Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

b) Die Pyramide.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

pipedes angiebt, selbstverständlich beide gemessen mit der Würfelkante als Einheit. Die Anzahl der Einheitswürfel ergiebt sich demnach, wenn man die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten des Parallelopipedes, gemessen mit der Würfelkante, in Zahlen ausgedrückt miteinander multipliziert.

Der Inhalt eines Würfels ist gleich der dritten Potenz (Kubus) seiner Kante.

Der Rauminhalt eines jeden Prismas ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe, wobei jedoch beiden Messungen dieselbe Masseinheit zu Grunde gelegt werden muss.

Da man (vergleiche Seite 37) jedes Prisma in ein rechtwinkliges Parallelopiped mit übereinstimmender Grundseite und Höhe verwandeln kann, und da der Inhalt des Parallelopipedes sich aus dem Produkte aus Grundfläche und Höhe ergiebt, so muss jedes Prisma, gleichgültig, ob es gerade oder schief ist, auf genau die gleiche Weise berechnet werden.

b) Die Pyramide.

Die Oberfläche einer jeden Pyramide setzt sich aus der Mantelfläche und der Grundfläche zusammen, welche einzeln als ebene Flächen berechnet werden müssen.

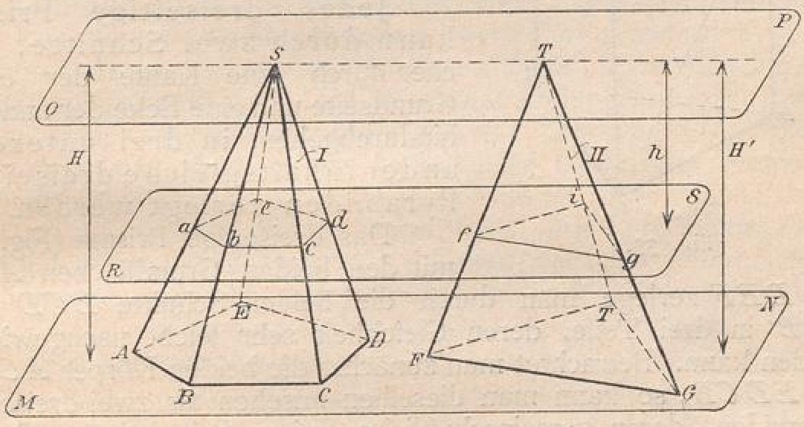

Fig. 32.

Die Mantelfläche einer jeden Pyramide setzt sich aus soviel Dreiecken zusammen, wie die Pyramidengrundfläche Seiten hat. Die Mantelfläche einer geraden regelmässigen Pyramide ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und der Seitenhöhe. Unter der Seitenhöhe versteht man die Höhe eines der untereinander deckungsgleichen Seitendreiecke.

Pyramiden mit gleichen Grundflächen und Höhen sind inhaltsgleich.

Sind die Grundflächen $ABCDE$ und FGI der beiden Pyramiden I und II (Fig. 32) gleich, und haben dieselben gleiche

Höhen H und H^1, so lassen sie sich so auf eine Ebene MN stellen, dass ihre Spitzen S und T in einer zu MN parallelen Ebene OP liegen, deren Abstand von der ersten Ebene gleich der Höhe der Pyramide ist. Schneidet man nun beide Pyramiden durch eine zu der Ebene MN parallele Ebene RQ, deren Abstand von der Ebene OP oder von den Spitzen der Pyramiden h ist, so ergiebt sich (vergleiche Seite 19) für diese so erhaltenen Schnittflächen $abcde$ und fgi folgendes:

$$\begin{array}{rl} ABCDE : abcde & = H^2 : h^2 \\ FGI : fgi & = H^2 : h^2 \\ \hline ABCDE : abcde & = FGI : fgi \\ ABCDE & = FGI \text{ (nach der Vorauss.)}. \\ \hline abcde & = fgi \end{array}$$

Dies gilt aber für jeden beliebigen Schnitt mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene, mithin muss nach dem Cavalierischen Prinzipe, (vergleiche Seite 37) welches für jeden Körper Gültigkeit hat, der Rauminhalt zweier Pyramiden mit übereinstimmenden Grundflächen und Höhen gleich sein.

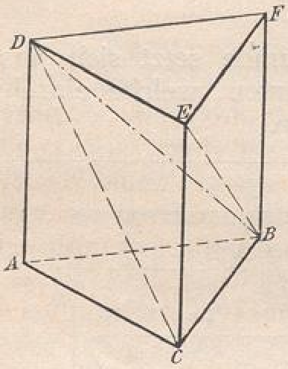

Fig. 33.

Jedes dreiseitige Prisma kann durch zwei Schnitte, welche durch eine Kante der einen Grundseite und eine Ecke der anderen hindurchgehen, in drei untereinander inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden.

Das dreiseitige Prisma (Fig. 33) mit den beiden Grundflächen ABC und DEF zerlege man durch die beiden Schnitte BCD und DEB in drei Teile, deren Gleichheit sehr leicht nachgewiesen werden kann. Betrachtet man zunächst die beiden Körper $ACDB$ und $EDCB$, so kann man dieselben ansehen als zwei dreiseitige Pyramiden, deren gemeinschaftliche Spitze B ist, deren Grundflächen ADC und DCE aber in in der einen Begrenzungsfläche $ADEC$ des gegebenen Prismas liegen; mithin haben diese beiden Pyramiden dieselbe Höhe, als Winkelrechte von der Spitze B auf die gemeinschaftliche Grundflächenebene $ADEC$; die beiden Grundflächen ADC und ECD sind aber auch inhaltsgleich, da es die beiden Teildreiecke sind, in welche das Parallelogramm $ADEC$ durch die Diagonale DC geteilt wird, mithin sind diese beiden dreiseitigen Pyramiden (Grundfläche ADC, Spitze in B und Grundfläche DEC, Spitze in B) inhaltsgleich. Vergleicht man nun die beiden Körper $CBED$ und $FEBD$ miteinander, so können dieselben auch als zwei dreiseitige Pyramiden mit ge meinschaftlicher Spitze in D angesehen werden, deren Grundflächen CEB und FBE aber in der Seitenfläche $EFBC$ des gegebenen dreiseitigen Prismas liegen; mithin haben diese beiden dreiseitigen Pyramiden eine gemeinschaftliche Höhe, als Winkelrechte von der Spitze D auf die Grundfläche $EFBC$. Die beiden Grundflächen EBC und BEF aber sind ebenfalls als Teildreiecke des Parallelogramms $CBFE$, bewirkt durch die Diagonale BE inhaltsgleich, woraus auch die Inhaltsgleichheit der beiden Körper $CBED$ und $EFBD$ folgt. Da aber die drei Körper $ABCD$ $CBED$ und $DEFB$ untereinander gleich sind, zusammen aber das gegebene dreiseitige Prisma $ABCDEF$ ausmachen, so muss jeder der drei Körper, infolge seiner Inhaltsgleichheit mit den andern beiden, gleich dem dritten Teil des Rauminhaltes des gegebenen Prismas sein.

Der Rauminhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teile aus dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Da immer zwei Pyramiden mit übereinstimmenden Grundflächen und Höhen denselben Rauminhalt haben, so ist es nur nötig, den Rauminhalt einer einzigen Pyramide durch Rechnung festzustellen, um dann im stande zu sein, jede beliebige Pyramide zu berechnen. Nach den oben bewiesenen Lehrsätzen kann man jede dreiseitige Pyramide zu einem dreiseitigen Prisma mit übereinstimmender Grundseite und Höhe ergänzen, dessen Rauminhalt dreimal so gross ist, wie der Rauminhalt der Pyramide selbst. Mithin erhält man den Rauminhalt einer dreiseitigen Pyramide, indem man das Produkt aus Grundfläche und Höhe derselben durch drei dividiert.

Auf die gleiche Weise muss man aber den Rauminhalt einer jeden beliebigen Pyramide erhalten, da zwei solche Körper mit übereinstimmenden Grundflächen und Höhen inhaltsgleich sind, mithin jede in eine dreiseitige Pyramide mit gleicher Grundfläche und übereinstimmender Höhe verwandelt werden kann.

Ein schiefabgeschnittenes, dreiseitiges Prisma ist dem Rauminhalte nach ebenso gross, wie drei Pyramiden mit derselben Grundfläche wie das dreiseitige Prisma und einer Höhe, welche den drei Seitenkanten des Prismas entspricht, wobei vorausgesetzt ist, dass die Seitenkanten des Prismas winkelrecht zur Grundfläche stehen.

Zunächst zerlege man das dreiseitige Prisma (Fig. 34) durch zwei Schnitte in drei dreiseitige Pyramiden, indem man einerseits durch A, E und C eine Ebene legt, und durch D, E und C die zweite Ebene legt, wodurch die drei dreiseitigen Pyramiden $ABCE$, $ADEC$ und $DEFC$ entstehen. Von diesen drei Pyramiden hat die eine $ABCE$, wie aus der Figur ohne weiteres zu ersehen ist, die Grundfläche ABC und in E die Spitze, folglich hat sie die eine Seitenkante BE zur Höhe. Wird die zweite Pyramide $ADEC$ mit einer Pyramide $BACD$ verglichen, welche dadurch entsteht, dass durch die drei Punkte B, C und D eine Ebene gelegt wird, so ergiebt sich deren Inhaltsgleichheit, da dieselben in der Grundfläche ACD übereinstimmen, die beiden Spitzen E und B aber in einer zu der Grundfläche parallelen Geraden EB liegen, mithin auch gleiche Höhe haben; die zweite Teilpyramide $EACD$ ist demnach ebenso gross wie eine Pyramide $ABCD$ mit der Grundfläche ABC und der Höhe AD. Die dritte Teilpyramide $ECDF$ endlich wird mit einer anderen dreiseitigen Pyramide verglichen, welche dadurch entsteht, dass man durch die drei Punkte B, A und F eine Ebene legt; die beiden Dreiecke ECF und BCF sind infolge ihrer Übereinstimmung in der Grundseite FC und der Höhe, als Abstand der beiden Parallelen BE und FC, inhaltsgleich, mithin haben die beiden Pyramiden $ECDF$ und $ABCF$ übereinstimmende Grundflächen, wenn man die eben genannten Dreiecke als solche ansieht. Die gegenüberliegenden Spitzen A und D liegen aber in einer zu der Fläche $BCFE$, parallelen Geraden AD, mithin haben die beiden Pyramiden $ECDF$ und $ABCF$ auch übereinstimmende Höhen, als Abstand der Geraden AD von der Ebene $BCFE$, woraus die Inhaltsgleichheit dieser Pyramide folgt. Demnach setzt sich das schiefabgeschnittene Prisma wirklich aus drei Pyramiden zusammen, welche die Grundfläche ABC gemeinschaftlich haben und deren Spitzen in den Eckpunkten D, E und F der oberen Grundfläche liegen, mithin die drei Seitenkanten AD, BE und CF zu Höhen haben.

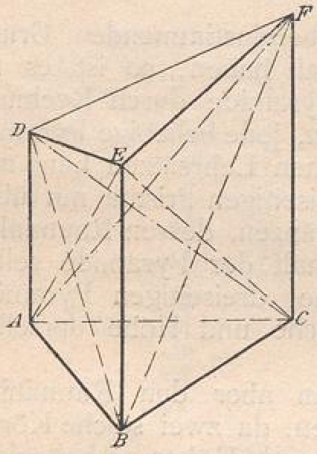

Fig. 34.

c) Der Pyramidenstumpf.

Die Mantelfläche eines Pyramidenstumpfes setzt sich aus so vielen Trapezen zusammen, wie der Stumpf Seiten hat. Ist der Pyramidenstumpf ein regelmässiger, so sind die einzelnen Seitenflächen untereinander gleich, und man hat nur nötig, den Flächeninhalt einer Seitenfläche (Trapez) mit der Anzahl der Seiten zu multiplizieren. Unter Berücksichtigung des Lehrsatzes für die Mittellinie eines Trapezes (vergl. Hoch, Ebene Geometrie Seite 52) ergiebt sich folgende Regel:

Die Mantelfläche eines geraden regelmässigen Pyramidenstumpfes ist gleich dem Produkte aus dem