Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

a) Das Prisma.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

1. Die eckigen Körper.

a) Das Prisma.

Die Oberfläche eines Prismas setzt sich zusammen aus der Mantelfläche und den beiden Grundflächen.

Die Mantelfläche eines Prismas besteht aus so vielen Parallelogrammen als das Prisma Seiten hat. Ist das Prisma ein gerades Prisma, so sind die sämtlichen Seitenflächen Rechtecke mit übereinstimmender Höhe, weshalb man dann die Mantelfläche erhält, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe oder der Seitenkante multipliziert.

Ein schief abgeschnittenes Prisma nennt man jenen prismatischen Raum, der durch zwei nicht parallele Grundflächen begrenzt wird. Die Seitenflächen eines solchen schief abgeschnittenen Prismas sind immer Trapeze, welche einzeln berechnet werden müssen, wenn man die Mantelfläche dieses Körpers bestimmen will.

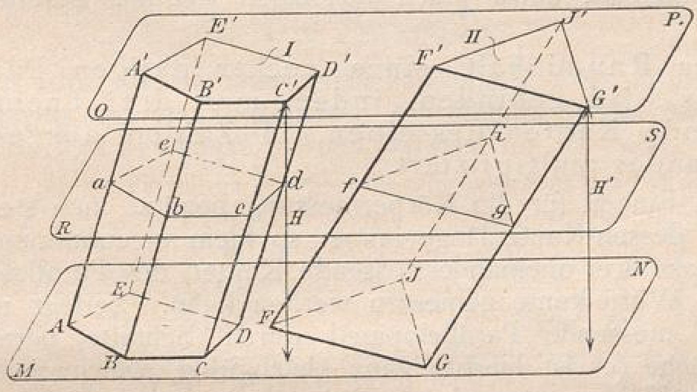

Fig. 31.

Die Oberfläche eines schief abgeschnittenen Prismas setzt sich auch zusammen aus der Mantelfläche und den beiden Grundflächen, nur sind diese beiden nicht gleich, sondern sowohl der Grösse als auch nach der Gestalt verschieden.

Der Rauminhalt zweier Prismen mit gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich (Cavalieri'sches Prinzip).

Sind die Grundflächen $ABCDE$ und FGI der beiden Prismen I und II (Fig. 31) gleich, und haben dieselben ausserdem gleiche Höhen H und H^1, so kann man diese beiden Körper so zwischen zwei parallele Ebenen MN und OP so legen, dass ihre Grundflächen in diese Ebenen hineinfallen. Schneidet man nun beide Prismen durch eine Ebene RS parallel zu der Grundrissebene MN, so ist der so entstehende Schnitt $abcde$ in dem Prisma I mit der Grundfläche $ABCDE$ deckungsgleich (vergleiche Seite 20); ebenso ist der entstehende Schnitt *fgi* in dem Prisma II mit der Grundfläche *FGI* deckungsgleich; da aber die beiden Grundflächen *ABCDE* und *FGI* inhaltsgleich sind, so müssen auch die Schnittfiguren *abcde* und *fgi* mit der Ebene *RS* inhaltsgleich sein. Da für jede beliebige, zur Grundfläche parallele Ebene die Gleichheit der Schnittfiguren folgt, so kann man diese beiden Prismen auch durch zwei Ebenen schneiden, deren Abstand voneinander so klein ist, dass man von der Dicke der so entstehenden Schichte absehen, und diese Schichten gewissermassen als ebene Figuren betrachten kann. Sind aber alle Schichten, welche durch Schnitte mit solchen parallelen Ebenen entstanden sind, untereinander inhaltsgleich, so müssen auch die ganzen Prismen inhaltsgleich sein, welche sich aus einer gleichen Anzahl inhaltsgleicher Schichten zusammensetzen.

Demnach ist es nur nötig, festzustellen, auf welche Weise man den Rauminhalt eines einzigen Prismas bestimmt, um dann den Rauminhalt eines jeden beliebigen Prismas bestimmen zu können.

Der Rauminhalt eines rechtwinkligen Parallelopipedes wird gefunden, indem man drei aneinanderstossende Kanten desselben, in Zahlen ausgedrückt, miteinander multipliziert.

Als Einheit für die Körpermessung benützt man stets einen Würfel, dessen Kantenlänge immer so klein angenommen werden kann, dass drei aneinanderstossende Kanten des Parallelopipedes mit der Würfelkante gemessen werden kann. Zerlegt man nun das zu messende Parallelopiped durch Schnitte parallel zur Grundfläche (es ist hierbei ganz gleichgültig, welche Seitenfläche als Grundfläche angesehen wird, doch muss eine zunächst angenommen werden, wodurch dann die dritte Seitenkante gleich der Höhe wird) in ebenso vielfache Scheiben von der Länge der Würfelkante, als die Würfelkante in der Höhe als dritte Seite des Parallelopiped aus enthalten ist, so sind diese Scheiben nach dem Cavalierischen Prinzipe untereinander inhaltsgleich. Jede dieser Scheiben zerlegt man nun zunächst in so viele parallelopipedische Stäbe, deren Grundfläche gleich einer Würfelfläche ist und deren Höhe gleich der dritten Kante des Parallelopipedons ist; die Anzahl dieser Stäbe ist so gross wie die Grösse der Würfelkante in der zweiten Kante des Parallelopipedas enthalten ist. Auch diese parallelopipedischen Stäbe sind untereinander inhaltsgleich. Jeden prismatischen Stab kann man nun endlich in so viel Würfel zerlegen, als die Würfelkante in der dritten Kante des ursprünglichen Parallelopipedes enthalten ist. Die Würfelkante ist nach der Voraussetzung gleich der Längeneinheit, folglich enthält das Parallelopiped so viel prismatische Stäbe als das Produkt der ersten und zweiten Kante des Parallopipedes angiebt, selbstverständlich beide gemessen mit der Würfelkante als Einheit. Die Anzahl der Einheitswürfel ergiebt sich demnach, wenn man die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten des Parallelopipedes, gemessen mit der Würfelkante, in Zahlen ausgedrückt miteinander multipliziert.

Der Inhalt eines Würfels ist gleich der dritten Potenz (Kubus) seiner Kante.

Der Rauminhalt eines jeden Prismas ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe, wobei jedoch beiden Messungen dieselbe Masseinheit zu Grunde gelegt werden muss.

Da man (vergleiche Seite 37) jedes Prisma in ein rechtwinkliges Parallelopiped mit übereinstimmender Grundseite und Höhe verwandeln kann, und da der Inhalt des Parallelopipedes sich aus dem Produkte aus Grundfläche und Höhe ergiebt, so muss jedes Prisma, gleichgültig, ob es gerade oder schief ist, auf genau die gleiche Weise berechnet werden.

b) Die Pyramide.

Die Oberfläche einer jeden Pyramide setzt sich aus der Mantelfläche und der Grundfläche zusammen, welche einzeln als ebene Flächen berechnet werden müssen.

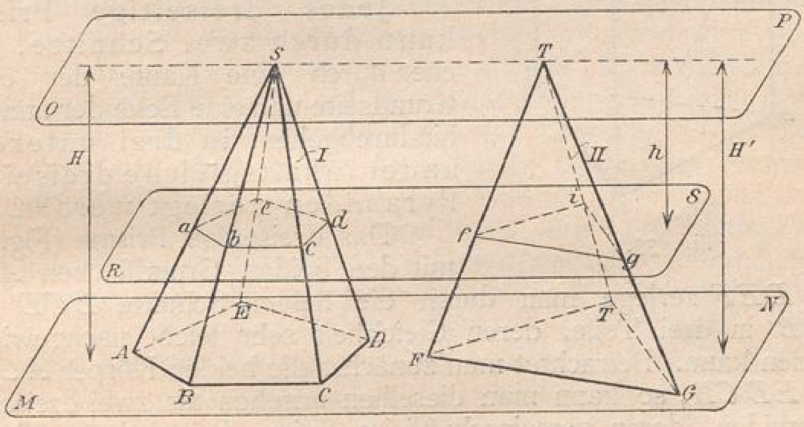

Fig. 32.

Die Mantelfläche einer jeden Pyramide setzt sich aus soviel Dreiecken zusammen, wie die Pyramidengrundfläche Seiten hat. Die Mantelfläche einer geraden regelmässigen Pyramide ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und der Seitenhöhe. Unter der Seitenhöhe versteht man die Höhe eines der untereinander deckungsgleichen Seitendreiecke.

Pyramiden mit gleichen Grundflächen und Höhen sind inhaltsgleich.

Sind die Grundflächen $ABCDE$ und FGI der beiden Pyramiden I und II (Fig. 32) gleich, und haben dieselben gleiche