# Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

c) Der Pyramidenstumpf.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

lich hat sie die eine Seitenkante $BE$ zur Höhe. Wird die zweite Pyramide $ADEC$ mit einer Pyramide $BACD$ verglichen, welche dadurch entsteht, dass durch die drei Punkte $B$, $C$ und $D$ eine Ebene gelegt wird, so ergiebt sich deren Inhaltsgleichheit, da dieselben in der Grundfläche $ACD$ übereinstimmen, die beiden Spitzen $E$ und $B$ aber in einer zu der Grundfläche parallelen Geraden $EB$ liegen, mithin auch gleiche Höhe haben; die zweite Teilpyramide $EACD$ ist demnach ebenso gross wie eine Pyramide $ABCD$ mit der Grundfläche $ABC$ und der Höhe $AD$. Die dritte Teilpyramide $ECDF$ endlich wird mit einer anderen dreiseitigen Pyramide verglichen, welche dadurch entsteht, dass man durch die drei Punkte $B$, $A$ und $F$ eine Ebene legt; die beiden Dreiecke $ECF$ und $BCF$ sind infolge ihrer Übereinstimmung in der Grundseite $FC$ und der Höhe, als Abstand der beiden Parallelen $BE$ und $FC$, inhaltsgleich, mithin haben die beiden Pyramiden $ECDF$ und $ABCF$ übereinstimmende Grundflächen, wenn man die eben genannten Dreiecke als solche ansieht. Die gegenüberliegenden Spitzen $A$ und $D$ liegen aber in einer zu der Fläche $BCFE$, parallelen Geraden $AD$, mithin haben die beiden Pyramiden $ECDF$ und $ABCF$ auch übereinstimmende Höhen, als Abstand der Geraden $AD$ von der Ebene $BCFE$, woraus die Inhaltsgleichheit dieser Pyramide folgt. Demnach setzt sich das schiefabgeschnittene Prisma wirklich aus drei Pyramiden zusammen, welche die Grundfläche $ABC$ gemeinschaftlich haben und deren Spitzen in den Eckpunkten $D$, $E$ und $F$ der oberen Grundfläche liegen, mithin die drei Seitenkanten $AD$, $BE$ und $CF$ zu Höhen haben.

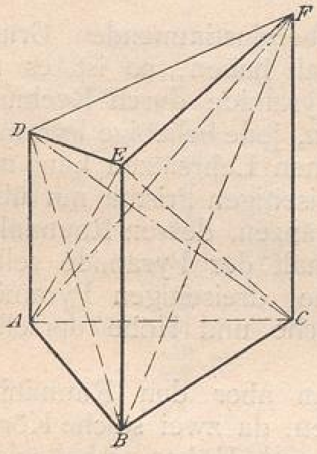

Fig. 34.

### c) Der Pyramidenstumpf.

Die Mantelfläche eines Pyramidenstumpfes setzt sich aus so vielen Trapezen zusammen, wie der Stumpf Seiten hat. Ist der Pyramidenstumpf ein regelmässiger, so sind die einzelnen Seitenflächen untereinander gleich, und man hat nur nötig, den Flächeninhalt einer Seitenfläche (Trapez) mit der Anzahl der Seiten zu multiplizieren. Unter Berücksichtigung des Lehrsatzes für die Mittellinie eines Trapezes (vergl. Hoch, Ebene Geometrie Seite 52) ergiebt sich folgende Regel:

Die Mantelfläche eines geraden regelmässigen Pyramidenstumpfes ist gleich dem Produkte aus dem

Umfange des mittleren Schnittes und der Seitenhöhe des Stumpfes.

Der Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes ist gleich der Summe des Rauminhalts dreier Pyramiden von der Höhe des Stumpfes, an denen die erste die grosse Grundfläche, die zweite die kleine Grundfläche und die dritte die mittlere geometrische Proporzionale aus beiden Grundflächen zur Grundfläche hat.

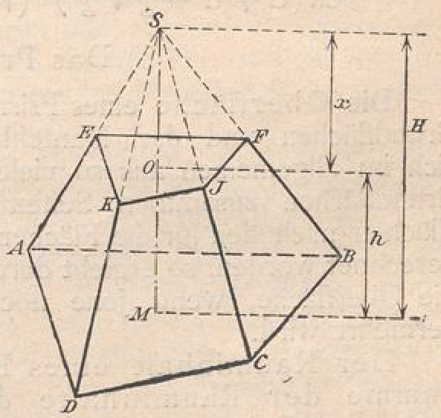

Fig. 35.

Man ergänze zunächst den gegebenen Pyramidenstumpf (Fig. 35) zu einer ganzen Pyramide, deren Höhe $H$ sich zusammensetzt aus der Höhe $h$ des Stumpfes und der Höhe $x$ der Ergänzungspyramide; diese Höhe $x$ der Ergänzungspyramide muss zunächst aus den bekannten Grössen, den beiden Grundflächen $ABCD = G$ und $EFIK = g$, sowie der Höhe $h$ des Stumpfes berechnet werden, indem man berücksichtigt, dass bei jeder Pyramide parallele Schnitte sich verhalten wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze (vergl. Seite 19).

$$G : g = (h + x)^2 : x^2$$

$$G : g = H^2 : x^2$$

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = (h + x) : x$$

$$(\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g} = (h + x - x) : x \text{ (vgl. Hoch, Ebene Geom. S. 55).}$$

$$x = \frac{h \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

Der Rauminhalt des Pyramidenstumpfes ergiebt sich, wenn man von dem Rauminhalt der ganzen Pyramide, denjenigen der Ergänzungspyramide abzieht, mithin:

$$I_{St} = I_P - I_E$$

$$= \frac{G \cdot H}{3} - \frac{g \cdot x}{3}$$

$$= \frac{G}{3} \cdot (h + x) - \frac{g}{3} \cdot x$$

$$= \frac{G}{3}\left(h + \frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{h \sqrt{g}}\right) - \frac{g}{3} \cdot \frac{h \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$= \frac{G}{3}\cdot\frac{h\cdot\sqrt{G}-h\sqrt{g}+h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} - \frac{g}{3}\cdot\frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$$

$$= \frac{h}{3}\cdot\frac{G\cdot\sqrt{G}-g\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$$

$$= \frac{h}{3}\cdot(G+\sqrt{Gg}+g)$$

da $(G\sqrt{G}-g\sqrt{g}):(\sqrt{G}-\sqrt{g}) = G+\sqrt{Gg}+g$ ist.

## b) Das Prismatoid.

Die **Oberfläche** eines Prismatoides besteht aus den beiden Grundflächen und der Mantelfläche; die **Mantelfläche** setzt sich im allgemeinen aus so vielen Dreiecken zusammen als beide Grundflächen zusammen Seiten haben. Sind diese sämtlichen Flächen nach den für die Flächenrechnung gültigen Regeln einzeln berechnet worden, so ergiebt deren Summe die Mantelfläche, bezw. die Oberfläche, wenn jene noch um die beiden Grundflächen vermehrt wird.

**Der Rauminhalt eines Prismatoides ist gleich der Summe der Rauminhalte dreier Pyramiden von der Höhe des Prismatoides, von denen die erste das arithmetische Mittel aus beiden Grundflächen, jede der beiden anderen aber die mittlere Durchschnittsfläche des Prismatoides zur Grundfläche hat.**

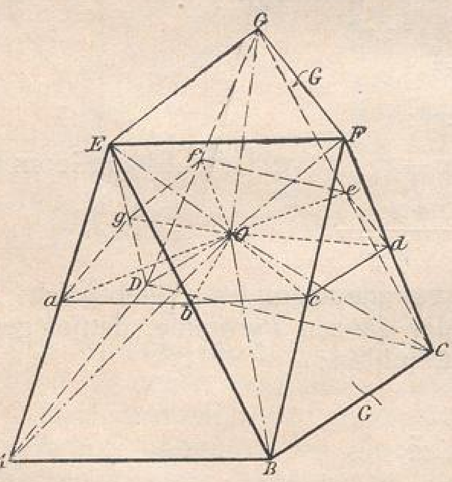

Fig. 36.

Von den beiden Grundflächen des Prismatoides habe die eine drei und die andere vier Kanten, (Fig. 36) so dass die mittlere Durchschnittsfläche $M$ ein Siebeneck ist; die beiden Grundflächen bezeichne man der Einfachheit wegen mit $G$ und $g$, die Höhe des Prismatoides aber mit $h$. Um den Inhalt des Prismatoides zu berechnen, wähle man in der mittleren Durchschnittsfläche einen beliebigen Punkt $O$, der mit sämtlichen Eckpunkten der beiden Grundflächen verbunden wird, um dann durch jede Grundflächen-Kante und den angenommenen Punkt $O$ Ebenen zu legen, wodurch zunächst zwei Pyramiden entstehen, deren Grundflächen die Grundflächen des