfange jenes Kreises, den der Schwerpunkt beschreibt.

Der Vollständigkeit wegen seien hier noch die Regeln für die Bestimmung des Rauminhaltes eines Fasses angegeben, ohne auf eine Ableitung derselben näher einzugehen. Bemerkt soll nur werden, dass je nach der Form der Mantelfläche, bezw. je nachdem dieselbe durch Umdrehung eines Kreisbogens, eines

Ellipsenbogens oder eines Parabelbogens entstanden gedacht, und eine grössere oder geringere Genauigkeit gewünscht worden ist, sich die untenstehenden verschiedenen Werte ergeben haben.

Bezeichnet man den kleinsten (Boden) Durchmesser mit d, dem grössten (Bauch) Durchmesser mit D, die Tiefe oder Höhe des Fasses mit h, so ergiebt sich für den Inhalt I

$$I = \frac{\pi h}{12}(2D^2 + d^2)$$

$$I = \frac{\pi h}{12}(D^2 + Dd + d^2).$$

Bei sehr starken Krümmungen der Fassstäbe oder Dauben findet man den Inhalt genauer nach der Formel

$$I = \frac{\pi h}{12}\left(\frac{2D + d}{3}\right)^2.$$