Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

d) Das Prismatoid.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

$$= \frac{G}{3} \cdot \frac{h \cdot \sqrt{G} - h\sqrt{g} + h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} - \frac{g}{3} \cdot \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$= \frac{h}{3} \cdot \frac{G \cdot \sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$= \frac{h}{3} \cdot (G + \sqrt{Gg} + g)$$

da $(G\sqrt{G} - g\sqrt{g}) : (\sqrt{G} - \sqrt{g}) = G + \sqrt{Gg} + g$ ist.

b) Das Prismatoid.

Die Oberfläche eines Prismatoides besteht aus den beiden Grundflächen und der Mantelfläche; die Mantelfläche setzt sich im allgemeinen aus so vielen Dreiecken zusammen als beide Grundflächen zusammen Seiten haben. Sind diese sämtlichen Flächen nach den für die Flächenrechnung gültigen Regeln einzeln berechnet worden, so ergiebt deren Summe die Mantelfläche, bezw. die Oberfläche, wenn jene noch um die beiden Grundflächen vermehrt wird.

Der Rauminhalt eines Prismatoides ist gleich der Summe der Rauminhalte dreier Pyramiden von der Höhe des Prismatoides, von denen die erste das arithmetische Mittel aus beiden Grundflächen, jede der beiden anderen aber die mittlere Durchschnittsfläche des Prismatoides zur Grundfläche hat.

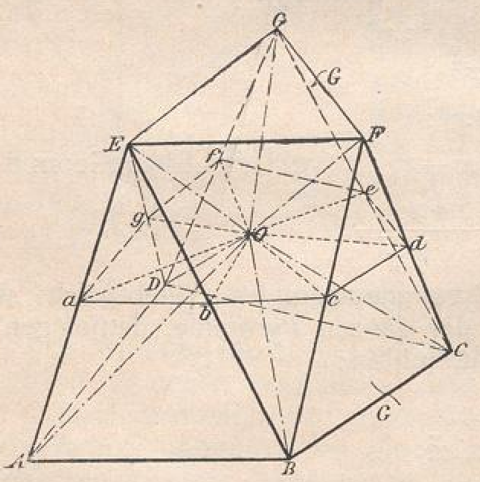

Fig. 36.

Von den beiden Grundflächen des Prismatoides habe die eine drei und die andere vier Kanten, (Fig. 36) so dass die mittlere Durchschnittsfläche M ein Siebeneck ist; die beiden Grundflächen bezeichne man der Einfachheit wegen mit G und g, die Höhe des Prismatoides aber mit h. Um den Inhalt des Prismatoides zu berechnen, wähle man in der mittleren Durchschnittsfläche einen beliebigen Punkt O, der mit sämtlichen Eckpunkten der beiden Grundflächen verbunden wird, um dann durch jede Grundflächen-Kante und den angenommenen Punkt O Ebenen zu legen, wodurch zunächst zwei Pyramiden entstehen, deren Grundflächen die Grundflächen des

Prismatoides sind, und deren Höhe gleich der halben Höhe des Prismatoides ist. Die Inhalte i und i_1 dieser beiden Pyramiden können nach dem obigen (vergleiche Seite 41) berechnet werden

$$i = \frac{G}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{G \cdot h}{6}$$

$$i_1 = \frac{g}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{g \cdot h}{6}.$$

Legt man nun noch durch je eine Seitenkante des Prismatoides und je eine Seitenkante der oberen und unteren Pyramide eine Ebene, so entstehen 7 dreiseitige Pyramiden, welche mit den beiden anderen Pramiden zusammen den Rauminhalt des Prismatoides ergeben.

Jede dieser 7 dreiseitigen Pyramiden wird durch den mittleren Schnitt in zwei Teile zerlegt, von denen der eine viermal so gross ist als der andere; denn berücksichtigt man z. B. die Pyramide $ABEO$, und betrachtet zunächst ABE als Grundfläche und O als Spitze, so wird die Grundfläche durch den mittleren Schnitt ab in zwei Teile $ABba$ und abE so geteilt, dass der erste Teil dreimal so gross ist wie der zweite Teil; mithin muss auch diejenige Pyramide, welche $ABba$ zur Grundfläche und O als Spitze hat, dreimal so gross sein wie diejenige Pyramide, die abE als Grundfläche und O als Spitze hat, oder aber die ganze Pyramide $ABEO$ (Grundfläche ABE, Spitze O) ist viermal so gross wie diejenige Pyramide $abEO$, in welcher man aber auch abO als Grundfläche und den Abstand des Punktes E von dieser Ebene als Höhe ansehen kann; dass dieser Abstand aber gleich der halben Höhe h des Prismatoides ist, ist klar, da Oab ein Teil des mittleren Schnittes ist. Führt man die gleiche Betrachtung für alle 7 dreiseitigen Pyramiden durch, so erhält man den Rauminhalt i_2, für alle zusammen das vierfache einer Pyramide, deren Grundfläche die Grösse des mittleren Schnittes ist, deren Höhe aber die halbe Höhe des Prismatoides ist, mithin

$$i_2 = 4 \cdot \frac{M}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{2\,Mh}{3}.$$

Durch Zusammenlegen der Rauminhalte i, i_1 und i_2 erhält man den Rauminhalt J des Prismatoides

$$I = i + i_1 + i_2$$

$$I = \frac{G \cdot h}{0} + \frac{g\,h}{6} + \frac{2\,H\,h}{3}$$

$$I = \frac{h}{3}\left(\frac{G+g}{2} + 2\,M\right).$$

Ein Keil oder Sphenisk ist jenes Prismatoid, in welchem die eine Grundfläche als gerade Linie erscheint, die man gewöhnlich Schneide nennt; setzt man daher in die obige Formel für den Inhalt eines Prismatoides für $g = 0$ ein, so erhält man die Formel für die Berechnung eines Keiles mit

$$I = \frac{h}{3}\left(\frac{G}{2} + 2M\right).$$

2. Die runden Körper.

a) Der Cylinder.

Da jeder Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, so werden alle für die Berechnung eines Prismas geltenden Regeln auch für den Cylinder Anwendung finden.

Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche eines geraden Cylinders mit r, die Höhe desselben aber mit h, so ergiebt sich für die Mantelfläche $M = 2\pi r h$, d. h.

der Mantel eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und Höhe.

Die Oberfläche O erhält man, wenn zu der Mantelfläche die doppelte Grundfläche $G = \pi r^2$ hinzugezählt wird, d. h.

$$O = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Der Rauminhalt I eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe oder

$$I = \pi r^2 h.$$

b) Der Kegel.

Ebenso wie der Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, ebenso kann auch ein Kegel als eine Pyramide mit unendlich kleinen Seiten angesehen werden, weshalb alle für eine Pyramide gültigen Regeln auch hier Anwendung finden können.

Für jeden geraden Kreiskegel besteht zwischen den drei Grössen: Halbmesser r der Grundfläche, Höhe h und Länge s der Seitenkante oder Erzeugenden des Kegels folgende wichtige Beziehung

$$s^2 = h^2 + r^2$$

da diese drei geraden Linien für jeden Achsenschnitt ein rechtwinkliges Dreieck bilden, bei dem der Pythagoräische Lehrsatz Anwendung findet.

Um den Mantel eines geraden Kegels zu berechnen, denke man sich denselben längs einer Erzeugenden aufgeschnitten und in eine Ebene abgerollt, dann erhält man einen Kreisausschnitt, dessen Halbmesser ebenso gross ist als die Kegelkante s, während