Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Leitfaden
der
Kurvenlehre

(Analytische Geometrie der Ebene)

Von

Prof. Dr. K. Düsing

Für höhere technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht

Mit zahlreichen Anwendungen
aus der Technik von Dipl.-Ing. Ernst Preger
sowie vielen Übungen und 117 Figuren

Hannover
Dr. Max Jänecke, Verlagsbuchhandlung
1911

2.20 13.6.11

LEITFADEN

der

Kurvenlehre

(Analytische Geometrie der Ebene)

Von

Prof. Dr. K. Düsing

Für höhere technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht

Mit zahlreichen Anwendungen aus der Technik von Dipl.-Ing. **Ernst Preger** sowie vielen Übungen und 117 Figuren

Hannover
Dr. Max Jänecke, Verlagsbuchhandlung
1911

Vorwort.

Man dürfte wohl allgemein anerkannt haben, daß die Elemente der Differential- und Integralrechnung zum Pensum der höheren Schulen gehören müssen. In der Tat geht eine immer größer werdende Anzahl der allgemein bildenden sowohl wie der technischen Anstalten dazu über, diese Elemente in den eigentlichen Mathematikunterricht sowohl wie auch in die Anwendungsgebiete, z. B. in die Mechanik, einzuführen.

Die analytische Geometrie ist stets auf diesen Schulen gelehrt worden. Durch die Einführung der Differentialrechnung wird der Unterricht in diesem Fach insofern eine Änderung erfahren, als jetzt die Möglichkeit besteht, die Differentialrechnung auch hierbei anzuwenden. Durch diese Anwendung wird die analytische Geometrie vereinfacht und gewinnt zugleich an Interesse.

Zwar wird in dem vorliegenden Leitfaden eigentlich die Kenntnis der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt, doch wird sich auch derjenige einigermaßen zurechtfinden können, der wenigstens die Bedeutung des Differenzierens und Integrierens verstanden hat und die Potenz differenzieren und integrieren kann.

Im vorliegenden Leitfaden ist alles fortgelassen, was für den Zusammenhang nicht notwendig ist und keine Anwendung gefunden hat. Eine vollständige Diskussion der Gleichung zweiten Grades z. B. würde zu weit führen, ein allgemeiner Hinweis genügt wohl.

Die Bemerkungen über die Ähnlichkeit der Kurven dürften wohl in keinem Lehrbuch zu finden sein, und doch fördern sie die Anschauung und damit auch das Verständnis sehr.

Die Menge des gebotenen Stoffes dürfte genügen; wenn nötig, kann man auch schwierigere Kapitel wie die allgemeine Ableitung von Krümmungskreisen an Kurven überspringen.

*

Die analytische Geometrie kann infolge ihrer algebraischen Methode in der Hand eines pedantischen Lehrers zu einer trockenen Wissenschaft und zu einer Qual für die Schüler werden. Wenn man aber Prinzipienreiterei vermeidet und stets den einfachsten Weg wählt und jede Scheingelehrsamkeit vermeidet, wird jeder mit Interesse folgen. Zugleich werden Anschaulichkeit und Anwendungen aus der Praxis den Lernenden mit sich fortreißen.

Die meisten Anwendungsbeispiele aus der Technik hat mein Kollege Herr Diplom-Ingenieur Ernst Preger, das Beispiel über die Evolventen- und Zykloidenverzahnung Herr Diplom-Ingenieur G. Puschmann ausgearbeitet.

Auf den allgemein bildenden Anstalten herrscht heute noch die formale Mathematik vor. Es beginnt aber langsam ein Umschwung; während früher der Hauptwert der Mathematik in ihren Beweisen gefunden wurde, tritt heute die Bewertung ihrer Anwendung immer mehr in den Vordergrund. Wer sich mit diesen modernen Anschauungen vertraut gemacht hat, wird das vorliegende Buch mit Nutzen zu gebrauchen wissen.

Die Darstellung in diesem Leitfaden ist möglichst einfach und anschaulich gehalten, um zu erreichen, daß er auch ohne Hilfe eines Lehrers, also auch bei Selbststudium verständlich ist. Hierbei sind die angeführten Aufgaben stets zu berechnen, die Übungen jedoch nur nach Bedürfnis. Daher ist am Schlusse des Buches zur Kontrolle ein Verzeichnis der Resultate angehängt. Zuweilen sind diese nicht vollständig ausgerechnet, um den Gang der Ableitung durchblicken zu lassen. Auch auf den Schulen sollte man die Schüler häufiger zum Selbststudium[1] ausgewählter Kapitel veranlassen, denn es befördert das selbständige Denken.

Kiel.

Der Verfasser.

[1] Zeitschrift für gewerblichen Unterricht 1908.

Inhaltsübersicht.

Der Kreis.

Veränderung des Koordinatensystems.

Parabel.

Verwandtschaft zwischen Parabel, Ellipse und Hyperbel.

Parabeln höherer Ordnung.

Rollkurven.

Andere Kurven.

Allgemeine Ableitungen.

Andere Koordinatensysteme.

Punkte.

Die Lage eines Punktes.

Ein Punkt hat keinerlei Ausdehnung, keine Länge, keine Breite und keine Tiefe, also auch keine Form und Größe. Er kommt nur durch seine Lage gegen andere Punkte oder Linien in Betracht. Um diese Lage eines Punktes in einer Ebene zu bestimmen, teilt man diese Ebene durch zwei sich meist senkrecht schneidende Gerade in vier Teile, und zwar zieht man dann gewöhnlich die eine wagerecht und die andere lotrecht. Diese Geraden heißen Achsen. Kennt man nun die Längen der senkrechten Entfernungen eines beliebigen Punktes P von diesen Achsen, so ist die Lage dieses Punktes bestimmt.

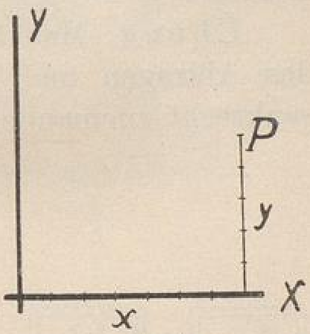


Fig. 1.

Schneidet man in Fig. 1 auf der wagerechten Achse ein Stück von der Größe der wagerechten Entfernung x ab und errichtet nun im Endpunkt ein Lot von der Größe der lotrechten Entfernung y, so gelangt man zum Punkte P. Das auf der wagerechten Achse „abgeschnittene" Stück heißt „Abszisse" und wird gewöhnlich mit x bezeichnet. Das zugehörige oder „zugeordnete" Lot heißt „Ordinate", und seine Länge bekommt den Buchstaben y. Beide jedem Punkte „zugeordnete" Stücke heißen auch „Koordinaten".

Mißt man die Koordinaten in irgendeiner Längeneinheit (cm, m), so kann man ihre Länge in Zahlen angeben. Dabei wird die Abszisse vom Schnittpunkt der Achsen ab nach rechts positiv, nach links negativ gerechnet. Ebenso wird die Ordinate nach oben positiv und nach unten negativ genommen. Der Achsenschnittpunkt oder Koordinatenursprung hat also die Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$. Die Koordinaten sind demnach im ersten Quadranten positiv; z. B. hat in Fig. 1 der Punkt P die Abszisse $x = +7$ und die Ordinate $y = +5$ Längeneinheiten.

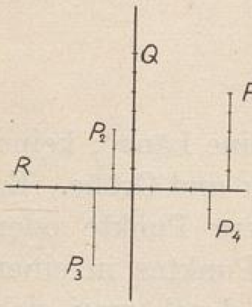


Fig. 2.

In Fig. 2 hat z. B. P_2 die Koordinaten $x_2 = -1$ und $y_2 = +3$, P_3 hat $x_3 = -2$ und $y_3 = -4$, P_4 hat $x_4 = +4$ und $y_4 = -2$, Q hat $x_5 = 0$ und $y_5 = +7$, R hat $x_6 = -6$ und $y_6 = 0$ Längeneinheiten usw.

Bezeichnung: Den Punkt mit den Koordinaten x_1 und y_1 kann man kurz als Punkt $(x_1; y_1)$ oder Punkt $(x_1 y_1)$ bezeichnen. Ist $x_1 = 3$ und $y_1 = -5$ Einheiten, so kann man kurz Punkt $(x_1 = 3; y_1 = -5)$ oder auch Punkt $(3; -5)$ schreiben.

Übung: Man benutze quadriertes Papier, wodurch das Abtragen und Messen erleichtert wird. Zwei passende senkrecht zueinander stehende Gerade macht man zu Achsen.

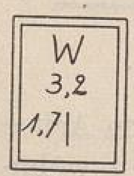


Fig. 3.

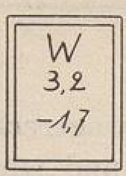


Fig. 4.

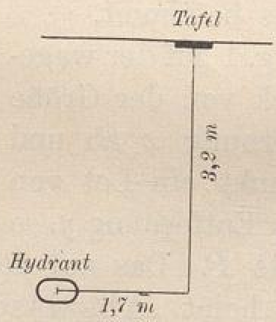


Fig. 5.

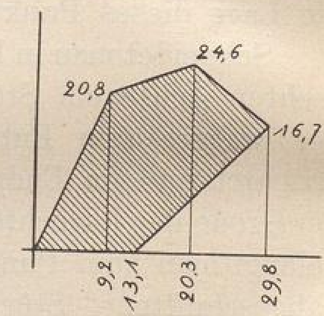


Fig. 6.

1. In diesem Achsensystem nehme man beliebige Punkte an und bestimme durch Messung ihre Koordinaten.

2. Man konstruiere die Punkte, die folgende Koordinaten haben:

a) $x_1 = 3$ und $y_1 = 1$ cm d) $x_4 = +4$ und $y_4 = -3$ cm
b) $x_2 = -2$ und $y_2 = 5$ „ e) $x_5 = -2$ und $y_5 = -3$ „
c) $x_3 = 0$ und $y_3 = 2$ „ f) $x_6 = -4$ und $y_6 = 0$ „ .

Anwendung: Die Lage der Hydranten, der Gasanschlüsse und der Anschlußkasten für elektrische Leitungen ist an den Häusern durch Täfelchen gekennzeichnet. So bedeutet in Fig. 3 oder 4, daß ein Hydrant 3,2 m nach vorn und 1,7 m nach der in Fig. 3 und 5 gezeichneten Seite

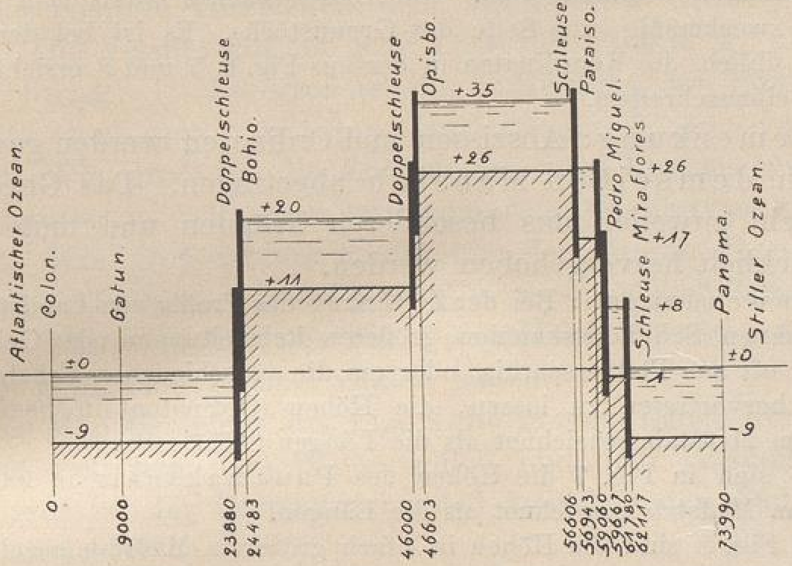


Fig. 7. Längsschnitt des Panamakanals.
Maßstab der Längen 1 : 1 250 000. Maßstab der Höhen 1 : 1250.

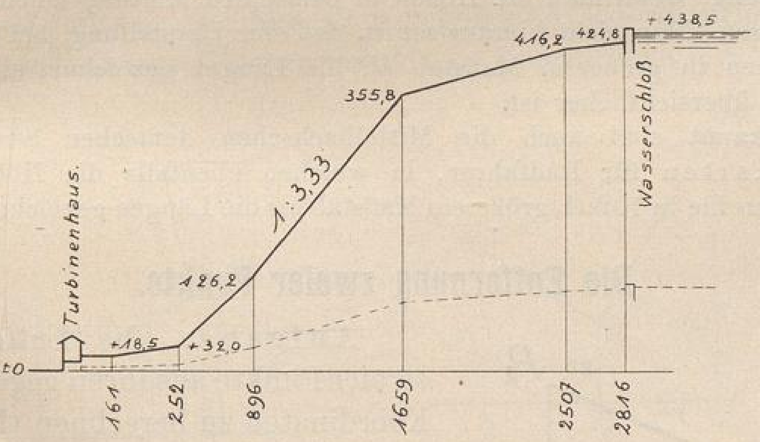


Fig. 8. Längsprofil einer Rohrleitung.
Maßstab der Längen 1 : 50 000. Maßstab der Höhen 1 : 12 500.

liegt. Es ist auf diese Weise dem Feuerwehrmann auch bei schneebedeckter Straße möglich, den Hydranten ohne Probieren sofort aufzufinden. Er braucht nur nach Angabe des Täfelchens gemäß der Skizze Fig. 5 senkrecht von der Tafel weg 3,2 m nach vorn und von dem gefundenen Endpunkt 1,7 nach links zu messen.

Auch bei Vermessungen von Grundstücken wird die Lage aller Punkte durch die Länge ihrer Koordinaten festgelegt. Zum Beispiel zeigt Fig. 6 den Plan eines Grundstückes von der Form eines unregelmäßigen Fünfecks, dessen Eckpunkte durch Angabe der Abszissen und Ordinaten bestimmt sind. Als Abszissenachse wählt man in der Praxis zweckmäßig eine Seite des Grundstücks. Es ist bei den Geometern üblich, die Koordinaten in der aus Fig. 6, 7 und 8 ersichtlichen Weise einzuschreiben.

Bemerkung: Abszissen und Ordinaten werden gewöhnlich in demselben Maßstab abgetragen. Das Gegenteil geschieht zuweilen aus besonderen Gründen und muß dann ausdrücklich hervorgehoben werden.

Anwendungen: Bei der Zeichnung des Profils von Landstraßen, Eisenbahnen, Schiffahrtskanälen, größeren Rohrleitungen oder Gebirgen werden oft aus Platzersparnis, oder um die verschiedenen Erhebungen besser hervortreten zu lassen, die Höhen (Ordinaten) in bedeutend größerem Maßstab gezeichnet als die Längen (Abszissen).

So sind in Fig. 7 die Höhen des Panamakanals in 1000fach größerem Maßstab gezeichnet als die Längen.

In Fig. 8 sind die Höhen in 4 fach größerem Maßstab gezeichnet, um die Knickpunkte in der Rohrleitung für ein Kraftwerk besonders deutlich hervortreten zu lassen. Die gestrichelte Linie zeigt dieselbe Rohrleitung, wenn man die Höhen in demselben Maßstab zeichnet wie die Längen. Man sieht hieraus sofort, daß eine Darstellung, bei welcher die Höhen in größerem Maßstab als die Längen gezeichnet sind, bedeutend übersichtlicher ist.

Bekannt sind auch die Mittelbachschen deutschen Straßenprofilkarten für Radfahrer, in welchen ebenfalls die Höhen der Straßenprofile in 10fach größerem Maßstab als die Längen gezeichnet sind.

Die Entfernung zweier Punkte.

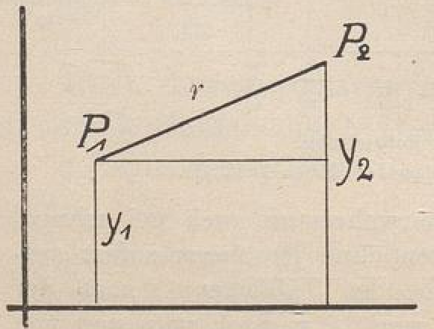


Fig. 9.

Aufgabe: Die Entfernung zweier Punkte aus ihren gegebenen Koordinaten zu berechnen (Fig. 9).

Die Koordinaten des Punktes P_1 seien $x_1\ y_1$, die des Punktes P_2 seien $x_2\ y_2$, und die Entfernung $P_1\ P_2$ heiße r. Zieht man von P_1 aus eine Parallele zur X-Achse, so entsteht ein rechtwinkliges

Dreieck mit den Katheten $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$. Dann ist

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bemerkung: Zieht man, um r zu erhalten, die Wurzel, so ist das Resultat von der ersten Dimension, und zwar gilt nur das positive Vorzeichen, da r als absolute Größe gesucht wird. Die Formel gilt für jede Lage der Punkte P_1 und P_2.

Übung: 1. Wie groß ist die Entfernung der Punkte P_1 und P_2, wenn $x_1 = 5$, $y_1 = -4$ und $x_2 = -3$, $y_2 = 7$ cm ist?

2. Wie groß ist die Entfernung eines Punktes mit den Koordinaten $x_1 = 3$, $y_1 = 4$ m, vom Achsenschnittpunkt?

3. Wie groß ist die Entfernung der Punkte P_1 und P_2, wenn $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ und $y_1 = 3$, $y_2 = -3$ m ist? Zeichnung.

4. Man berechne aus Fig. 7 die Höhen, welche die einzelnen Schleusen zu überwinden haben.

5. Man berechne aus Fig. 8 die genaue Länge der Rohrleitung zwischen dem Wasserschloß und dem Turbinenhaus. Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen den Enden der Rohrleitung?

Berechnung von geradlinig begrenzten Flächen.

Aufgaben: 1. Aus den gegebenen Koordinaten ($x_1\, y_1$ und $x_2\, y_2$) zweier Punkte sind die Koordinaten ($x_3\, y_3$) des

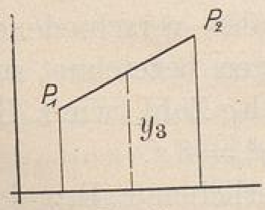


Fig. 10.

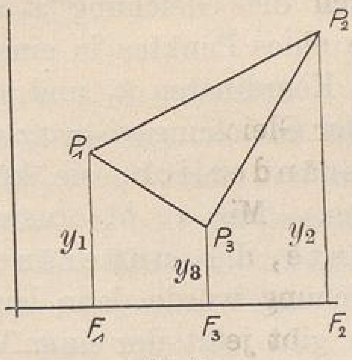


Fig. 11.

Halbierungspunktes ihrer Verbindungslinie zu berechnen. Nach Fig. 10 ist:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

2. Die Fläche eines Dreiecks zu berechnen, wenn die Koordinaten der Endpunkte gegeben sind. Das gesuchte Dreieck ist die Differenz von Trapezen (Fig. 11):

$$P_1 P_2 P_3 = P_1 P_2 F_2 \; F_1 - P_1 P_3 F_3 \; F_1 - P_3 P_2 F_2 \; F_3.$$

Diese Inhalte sind aus den Koordinaten der Punkte zu berechnen. Man erhält schließlich die Formel:

$$F = \frac{1}{2}\Big[x_1 (y_3 - y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_3 (y_2 - y_1)\Big].$$

Bemerkung: Die Formel hat zwei Dimensionen. Die x lassen sich vertauschen, ebenso die y; es ist also gleichgültig, welchen Punkt man als 1, 2 oder 3 bezeichnet. Ferner lassen sich die x gegen die y vertauschen; man kann also das Achsenkreuz um 90^0 drehen, ohne daß sich F ändert.

Übung: 1. Man berechne den Inhalt eines Dreiecks, von dem der eine Eckpunkt die Koordinaten $x_1 = 2$ und $y_1 = 4$, der zweite $x_2 = 8$, $y_2 = 7$ und der dritte $x_3 = 5$, $y_3 = 2$ cm hat.

2. Man berechne den Inhalt des in Fig. 8 gezeichneten Grundstücks. Die Maße der Koordinaten sind in m eingeschrieben.

Zeichnung einer Linie aus einer gegebenen Gleichung.

Durch die Gleichung $x_1 = 3$ und $y_1 = 1$ Einheiten ist die Lage eines Punktes in einem Achsenkreuz bestimmt. Hier sind die Koordinaten x_1 und y_1 als konstante Größen gegeben.

In der Gleichung $y^3 = ax$ dagegen sind x und y variabel d. h. veränderlich; sie können also verschiedene Werte annehmen. Mit a, b, c usw. dagegen bezeichnet man eine konstante, d. h. unveränderliche Zahl, wie z. B. $a = 8$. Die Gleichung würde dann lauten: $y^3 = 8x$.

Man gibt jetzt der einen Veränderlichen z. B. x der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 usw. Dann gehört zu jedem x ein oder mehrere bestimmte Werte von y. Man sagt y ist abhängig von x oder eine Funktion von x, und man schreibt: $y = f(x)$. Ist z. B. $x = 1$, so ergibt obige Gleichung für $a = 8$, daß $y = 2$ ist. Man rechnet nun zu jedem x mit

Hilfe der Gleichung den zugehörigen Wert von y aus und trägt die erhaltenen Werte in eine Tabelle (wie untenstehend) ein, die Werte von x links, die zugehörigen Werte von y rechts daneben.

x	y	x	y	x	y
+ 4	+ 3,175	+ 0,5	+ 1,587	— 0,75	— 1,817
+ 3	+ 2,885	+ 0,25	+ 1,260	— 1,0	— 2,0
+ 2	+ 2,520	± 0	± 0	— 2	+ 2,520
+ 1,0	+ 2,0	— 0,25	— 1,260	— 3	+ 2,885
+ 0,75	+ 1,817	— 0,5	— 1,587	— 4	+ 3,175

Alsdann schneidet man auf der X-Achse die angenommenen Werte von x ab und trägt zu jedem x das zugehörige y senkrecht zur X-Achse auf. Man erhält eine Reihe von Punkten, die man verbindet, so daß eine Kurve entsteht. Diese Zeichnung kann man auch nach links vervollständigen, indem man die Tabelle weiter für negative x berechnet und dann die Werte in die Zeichnung einträgt (Fig. 12).

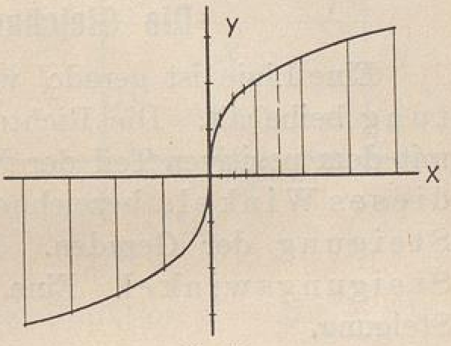


Fig. 12.

Entsteht an einer Stelle ein Zweifel über den Verlauf der Kurve, z. B. zwischen $x = 0$ und $x = 1$, so nimmt man für einige Zwischenwerte von x wie $x = 0{,}25$; $x = 0{,}5$; $x = 0{,}75$ usw., berechnet die hierzu gehörigen Werte von y und trägt auch sie in die Zeichnung ein.

Alle Punkte der erhaltenen Kurve entsprechen der gegebenen Gleichung. Hiervon kann man sich durch Nachmessen überzeugen. Man mißt in der Zeichnung die Ordinate der Abszisse $x = 1{,}5$ von der X-Achse bis zur Kurve zu 2,3. Wird $x = 1{,}5$ und $y = 2{,}3$ in die gegebene Gleichung eingesetzt, so sieht man, daß die Gleichung durch diese Koordinaten erfüllt wird. Dasselbe läßt sich von jedem anderen beliebigen Punkt der Kurve nachweisen.

Die Kurve ist also die Darstellung der Gleichung.

Da man an solchen Kurven die Abhängigkeit der Ordinaten von den Abszissen bequem übersehen kann, so wählt man gerade in der Technik sehr oft die zeichnerische Darstellung und zwar hauptsächlich für verwickelte Gleichungen und Gesetze.

Man zeichne die Kurve der Abhängigkeit des Dampfdruckes p von der Temperatur $t = 0^0$ bis $t = 200^0$:

$$p = \left(\frac{75 + t}{175}\right)^6.$$

Passender Maßstab für t: $1^0 = 1$ mm, für p: 1 kg/qcm $= 10$ mm.

Die gerade Linie.

Die Gleichung der Geraden.

Eine Linie ist gerade, wenn sie stets dieselbe Richtung beibehält. Die Richtung ist durch den $\sphericalangle\, \alpha$ der Linie mit dem positiven Teil der X-Achse gegeben[1]. Die Tangens dieses Winkels bezeichnen wir mit M und nennen sie die Steigung der Geraden. Den Winkel α nennt man den Steigungswinkel. Eine Gerade hat also überall dieselbe Steigung.

Die Ordinaten und Abszissen müssen im allgemeinen in demselben Maßstab aufgetragen werden, weil sonst die Steigung unrichtig würde. In dem auf Seite 4 erwähnten und in Fig. 7 und 8 gezeichneten Fällen, wo die Höhen in größerem Maßstab aufgezeichnet wurden als die Längen, sind die Steigungen der Linien auf der Zeichnung größer als in Wirklichkeit. Um eine jedesmalige Berechnung der Steigung zu vermeiden, schreibt man dann meistens die Steigungen direkt an die betreffende Linie, z. B. $1:200$; $1:15$; $1:\infty$, wie es auch in Fig. 8 an einer Stelle geschehen ist.

[1]) Daher sagt man auch wohl statt „Winkel" das Wort „Richtungsunterschied". — Die Drehung erfolgt in demselben Sinne wie in der Trigonometrie beim Einheitskreis.

In der Fig. 13 ist nun eine beliebige Gerade gezeichnet und auf ihr ein beliebiger Punkt P angenommen, dessen Koordinaten x und y seien. Wie die Figur zeigt, ist $\operatorname{tg} \alpha = M = \frac{y - n}{x}$. Wenn die Linie nun eine Gerade sein soll, so muß dieser Wert für alle Punkte der Linie gleich bleiben. Dann ist für alle Punkte der Geraden:

$$y = Mx + n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden.

Bemerkung: In der Gleichung $y = Mx + n$ sind alle Glieder von der ersten Dimension, da M nur ein Verhältnis, also eine unbenannte Zahl ist. Auch x und y sind ersten Grades; die Gleichung einer geraden Linie ist also ersten Grades. Die Steigung M der Geraden, also die Tangens des Steigungswinkels α ist zugleich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der Funktion $y = Mx + n$[1]).

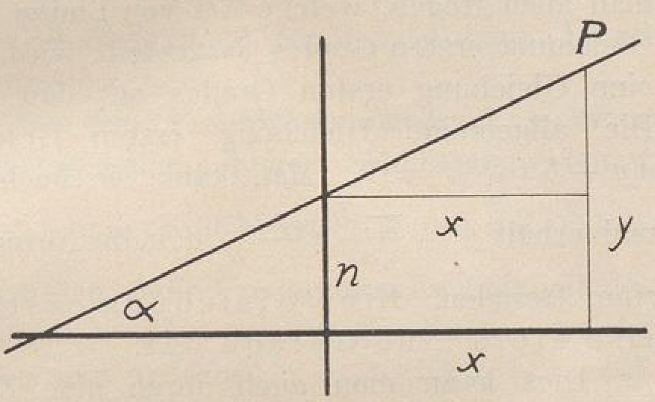


Fig. 13.

Ist die Steigung, also Tangens α positiv, so steigt die Gerade von links nach rechts. Ist die Steigung negativ, so fällt die Gerade nach rechts; die negative Steigung ist ein Gefälle. Den Verlauf einer Linie betrachten wir stets von links nach rechts.

Setzt man $x = 0$, so erhält man $y = n$. Letzteres ist also das Stück, das die Gerade auf dem positiven Teil der Y-Achse abschneidet. Trifft die Gerade die Y-Achse unterhalb des Schnittpunktes der Achsen, so ist n negativ. Für eine Gerade, die durch den Achsenschnittpunkt geht, ist $n = 0$, sie hat also die Gleichung $y = Mx$.

---

[1]) Siehe Elemente der Differential- und Integralrechnung von K. Düsing. Mit Beispielen aus der technischen Mechanik von E. Preger. 2. Auflage.

In der Gleichung der Geraden sind x und y die Variablen, die also für jeden Punkt der Geraden andere Werte haben. Dagegen sind M und n die Konstanten, die für alle Punkte gleich bleiben; sie sind die Bestimmungsgrößen der Geraden, und zwar wird durch M die Richtung und durch n die Lage bestimmt.

Die Gleichung ersten Grades.

Wir waren zu dem Resultat gekommen, daß die Gleichung einer Geraden vom ersten Grade ist. Umgekehrt kann man auch fragen, welche Art von Linien durch eine beliebige Gleichung ersten Grades dargestellt wird. Man nehme irgendeine Gleichung ersten Grades mit den Variablen x und y. Die allgemeine Gleichung ersten Grades würde lauten: $ay + bx + c = 0$. Man kann sie leicht nach y entwickeln und erhält $y = \frac{-b}{a} x - \frac{c}{a}$, d. h. die Normalform der Gleichung einer Geraden. Eine Gleichung ersten Grades stellt also stets eine Gerade dar.

Dies kann man auch durch eine Zeichnung erläutern: Man gibt a, b und c feste Werte, z. B. 4, 5, 6, ferner der Abszisse der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 usw. und rechnet zu jedem x mit Hilfe der gegebenen Gleichung die Werte von y aus. Diese Werte kann man zunächst, wie auf Seite 7 geschehen ist, in eine Tabelle eintragen. Alsdann schneidet man die einzelnen x auf der Abszissenachse ab und errichtet im Endpunkt von jedem x ein Lot von der Länge des zugehörigen y. Verbindet man jetzt die erhaltenen Endpunkte der Ordinaten, so ergibt sich eine Gerade. Bei ihr ist $M = -\frac{b}{a}$ und $n = -\frac{c}{a}$.

Übung: 1. Man zeichne die Geraden: a) $y = 3x + 5$, b) $y = -2x - 5$, c) $y = \frac{1}{2}x$ und d) $y = x$.

2. Welche Gleichung hat die Gerade, wenn ihr Steigungswinkel $= 45^0$ und $n = 3$ cm ist? Man zeichne diese Linie.

3. Welche Gleichung hat die Gerade, wenn ihr Steigungswinkel $= 60^0$ (30^0, 120^0, 150^0) und $n = 5$ cm ist? Man zeichne sie.

4. Welche Linie hat die Gleichung $y = 8$ cm oder ausführlicher geschrieben $y = 0x + 8$? Zeichnung.

5. Welche Linie hat die Gleichung a) $y = 7$ cm, ferner b) $y = 0$ und c) $x = 0$?

6. Welche Winkel bilden die Geraden $y = x + 2$, $y = \sqrt{3}x + 5$, $\sqrt{3}y + x - 2 = 0$ mit dem positiven Teil der X-Achse?

7. Man zeichne die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ für $a = 2$, $b = 3$ cm.

8. Man berechne die Steigungen der Rohrleitungen Fig. 8 in den einzelnen Strängen.

9. Die Formel für den Beschleunigungsdruck p eines Kolbengestänges bei unendlich langer Schubstange lautet $p = \left(1 - \frac{x}{r}\right)\frac{v^2}{r}$. Dabei ist x der Kolbenweg ($x_{min} = 0$, $x_{max} = 2r$), r der Kurbelradius $= 0{,}4$ m, v die Umfangsgeschwindigkeit des Kurbelzapfens $= 3{,}5$ m/sec. Man zeichne die Kurve, welche dieser Gleichung entspricht zwischen $x = 0$ und $x = 2r$ auf.

Die Lage eines Punktes zu einer Geraden.

Die Koordinaten eines bestimmten Punktes haben wir mit $x_1 y_1$ oder $x_2 y_2$ usw. bezeichnet, die Koordinaten eines beliebigen Punktes einer Geraden aber allgemein mit x und y. Den beliebigen Punkt einer Geraden nennt man auch wohl den „laufenden“ Punkt.

Liegt der Punkt mit den Koordinaten $x_1 y_1$ oder kurz ausgedrückt der Punkt $(x_1 y_1)$ auf der Geraden $y = Mx + n$, so erfüllen auch seine Koordinaten diese Gleichung der Geraden, also ist $y_1 = Mx_1 + n$.

Erfüllen seine Koordinaten die Gleichung nicht, so liegt er nicht auf der Geraden. Wäre z. B. $y_1 > Mx_1 + n$, so würde der Punkt über der Geraden $y = Mx + n$ liegen. Wäre $y_1 < Mx_1 + n$, so würde der Punkt unterhalb dieser Geraden liegen.

Die Gleichung einer Geraden, die durch zwei gegebene Punkte geht.

Da eine Gerade stets dieselbe Richtung beibehält, so bildet sie, wie wir gesehen haben, mit dem positiven Teil der X-Achse überall denselben Richtungsunterschied, also denselben Winkel, sie hat überall dieselbe Steigung. Legt man z. B. (Fig. 14) durch zwei Punkte P_1 und P_2 eine Gerade, so ist zwischen ihnen die Steigung

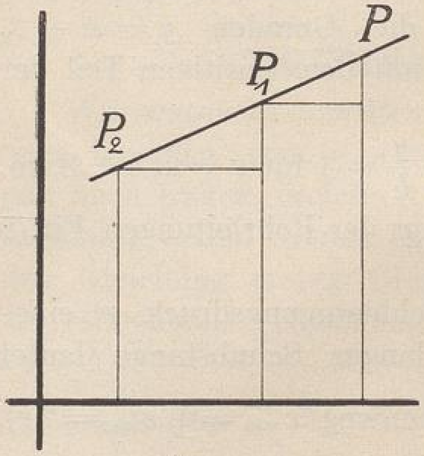


Fig. 14.

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Die Steigung von P_1 bis zu einem beliebigen Punkt P ist

$$\frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Diese Steigungen müssen für jeden Punkt gleich groß sein, wenn die Linie gerade sein soll. Also ist die Gleichung der Geraden, die durch zwei gegebene Punkte geht:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Bemerkung: Die Punkte P_1, P_2 und P kann man in ihrer Lage vertauschen; man kann also die linke Seite auch $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ und die rechte auch $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ oder $\frac{y_2 - y}{x_2 - x}$ oder $\frac{y - y_2}{x - x_2}$ schreiben.

Aufgabe: 1. Diese Gleichung (3) auf die Normalform zu bringen.

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

$$y = \underbrace{\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}_{M} x \underbrace{- \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 + y_1}_{n}$$

2. Die Richtigkeit dieser Gleichung ist an Fig. 15 nachzuweisen.

Übung: 1. Gegeben sei Punkt ($x_1 = 3$; $y_1 = 5$ cm) und Punkt ($x_1 = 4$; $y_1 = -3$ cm). Wie heißt die Gleichung der Geraden, die durch diese Punkte geht?

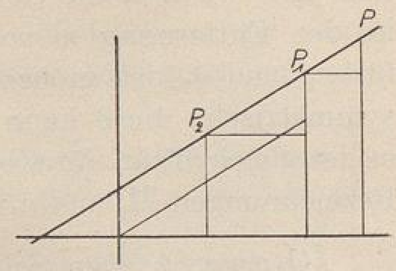


Fig. 15.

2. Die Koordinaten der Endpunkte einer Strecke sind $x_1 = 2$, $y_1 = -3$ und $x_2 = -4$, $y_2 = 2$ cm. Wie lang ist die Strecke, und wie groß ist ihre Steigung und ihr Steigungswinkel?

Aufgabe: **Den Schnittpunkt zweier Geraden zu finden.**

Die Gleichung der einen Geraden sei:

$$y = M_1 x + n_1$$

und die der anderen

$$y = M_2 x + n_2$$

Wenn ein Punkt zugleich auf zwei Linien liegt, so müssen seine Koordinaten die Gleichungen beider Linien erfüllen. Hat der Schnittpunkt also die Koordinaten x_1 und y_1, so ist

$$y_1 = M_1 x_1 + n_1$$

und

$$y_1 = M_2 x_1 + n_2$$

Diese zwei Gleichungen haben die zwei Unbekannten x_1 und y_1, die sich demnach berechnen lassen:

$$M_1 x_1 + n_1 = M_2 x_1 + n_2$$

$$x_1 (M_1 - M_2) = n_2 - n_1$$

$$x_1 = \frac{n_2 - n_1}{M_1 - M_2}$$

$$y_1 = M_1 \frac{n_2 - n_1}{M_1 - M_2} + n_1 = \frac{M_1 n_2 - M_1 n_1 + M_1 n_1 - M_2 n_1}{M_1 - M_2}$$

$$y_1 = \frac{M_1 n_2 - M_2 n_1}{M_1 - M_2}$$

Bemerkung: Die Gleichungen der Geraden sind vom ersten Grade, wir erhalten aus ihnen nur ein x und ein y, und diese entsprechen nur **einem** Schnittpunkt; durch die Rechnung wird also bestätigt, daß zwei Gerade sich nur in **einem** Punkte schneiden. — Ist $n_1 = n_2$, so wird $x_1 = 0$ und $y_1 = n$, d. h. die Geraden schneiden sich auf der Y-Achse in der Entfernung n vom Achsenschnitt. — Der Ausdruck für x_1 und y_1 ist in bezug auf M_1 und M_2 sowie n_1 und n_2 symmetrisch; diese kann man also zugleich vertauschen, d. h. es ist gleichgültig, für welche von den beiden Geraden man die Bezeichnungen M_1 und n_1 und für welche man M_2 und n_2 wählt.

Übung: 1. Den Schnittpunkt der Geraden $y = \frac{2}{3}x + 2$ und $y = -\frac{4}{3}x - 3$ zu berechnen. Die Richtigkeit prüft man durch Einsetzen und durch eine maßstäbliche Zeichnung.

2. Die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit den Achsen zu bestimmen.

Parallele Gerade.

Parallele Gerade haben dieselbe Steigung, also dasselbe M. Hierdurch wird in obigen Gleichungen für die Koordinaten (x_1 und y_1) der Schnittpunkte der Nenner gleich Null; diese Koordinaten werden also unendlich groß, d. h. der Treffpunkt von Parallelen liegt im Unendlichen.

Die Gleichung einer Geraden, deren Steigung bekannt ist, und die durch einen gegebenen Punkt geht.

Die gegebene Steigung sei M. Wenn nun der Punkt, durch den die Gerade gehen soll, die Koordinaten x_1 und y_1 hat und wie immer x und y die Koordinaten eines beliebigen Punktes sind, so ist die Steigung $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$. Demnach lautet die Gleichung der gesuchten Geraden

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Aufgabe: Man bringe diese Gleichung auf die Normalform.

Übung: 1. Die Gleichung einer Geraden aufzustellen, die der Geraden $y = \frac{2}{3} x + 5$ parallel ist und durch den Punkt ($x_1 = 3$, $y_1 = -2$ Einheiten) geht.

2. Die Gleichung einer Geraden aufzustellen, die durch den Punkt ($x_1 = -2$, $y_1 = 4$ Einheiten) geht und den Steigungswinkel 45^0 (30^0, 60^0) hat.

Anwendung: Die Selbstkosten K in Mark eines Meters Schweißnaht bei s mm Blechstärke können näherungsweise nach folgenden Formeln berechnet werden (Fig. 16):

$K = 0{,}15 + 0{,}095\ s$ bei Azetylen-Sauerstoffschweißung,

$K = 0{,}4 \ + 0{,}06\ s$ bei Wassergasschweißung.

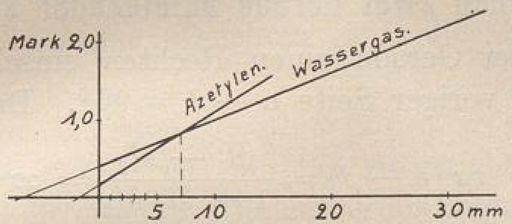


Fig. 16.

Man stelle die Formeln zeichnerisch dar. Welche Art Linien ergibt sich für die Gleichungen? Von welcher Blechstärke an ist Wassergasschweißung billiger als Azetylen-Sauerstoffschweißung?

Anleitung: Die gesuchte Blechstärke ergibt sich als Abszisse des Schnittpunktes der Azetylen-Sauerstofflinie mit der Wassergaslinie (Fig. 16).

Der Winkel zweier Geraden.

Die Geraden seien $y = M_1 x + n_1$ und $y = M_2 x + n_2$. Man zieht durch den Schnittpunkt der Achsen Parallele zu den Geraden (Fig. 17). Diese schließen mit der X-Achse dieselben Steigungswinkel α bzw. β ein wie die gegebenen Geraden. Der Winkel zwischen den Geraden ebenso wie derjenige zwischen den Parallelen ist $\alpha - \beta$.

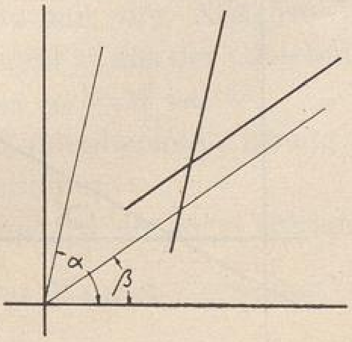


Fig. 17.

Aus der Trigonometrie ist nun bekannt, daß

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

ist. Also ist

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{M_1 - M_2}{1 + M_1 M_2}$$

Damit ist der Winkel zweier Geraden bestimmt.

Bemerkung: Die Formel zeigt, daß die Tangens des Winkels zweier Geraden desto größer wird, je mehr die Steigungen der Geraden verschieden sind. Bei stumpfen Winkeln ist auf das Vorzeichen zu achten.

Wann stehen zwei Gerade aufeinander senkrecht?

Wenn zwei Gerade einen Rechten einschließen, so ist in Fig. 17 auf voriger Seite $\alpha - \beta = 90^0$. Demnach wird

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{M_1 - M_2}{1 + M_1 M_2} = \infty$$

Dies tritt ein, wenn der Nenner $1 + M_1 M_2 = 0$ ist. Aus letzterem folgt:

$$M_1 = -\frac{1}{M_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Steigung der einen Geraden ist also der negative und reziproke Wert der Steigung der anderen.

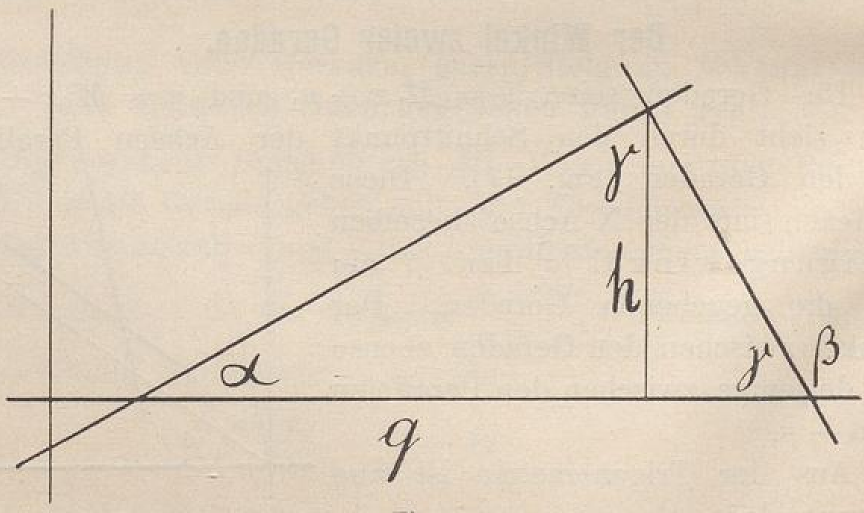


Fig. 18.

Bemerkung: Daß $M_1 \cdot M_2 = -1$ ist, läßt sich auch aus nebenstehender Fig. 18 ableiten.

$M_1 = \operatorname{tg} \alpha = h : q. \quad M_2 = \operatorname{tg} \beta = - \operatorname{tg} \gamma = - (q : h)$

Die Gleichung des Lotes.

Errichtet man ein Lot auf der Geraden $y = Mx + n$, so ist seine Steigung gleich $-\frac{1}{M}$. Geht das Lot nun durch den Punkt $x_1 y_1$, so lautet gemäß Gleichung (4) seine Gleichung

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{1}{M} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Übung: 1. Diese Gleichung auf die Normalform zu bringen.

2. Auf der Geraden $y = \sqrt{3} \cdot x + 2$ in dem Fußpunkt, dessen Abszisse $x_1 = 1$ ist, ein Lot zu errichten.

Man bringe die erhaltene Gleichung des Lotes auf die Normalform und prüfe M und n an einer maßstäblichen Zeichnung.

3a. Man fällt vom Punkt $(x_1 y_1)$ ein Lot auf die Gerade $y = Mx + n$ und es soll die Gleichung des Lotes aufgestellt werden. Ferner suche man die Koordinaten des Fußpunktes.

b. Es sei z. B. vom Punkt ($x_1 = 3$, $y_1 = 2$ dm) auf die Gerade $y = \sqrt{2} \cdot x + 4$ ein Lot gefällt. Wie groß sind die Koordinaten $x_2 y_2$ des Fußpunktes? Zeichnerische Prüfung.

4a. Die Länge dieses Lotes zwischen $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ zu finden. Man berechnet zuerst x_2 und y_2, und dann aus $x_1\ x_2\ y_1\ y_2$ nach Gleichung (1) das Lot, Dann berechne man die Länge des Lotes von $x_1 y_1$ bis zum Schnitt mit der X-Achse im Punkte $x_3 y_3$. Man berechnet hierbei zuerst x_3 aus der Gleichung des Lotes und aus der Bedingung, daß $y_3 = 0$ ist.

b. Man berechne r für das vorige Zahlenbeispiel (Übung 3) und prüfe das Ergebnis an einer Zeichnung.

5. Die Koordinaten des Schnittpunktes der zwei Geraden $y = \frac{1}{2} x + 2$ und $y = x + 1$ und den Winkel derselben zu bestimmen.

6. Wie groß ist die Steigung der Geraden, die mit der gegebenen Geraden $y = 2x + 3$ einen Winkel von 45^0 (30^0, 60^0 usw.) einschließt?

7. Ein Dreieck ist durch die Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben: $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; $x_2 = -2$, $y_2 = 1$; $x_3 = 1$, $y_3 = -4$ m. Wie heißen die Gleichungen der Seiten, wie lang sind die Seiten, und welche Winkel schließen sie ein? Man beachte, daß man nicht die Außenwinkel berechnet.

8. Man berechne die Winkel an dem in Fig. 6 gezeichneten Grundstück.

Der Kreis.

Die Mittelpunktsgleichung des Kreises.

Ein Kreis ist eine Linie, deren Punkte von einem gegebenen Punkte, dem Mittelpunkte, gleiche Entfernung haben.

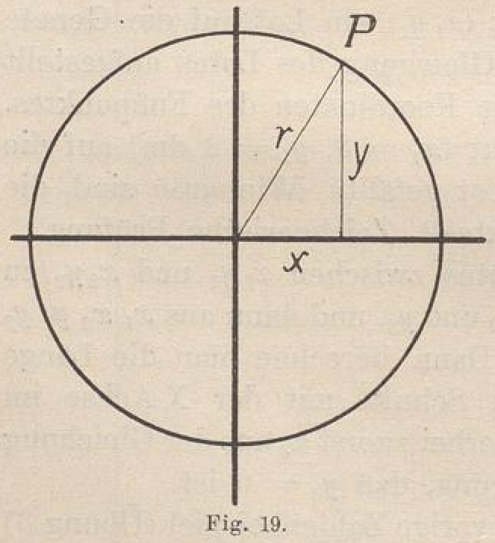


Fig. 19.

Zieht man von einem beliebigen Punkte P seines Umfanges (Fig. 19) den Radius r und die Koordinaten x und y, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \ldots (7)$$

Da diese Gleichung von den Koordinaten eines jeden Punktes der Kreislinie erfüllt wird, so ist dies die Gleichung des Kreises.

Bemerkung: Beide Koordinaten x und y kommen quadratisch vor, die Gleichung eines Kreises ist also vom zweiten Grade. Setzt man in der erhaltenen Gleichung des Kreises $x = 0$, so wird $y = \pm r$. Setzt man $y = 0$, so wird $x = \pm r$. Der Kreis schneidet also die Achsen viermal in der Entfernung r.

Da $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ ist, so gehören zu jedem x zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von y, d. h. die Peripherie liegt symmetrisch zur X-Achse. Ebenso geht aus der Gleichung für $x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}$ hervor, daß sie symmetrisch zur Y-Achse liegt. — Für ein x, das größer als r ist, wird y imaginär, d. h. dort befinden sich keine Punkte des Kreises mehr. Ebenso gibt es für ein y, das größer als r ist, keine Punkte des Kreises.

In der Formel des Kreises kann man x und y vertauschen, d. h. man kann das Achsenkreuz um 90^0 drehen, ohne daß sich die Gleichung des Kreises ändert.

Übung: 1. Man zeichne die Kurve mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ und überzeuge sich durch Nachmessen von der Art der Kurve.

Der Schnittpunkt eines Kreises und einer Geraden.

Wenn ein Punkt auf zwei Linien liegt, so müssen, wie schon erwähnt, seine Koordinaten die Gleichungen beider Linien erfüllen.

Gegeben ist ein Kreis mit der Gleichung $r^2 = x^2 + y^2$ und eine Gerade $y = Mx + n$. Der Schnittpunkt beider Linien liegt sowohl auf der einen Linie wie auf der anderen. Hat er also die Koordinaten x_1 und y_1, so müssen sie beide Gleichungen erfüllen. Also ist:

$$r^2 = x_1^{\,2} + y_1^{\,2}$$
$$y_1 = M x_1 + n$$

Wir erhalten hiermit zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten x_1 und y_1, die wir jetzt berechnen können.

Man quadriert die zweite Gleichung, setzt sie in die erste ein und erhält schließlich zwei Werte:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-Mn \pm \sqrt{r^2(1 + M^2) - n^2}}{1 + M^2}$$

Setzt man x_1 in die zweite Gleichung, nämlich $y_1 = Mx_1 + n$ ein, so erhält man die zugehörige andere Unbekannte y_1; verfährt man ebenso mit x_2, so erhält man den zu x_2 gehörigen Wert von y_2:

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{n \pm M \sqrt{r^2 (1 + M^2) - n^2}}{1 + M^2}$$

Wir haben also zwei Paare von Koordinaten erhalten, d. h. Kreis und Gerade schneiden sich im allgemeinen in zwei Punkten: P_1 mit den Koordinaten $x_1\, y_1$ und P_2 mit den Koordinaten $x_2\, y_2$.

Bemerkung: Hierbei sind drei Fälle möglich:

1. Ist $r^2 (1 + M^2) > n^2$, so erhält man zwei Werte für x_1, d. h. die Gerade ist eine Sekante.

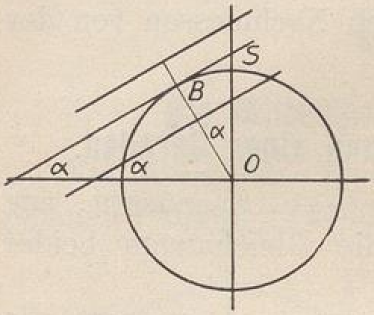


Fig. 20.

2. Ist $r^2 (1 + M^2) = n^2$, so erhält man einen Wert für x_1, d. h. die Gerade ist eine Tangente.

3. Ist $r^2 (1 + M^2) < n^2$, so erhält man keinen reellen Wert für x_1, d. h. die Gerade schneidet den Kreis nicht.

Nachweis dieser Fälle an Figur 20: Man beschreibt einen Einheitskreis, d. h. einen Kreis mit dem Radius $R = 1$ Längeneinheit. Errichtet man im Endpunkt eines beliebigen Radius ein Lot, so ist dies eine Tangente. Dann ist $B\,O = 1$ und $B\,S = \operatorname{tg} \alpha = M$. Folglich ist bei der Tangente:

$$n^2 = O\,S^2 = B\,O^2 + B\,S^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + M^2.$$

Die Figur zeigt ferner, daß bei einer Sekante der Abschnitt n auf der Y-Achse kleiner und bei einer außerhalb des Kreises liegenden Geraden größer als $O\,S = \sqrt{1 + M^2}$ ist.

Aufgabe: 1. Die Schnittpunkte einer Kurve mit der X-Achse bestimmt man, wenn man in der Gleichung der Kurve $y = 0$ setzt und dann x berechnet. Wie groß sind also beim Kreise die Abschnitte auf den Achsen?

Übung: 1. Die Schnittpunkte des Kreises $36 = x^2 + y^2$ und der Geraden $y = 2\,x + 4$ zu bestimmen.

2. In dem Kreis $x^2 + y^2 = 16$ lege man durch den Punkt $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ eine Sehne, die um 120^0 gegen den positiven Teil der X-Achse geneigt ist. Man suche die Gleichung dieser Sehne, die Koordinaten ihrer Schnittpunkte und ihre Länge.

Die Steigung einer Kurve.

Eine Sekante möge eine Kurve in zwei Punkten schneiden. Dreht man die Sekante, so rückt der eine Schnittpunkt dem andern immer näher, bis er ihm schließlich unendlich nahe ist; die Sekante ist damit zur Tangente geworden.

Die Verbindung dieser unendlich nahe liegenden Punkte ist eine unendlich kleine Sehne, die mit der Peripherie zusammenfällt. Die Richtung dieser Sehne ist die Richtung der Kurve an dieser Stelle. Die Verlängerung dieser Sehne ist eine Tangente. Letztere hat also dieselbe Steigung wie die Kurve am Berührungspunkt.

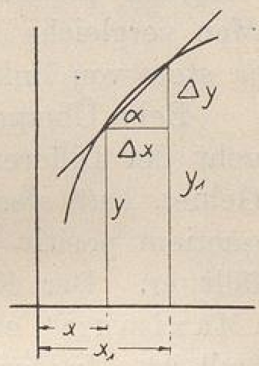


Fig. 21.

Die Schnittpunkte der Sehne mögen die Koordinaten $x\,y$ und $x_1\,y_1$ haben (Fig. 21). Dann ist die Steigung der Sehne

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\triangle\, y}{\triangle\, x}$$

Wird die Sehne zur Tangente, so werden die Stücke $\triangle\, y$ und $\triangle\, x$ unendlich klein; man schreibt sie $d\,y$ und $d\,x$. Die Steigung der Tangente ist gleich derjenigen der Kurve und zwar gleich $\frac{d\,y}{d\,x}$. Diese Größe wird Differentialquotient genannt [1]).

Der Differentialquotient der Gleichung einer Kurve ändert sich ständig mit den Koordinaten des Punktes.

---

[1]) Düsing, Elemente der Differential- und Integralrechnung S. 5. Die Kenntnis der einfachsten Differenzierungen und Integrierungen, namentlich die der Potenz werden vorausgesetzt: $\frac{d\,(x^m)}{d\,y} = m\,x^{m-1}$ und $\int x^m \cdot d\,x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$.

Die Steigung des Kreises.

Der Differentialquotient der Gleichung des Kreises ergibt sich wie folgt:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Im ersten Quadranten sind x und y positiv, der Differentialquotient ist also negativ. In der Tat ist die Steigung hier negativ, denn die Kreislinie fällt.

Im zweiten Quadranten ist x negativ und y positiv. Setzt man dies ein, so wird der Differentialquotient, d. h. die Steigung, positiv, der Kreis steigt von links nach rechts. Man vergleiche Fig. 22. Den Verlauf einer Linie haben wir ja stets von links nach rechts gerechnet.

Beim Übergang aus dem zweiten in den ersten Quadranten geht der Differentialquotient aus dem positiven ins negative Gebiet, muß also durch Null gehen. Solange der Differentialquotient positiv ist, steigt der Kreis; sobald er negativ wird, fällt er. Der Kreis hat also seinen höchsten Punkt, sein „Maximum" erreicht, wenn der Differentialquotient gleich Null ist. In der Tat ist hier die Steigung gleich Null, denn die Tangente geht parallel zur X-Achse.

Wie stark der Kreis steigt oder fällt, ersieht man aus dem absoluten Werte des Differentialquotienten. Je größer der absolute Wert von x und je kleiner also der von y ist, desto stärker steigt oder fällt der Kreis.

Für $y = o$ wird der Differentialquotient, also auch die Steigung, unendlich groß, d, h. die Tangente geht zur Y-Achse parallel.

Das Vorzeichen des Differentialquotienten gibt uns also die Art des Verlaufs des Kreises und auch jeder Kurve an, d. h. ob sie steigt oder fällt. Die absolute Größe des Differentialquotienten gibt uns die Stärke der Änderung, also der Steigung oder des Gefälles an.

Übung: Wie verhält sich der Differentialquotient und der Verlauf des Kreises im dritten und vierten Quadranten?

Die Tangente an den Kreis.

Die Tangente hat, wie wir gesehen haben, dieselbe Richtung und damit dieselbe Steigung wie der Kreis im Berührungspunkt, nämlich gemäß Gleichung (8):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Dies ist die Steigung des Kreises im allgemeinen; sie ändert sich von Punkt zu Punkt. Die Steigung beim Berührungspunkt $(x_1 y_1)$ ist also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1}{y_1}$$

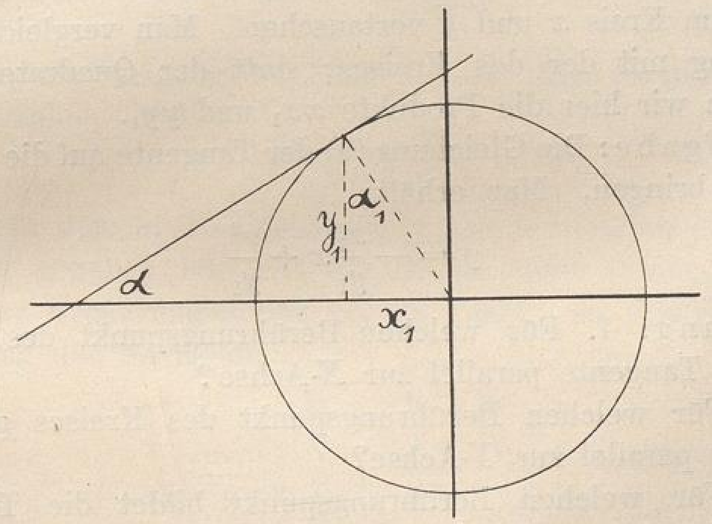


Fig. 22

Diese Steigung ergibt sich auch aus Fig. 22, in welcher

$$M = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{x_1}{y_1}$$

ist. Wir kennen jetzt von der Tangente die Steigung $\left(-\frac{x_1}{y_1}\right)$ und einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt. Die Gleichung einer Geraden, deren Steigung M wir kennen, und die durch den Punkt $(x_1 y_1)$ geht, war nach Gleichung (4):

$$M = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

Wird die Steigung M am Berührungspunkt eingesetzt, so erhält man als Gleichung der Tangente:

$$-\frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

Diese Gleichung kann noch vereinfacht werden:

$$x_1{}^2 - x x_1 = -y_1{}^2 + y y_1$$
$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = x x_1 + y y_1$$
$$r^2 = x x_1 + y y_1 \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Bemerkung: Jedes Glied dieser Formel ist von der zweiten Dimension. Auch in dieser Formel kann man wie immer am Kreis x und y vertauschen. Man vergleiche diese Gleichung mit der des Kreises; statt der Quadrate x^2 und y^2 haben wir hier die Produkte $x x_1$ und $y y_1$.

Aufgabe: Die Gleichung (9) der Tangente auf die Normalform zu bringen. Man erhält:

$$y = -\frac{x_1}{y_1} x + \frac{r^2}{y_1}$$

Übung: 1. Für welchen Berührungspunkt des Kreises geht die Tangente parallel zur X-Achse?

2. Für welchen Berührungspunkt des Kreises geht die Tangente parallel zur Y-Achse?

3. Für welchen Berührungspunkt bildet die Tangente einen Winkel von 45^0 mit dem positiven Teil der X-Achse?

4. Man suche die Koordinaten der Berührungspunkte der Tangente, die eine Steigung von 30^0 (60^0, 120^0, 135^0, 150^0) hat. Dann stelle man die Gleichung der Tangenten auf. (Man setze zunächst die Steigung der Tangente gleich der des Kreises im Berührungspunkt).

5. Man bestimme die Steigung des Kreises $49 = x^2 + y^2$ in den Punkten mit den Abszissen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. (Man

berechne zuerst die zu den Abscissen gehörigen Ordinaten der Punkte des Kreises.)

6. An welchen Punkten ist die Steigung des Kreises gleich 1?

Die Normale des Kreises.

Errichtet man auf der Tangente einer Kurve im Berührungspunkt ein Lot, so nennt man dies die Normale. Wir wissen zwar aus der Planimetrie, daß dies beim Kreis der Radius ist, doch soll die Gleichung der Normalen zur Übung analytisch abgeleitet werden.

Die Steigung der Tangente war $\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1}{y_1}$. Da die Normale senkrecht zur Tangente steht, so ist ihre Steigung

$$M_2 = -\frac{1}{M_1}$$

wenn M_1 die Steigung der Tangente ist. Also ist die Steigung der Normalen

$$M_2 = +\frac{y_1}{x_1}$$

Setzt man dies in die Gleichung (4) einer Geraden ein, deren Steigung gegeben ist, und die durch einen Punkt, nämlich hier den Berührungspunkt $(x_1\, y_1)$, geht, so erhält man als Gleichung der Normalen:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$y_1 x - y_1 x_1 = y x_1 - y_1 x_1$$

$$y = \frac{y_1}{x_1} x$$

Bemerkung: In dieser Gleichung ist $n = 0$, also geht die Normale durch den Achsenschnittpunkt, d. h. durch den Mittelpunkt des Kreises. Hierdurch wird bestätigt, daß die Normale ein Radius ist; und die Steigung eines Radius ist, wie die Fig. 23 zeigt, gleich $\frac{y_1}{x_1}$.

Die Berührungsgrößen.

Unter der Subnormalen OF (Fig. 23) versteht man die Projektion der Normalen auf die X-Achse, und unter der Subtangente FS versteht man die Projektion der Tangente auf die X-Achse. Die Länge der Tangente PS und die der Normalen OP mißt man vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der X-Achse.

Die Längen dieser vier Strecken sollen berechnet werden.

1. Auf planimetrischem Wege.

Die Subnormale ist nach Fig. 23 offenbar x_1.

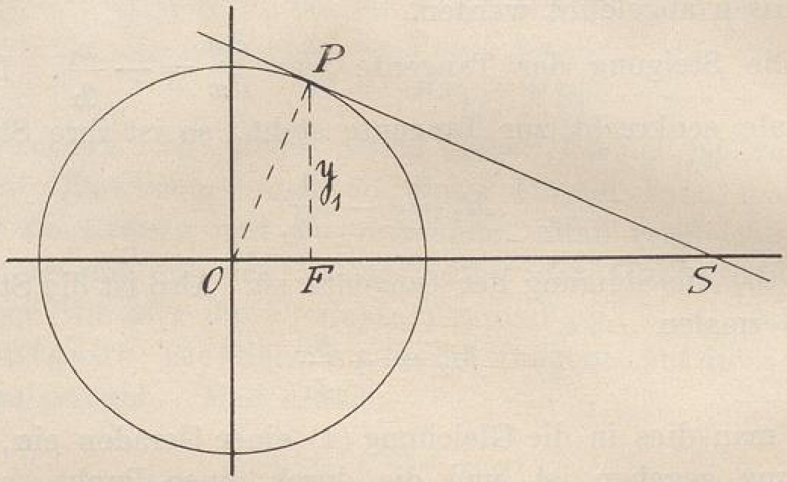


Fig. 23.

Die Ordinate y_1 ist die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und x_1. Also ist

$$\text{die Subtangente} = \frac{y_1^2}{x_1} = \frac{r^2 - x_1^2}{x_1}$$

$$\text{die Normale} = r.$$

Die Tangente t ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OPS und OPF $\frac{t}{y_1} = \frac{r}{x_1}$ oder $t = \frac{r y_1}{x_1}$

2. Auf analytischem Wege.

Die Subnormale und Normale ergeben sich sofort wie oben.

Die Länge der Subtangente und der Tangente kann aber zur Übung auch analytisch abgeleitet werden:

In der Gleichung der Tangente $r^2 = x x_1 + y y_1$ möge der Schnittpunkt der Tangente mit der X-Achse S heißen und die Koordinaten x_2 und y_2 haben. Dann lautet die Gleichung für diesen Schnittpunkt $r^2 = x_2 x_1 + y_2 y_1$. Da nun $y_2 = 0$ ist, so ist $x_2 = \frac{r^2}{x_1}$. Zieht man x_1 von dem soeben erhaltenen x_2 ab, so bleibt:

$$\text{die Subtangente} = \frac{r^2}{x_1} - x_1 = \frac{r^2 - {x_1}^2}{x_1} \text{ wie oben.}$$

Um die Länge der Tangente zu erhalten, kann man die Koordinaten von P und S in die Gleichung (1) für die Entfernung zweier Punkte einsetzen:

$$t^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2$$

$$t^2 = (y_1 - 0)^2 + \left(x_1 - \frac{r^2}{x_1}\right)^2$$

$$= {y_1}^2 + {x_1}^2 - 2r^2 + \frac{r^4}{{x_1}^2}$$

$$= -r^2 + \frac{r^4}{{x_1}^2}$$

$$= \frac{r^2}{{x_1}^2}(-{x_1}^2 + r^2)$$

$$= \frac{r^2 {y_1}^2}{{x_1}^2}$$

Also ist die Tangente $= \frac{r\, y_1}{x_1}$ wie oben.

Übung: 1. Man lege eine Tangente unter 30° Steigung an den Kreis, stelle ihre Gleichung auf und bestimme die Abschnitte dieser Tangente auf den beiden Achsen. (Siehe Seite 24 Übung 4. Man setze in der Gleichung einmal x und einmal y gleich Null.)

2. Man bestimme ebenso die Abschnitte der Tangenten unter 45° (60°, 120°, 135°, 150°) Steigung.

3. An den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ lege man im Punkte $(x_1 = 2)$ des Kreises eine Tangente an und bestimme die Berührungsgrößen.

Die Ähnlichkeit der Kreise.

Die Gleichungen aller Kreise, bezogen auf den Mittelpunkt, unterscheiden sich nur durch die Größe der Konstanten r; alle Kreise müssen also einander ähnlich und entsprechende Strecken in ihnen proportional sein.

In Fig. 24 ist ein Kreis mit r und einer mit $2\,r$ als Radius geschlagen. Für den kleinen Kreis ist:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ und } y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Für den großen Kreis ist:

$$\xi^2 + \eta^2 = (2\,r)^2 \text{ und } \eta = \sqrt{(2\,r)^2 - \xi^2}$$

Nimmt man nun in dem doppelt so großen Kreis eine doppelt so große Abscisse ($\xi = 2\,x$), so erhält man eine doppelt so große Ordinate $\eta = \sqrt{(2\,r)^2 - (2\,x)^2} = 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\,y$. Dies ist in Fig. 24 für 45^0 gezeichnet.

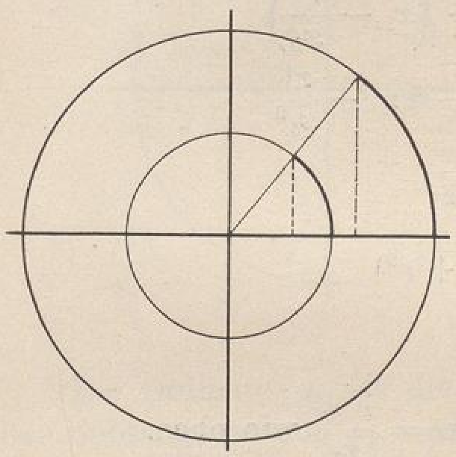


Fig. 24.

Auch entsprechende Bogen sind einander ähnlich, z. B. die Bogenstücke, die in Fig. 24 hervorgehoben sind. Das größere flachere Stück entsteht aus dem kleineren durch Zeichnung in einem größeren Maßstab.

Da sich die Flächen ähnlicher Figuren wie die Quadrate entsprechender Strecken verhalten, so verhalten sich die Flächen der Kreise oder entsprechender Sektoren oder Segmente wie die Quadrate der Radien oder entsprechender Strecken.

Verbindet man bei zwei ähnlichen Figuren entsprechende Punkte, so gehen diese Geraden durch einen Punkt, den Ähnlichkeitspunkt. Legt man z. B. die Kreise konzentrisch aufeinander, so ist der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Ähnlichkeitspunkt, und die gemeinsamen Radien verbinden entsprechende Punkte.

Veränderung des Koordinatensystems.

Parallele Verschiebung des Systems.

In einem Achsenkreuz xy, das in der Fig. 25 ausgezogen ist, sei ein beliebiger Punkt P mit den Koordinaten x und y gegeben. Ein neues Achsenkreuz $\xi\eta$, das in der Figur gestrichelt ist, liege zu dem obigen, dem alten, parallel, und zwar habe der Achsenschnittpunkt des alten Systems in dem neuen die Koordinaten h und v. Diese Größen entsprechen der horizontalen (h) und der vertikalen Verschiebung (v).

Alsdann ist
$$x = \xi - h$$
$$y = \eta - v.$$

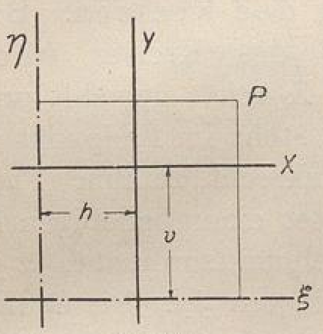


Fig. 25.

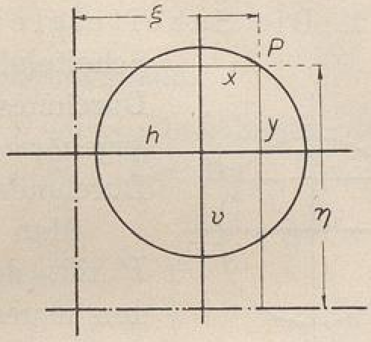


Fig. 26.

B e i s p i e l: 1. D i e a l l g e m e i n e G l e i c h u n g d e s K r e i s e s. Ein Kreis habe im alten System die Gleichung $r^2 = x^2 + y^2$. Soll nun seine Gleichung für das neue System gefunden werden, so müssen wir die a l t e n K o o r d i n a t e n durch die neuen ausdrücken und in die alte Gleichung einsetzen. So erhalten wir eine Gleichung mit neuen Koordinaten. Die Fig. 26 zeigt für einen beliebigen Punkt, daß $x = \xi - h$ und $y = \eta - v$ ist.

Wir erhalten:
$$r^2 = (\xi - h)^2 + (\eta - v)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Die vier Größen der rechten Seite beziehen sich nur auf das neue System, und zwar sind v und h konstant, ξ und η

aber die laufenden Koordinaten des Kreises. Man multipliziere Gleichung (10) aus:

$$r^2 = \xi^2 + h^2 - 2h\xi + \eta^2 + v^2 - 2v\eta$$

$$\xi^2 - 2h\xi + \eta^2 - 2v\eta + h^2 + v^2 - r^2 = 0 \quad . \quad . \quad (10\,a)$$

Aufgabe: Man vergleiche diese Gleichung mit folgender allgemeinen: $\quad x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$

und stelle fest, wie sich hieraus die Verschiebungen v und h und der Radius r berechnen läßt. Man erhält:

$$h = -\frac{a}{2} \qquad v = -\frac{b}{2} \qquad r = \sqrt{h^2 + v^2 - c}.$$

Die Gleichung (10) heißt die allgemeine Gleichung des Kreises.

2. Die Scheitelgleichung des Kreises. Bei der Scheitelgleichung des Kreises wird ein Durchmesser als X-Achse gewählt und die zugehörige Achse steht im Endpunkt dieses Durchmessers senkrecht zu ihm (Fig. 27).

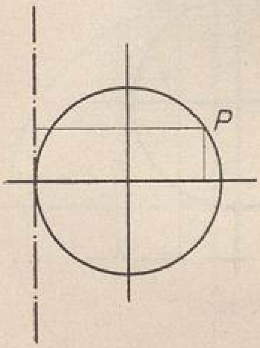


Fig. 27.

Man betrachtet einen beliebigen Punkt P mit den Mittelpunktsordinaten $x\,y$ und den neuen Koordinaten $\xi\,y$. Die Ordinate y bleibt dieselbe; dagegen ist die Abszisse verändert. Die frühere Abszisse x ist auszurechnen und in die Mittelpunkts-Gleichung des Kreises einzusetzen. Es ist: $x = \xi - r$. Eingesetzt gibt:

$$r^2 = (\xi - r)^2 + y^2$$

$$0 = \xi^2 - 2r\xi + y^2$$

Die Scheitelgleichung lautet also:

$$\boldsymbol{y^2 = 2r\xi - \xi^2} \text{ oder } \boldsymbol{y^2 = 2rx - x^2} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Übung: 1. Man zeichne die Kurven mit den Gleichungen $x^2 + y^2 - 6x = 0$ und $y^2 + x^2 - 12y + 20x + 111 = 0$. Man überzeuge sich durch Nachmessen, welcher Art diese Kurven sind. Man vergleiche mit der allgemeinen und mit der Scheitelgleichung.

2. Man stelle die Gleichungen für die Linie auf, deren Punkte von dem festen Punkte ($x_1 = 3$, $y_1 = 5$ cm) den Abstand 4 cm haben.

3. In welchen Punkten trifft der Kreis

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 10 = 0$$

die Achsen? Wie groß sind die Verschiebungen?

4. In welchem Punkte hat die Kurve $x^2 + y^2 - 6x = 0$ ein Maximum? Anleitung: Wo ist die Steigung gleich Null?

5. Wie groß sind die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises $x^2 - 10x + y^2 - 12y - 3 = 0$, und wie groß ist sein Halbmesser?

6. Wie groß sind diese Größen beim Kreise

$$x^2 - 20x + y^2 - 12y + 111 = 0?$$

Drehung des Achsenkreuzes.

In dem alten Achsenkreuz XY sei ein beliebiger Punkt P mit den Koordinaten x und y gegeben (Fig. 28.). Das neue Achsenkreuz $\xi\eta$ sei gegen das alte um den Winkel α gedreht, wobei die Drehung links herum als positiv gezählt wird (wie in der Trigonometrie). Die Koordinaten von P im neuen System sind ξ und η. Alsdann kehrt in der Figur bei P zwischen η und y der Winkel α wieder. Die alte Koordinate y besteht aus einer Summe und x aus einer Differenz von Strecken:

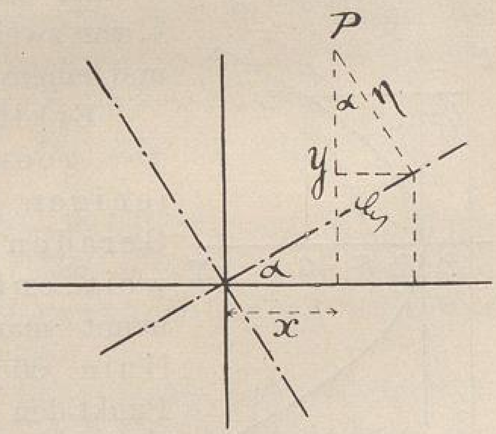


Fig. 28.

$$\left.\begin{aligned} y &= \eta \cos\alpha + \xi \sin\alpha \\ x &= \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Diese Koordinaten setzt man in die auf das alte Achsenkreuz bezügliche Gleichung ein und erhält so eine neue Gleichung, in der die neuen Koordinaten vorkommen.

Beispiele: 1. Für $\alpha = 45^0$ wird

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{ und } x = \frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{2}}$$

2. Für $\alpha = -45^0$ ist die Drehung rechts herum erfolgt:

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{ und } x = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\xi}{\sqrt{2}} \quad . \; . \; (13)$$

Übung: 1. Man drehe das Achsenkreuz, das durch den Mittelpunkt des Kreises geht, und stelle die neue Gleichung des Kreises auf.

2. Man wandle die Gleichung einer Geraden in derselben Weise um.

Parabel.

Die Gleichung der Parabel.

Einleitung: Man suche und zeichne den geometrischen Ort für alle Punkte, die gleich weit entfernt sind: 1. von einem Punkte; 2. von einer Geraden; 3. von zwei Punkten; 4. von zwei Graden; 5. von einer Geraden und einem Punkte.

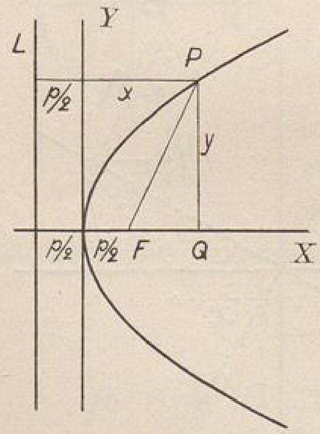


Fig. 29.

Erklärung: Die Parabel ist der geometrische Ort für diejenigen Punkte, die von einer Geraden und einem Punkte gleich weit entfernt sind. Die Gerade nennt man die Leitlinie, Richtlinie oder Direktrix (L) und den Punkt den Brennpunkt (F). (Fig. 29.) Fällt man von F ein Lot auf L, so wollen wir dies Lot mit p und den Schnitt dieses Lotes mit der Parabel als Scheitel der Parabel bezeichnen; p wird durch die Parabel halbiert. Die Verlängerung dieses Lotes ist die X-Achse und senkrecht hierzu durch den Scheitel legen wir die Y-Achse. Dann ist für einen beliebigen Punkt P der Parabel:

$$LP = PF$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{y^2 + FQ^2}$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = y^2 + x^2 - xp + \frac{p^2}{4}$$

$$\boldsymbol{y^2 = 2px} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Dies ist also die Gleichung der Parabel, und zwar ist es die Scheitelgleichung, weil wir beide Achsen durch den Scheitel gelegt haben.

Besprechung: Beide Seiten der Gleichung sind von der zweiten Dimension, da p eine Länge ist.

Aus der Gleichung der Parabel folgt, daß $y = \pm\sqrt{2px}$ ist. Also gehören zu jedem x zwei gleiche und entgegengesetzte y; die Kurve ist demnach zur X-Achse symmetrisch. Diese wird daher auch als Achse der Parabel bezeichnet. Für ein unendlich großes x wird y ebenfalls unendlich groß, und für ein negatives x wird y imaginär, d. h. die Parabel liegt nur auf der rechten Seite der Y-Achse und erstreckt sich in zwei Zügen, sogenannten Ästen bis ins Unendliche. Die Y-Achse ist keine Symmetrieachse. Ferner wird für $x = o$ auch $y = o$. Die Parabel geht durch den Scheitel.

Stellt man die Gleichung für zwei Punkte auf: $y_1{}^2 = 2px_1$ und $y_2{}^2 = 2px_2$, so ergibt sich $y_1{}^2 : y_2{}^2 = x_1 : x_2$. Die Abszissen einer Parabel verhalten sich also wie die Quadrate der Ordinaten.

Ist die Parabel um 90^0 links herum gedreht, so steht sie gleichsam auf dem Kopf und hat als tiefsten Punkt den Scheitelpunkt; jetzt lautet ihre Gleichung $x^2 = 2py$, und die Ordinaten verhalten sich wie die Quadrate der Abszissen. Allgemein kann man also sagen: Stellt man bei einer Parabel die Scheitelgleichung auf, so verhalten sich die einen Koordinaten wie die Quadrate der anderen.

Konstruktionen der Parabel.

1. Aus der Erklärung ergibt sich eine einfache Konstruktion der Parabel, wenn Leitlinie und Brennpunkt gegeben sind. Man zieht eine beliebige Parallele zur Leitlinie und schlägt mit dem Abstand beider Linien einen Kreis um den Brennpunkt. Wo dieser die Parallele trifft, ist ein Punkt der Parabel. So verfährt man beliebig oft.

2. Aus dem Satz, daß sich die Abszissen wie die Quadrate der Ordinaten verhalten, ergibt sich die Konstruktion, wenn Scheitel S, Scheiteltangente $S\,O$ und ein beliebiger Punkt P gegeben sind (Fig. 30).

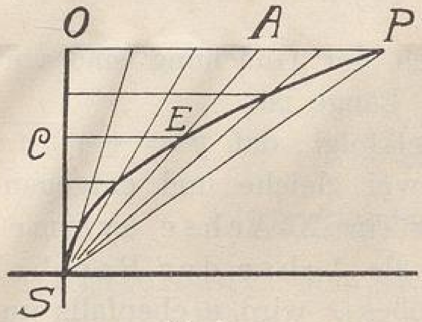


Fig. 30.

Man fällt von P ein Lot auf $S\,O$, teilt $O\,P$ und $S\,O$ in gleich viel Teile. Durch die Teile von $O\,S$ zieht man Parallelen zu $O\,P$ und verbindet die Teile von $O\,P$ mit S, dann sind die in Fig. 30 hervorgehobenen Punkte Parabelpunkte.

Beweis: Punkt P habe die Koordinaten $x_1\,y_1$ und Punkt C sei ein laufender Punkt mit den Koordinaten x und y. Dann ist:

$$C\,E = \frac{3}{5}\,O\,A = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\,O\,P\right)$$

oder

$$x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 x_1$$

Ferner ist:

$$S\,C = \frac{3}{5}\,S\,O$$

oder

$$y = \frac{3}{5}\,y_1 \text{ und } y^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 y_1{}^2$$

Durch Division erhält man:

$$\frac{x}{y^2} = \frac{x_1}{y_1{}^2} \text{ oder } \frac{x}{x_1} = \frac{y^2}{y_1{}^2}$$

Also verhalten sich die Abszissen wie die Quadrate der Ordinaten und der Punkt E gehört ebenso wie die andern konstruierten Punkte einer Parabel an.

3. Sind von der Parabel zwei Punkte P_1 und P_2 und die Tangenten $O\,P_1$ und $O\,P_2$ in diesen Punkten gegeben, so teilt man $O\,P_1$ und $O\,P_2$ in gleich viele Teile und verbindet die Teilpunkte, wie Fig. 31 zeigt. Die Verbindungslinien sind die umhüllenden Tangenten, in welche die eigentliche Parabel leicht eingezeichnet werden kann.

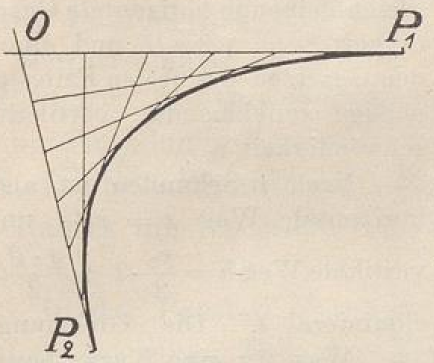


Fig. 31.

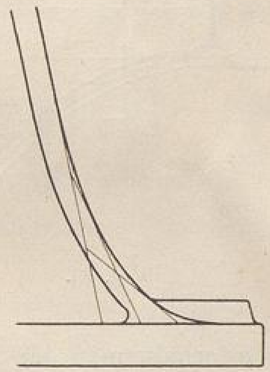


Fig. 32.

Anwendung: Letztere Konstruktion wird im Maschinenbau häufig angewendet, um Übergangskurven zwischen zwei rechtwinklig oder schief zueinander stehenden geraden Begrenzungslinien zu zeichnen. Die Parabel ergibt in solchen Fällen eine dem Auge besonders gefällige Form, z. B. Fig. 32.

Übung: 1. Die Gleichung der Parabel zu suchen, wenn die Leitlinie zur Y-Achse gemacht wird.

2. Die Gleichung der Parabel zu suchen, wenn das im Brennpunkt errichtete Lot zur Y-Achse gemacht wird.

3. Man zeichne in ein Achsenkreuz die Kurven $y^2 = 4\,x$ und $y^2 = \frac{1}{4}\,x$ und gebe die Leitlinien und Brennpunkte an. Man wähle hierzu einen großen Maßstab. Man schließe auf die Art der Kurven und überzeuge sich durch Nachmessen davon, daß beliebige Punkte der Kurve der Erklärung der Parabel genügen.

4. In der Parabel $y^2 = 18\,x$ soll der Punkt bestimmt werden, für den die Ordinate dreimal so groß ist wie die Abszisse.

Anwendung: Aus einem Gefäße, Fig. 33, strömt horizontal ein Wasserstrahl heraus. Man bestimme die Gleichung der Kurve, welche der Strahl beschreibt unter Vernachlässigung sämtlicher Reibungs- und Ausflußwiderstände.

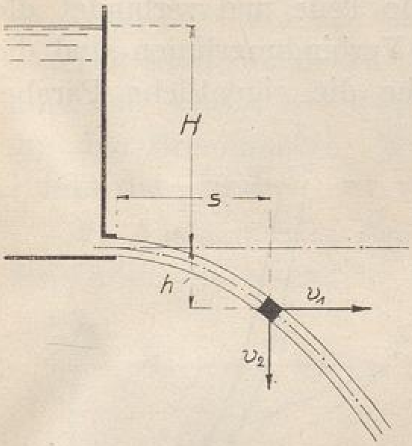


Fig. 33.

Anleitung: Jedes ausfließende Wasserteilchen, z. B. das in Fig. 33 schwarz hervorgehobene, hat eine gleichbleibende horizontale Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2\,g\,H}$ und eine nach den Gesetzen des freien Falles gleichmäßig zunehmende, vertikale Geschwindigkeit v_2.

Nach t Sekunden ist also der horizontale Weg $s = v_1 \cdot t$ und der vertikale Weg $h = \frac{v_2}{2} \cdot t = \frac{g \cdot t^2}{2}$. Man eliminiere t. Die Gleichung der Kurve erhält man zu $s^2 = 4 \cdot H \cdot h$. Was für eine Kurve beschreibt also der Strahl? Man zeichne die Kurve maßstäblich für $H = 1{,}20$ m. Man bestimme rechnerisch und zeichnerisch die Entfernung s_1, in welcher ein 0,75 m unter der Ausflußöffnung des Gefäßes liegender Wasserspiegel vom Strahl getroffen wird.

Der Parameter.

Errichtet man die Ordinate im Brennpunkt, so ist diese nach der Erklärung der Parabel gleich dem Abstand des Berührungspunktes von der Leitlinie, also ist in diesem Falle $P_1 F = P_1 L = p$ (Fig. 34).

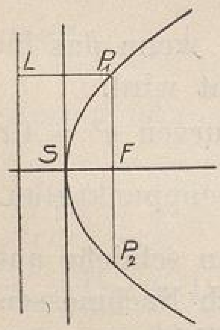


Fig. 34.

Verlängert man diese Ordinate um sich selbst, so erhält man $2\,p$ und nennt diese Länge den Parameter. Zieht man also durch den Brennpunkt eine Sehne senkrecht zur Achse, so ist diese gleich dem Parameter.

Man kann demnach sehr einfach freihändig eine der Parabel nahe kommende Kurve zeichnen, wenn der Scheitel S und der Brennpunkt F gegeben sind. Man trägt senkrecht zur Achse die Strecken $F P_1 = F P_2 = 2\,F S$ auf und verbindet die Punkte P_1, S und P_2 durch eine Kurve, welche die Achse $F S$ in S rechtwinklig schneidet.

Aufgabe: Die Koordinaten der Schnittpunkte einer Geraden $y = Mx + n$ und der Parabel $y^2 = 2px$ zu finden. Man erhält schließlich:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{p - Mn \pm \sqrt{p\,(p - 2\,Mn)}}{M^2}$$

und

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{p \pm \sqrt{p\,(p - 2\,Mn)}}{M}.$$

Die Parabel hat mit einer Geraden also im allgemeinen zwei Schnittpunkte.

Übung: 1. Die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 10\,x$ und der Geraden $y = 2\,x - 4$ zu bestimmen.

2. Die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ und des mit p als Radius um die Mitte der Leitlinie beschriebenen Kreises zu finden.

3. In der Parabel $y^2 = 4\,x$ sei eine Gerade gezogen, die mit dem positiven Teil der X-Achse einen Winkel von 60^0 einschließt und durch den Brennpunkt geht. Die Schnittpunkte und die Länge der Geraden zu bestimmen.

4. Man bestimme die Endpunkte der gemeinsamen Sehne des Kreises $x^2 + y^2 = 25$ und der Parabel $y^2 = 8\,x$.

Ähnlichkeit der Parabeln.

Vergleicht man verschiedene Parabeln mit einander, z. B. $y^2 = 4\,x$ und $y^2 = 6\,x$, so unterscheiden sich diese Gleichungen nur durch den Faktor $p = 2$ und $p = 3$.

Angenommen, in einer Parabel sei der Parameter n mal so groß wie in einer kleineren Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2\,p\,x$, so wäre die Gleichung der größeren $y^2 = 2\,(n\,p)\,x$. Nimmt man nun in der kleineren Parabel eine beliebige Abszisse x_1 und in der größeren Parabel eine n mal so große, also $n\,x_1$, so erhält man als zugehörige Ordinate in der kleineren Parabel $\sqrt{2\,p\,x_1}$ und in der größeren

$$\sqrt{2\,(n\,p)\,(n\,x_1)} = n\sqrt{2\,p\,x_1}.$$

Zu einer n mal so großen Abszisse gehört also auch eine n mal so große Ordinate. Diese Stücke der Parabeln entsprechen einander. Man sagt, die eine Parabel ist n mal so groß als die andere. Alle Parabeln sind einander ähnlich.

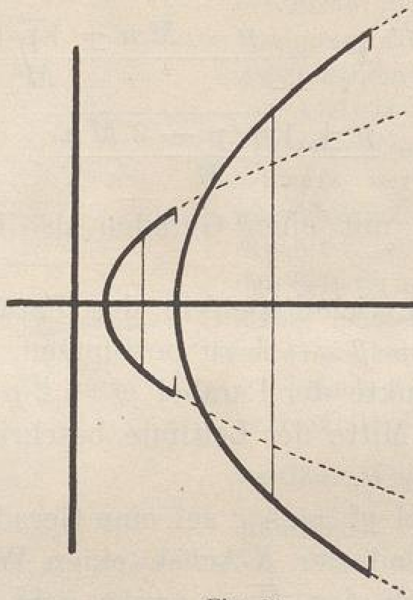


Fig. 35.

Fig. 35 zeigt zwei Parabeln mit gemeinsamer Leitlinie. In der größeren ist p dreimal so groß als in der kleineren. Die dick gezeichneten Stücke entsprechen einander.

Die Steigung der Parabel.

Die Steigung einer Kurve erhält man bekanntlich durch Differenzieren ihrer Gleichung:

$$y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2p}}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Besprechung: Der Wert $\frac{p}{y}$ des Differentialquotienten der Gleichung der Parabel ist für positive y positiv; die Kurve steigt also. Sie steigt bei kleinem y stark; je mehr die Ordinaten wachsen, desto weniger. Bei negativem y fällt sie, und zwar anfangs stärker, später schwächer. Auch aus den Figuren der Parabel ist dies leicht ersichtlich.

Der Differentialquotient wird für keinen endlichen Wert von y zu Null, also ist kein „Extremwert", d. h. kein Maximum und kein Minimum vorhanden. Für $y = 0$ wird $\frac{p}{y}$ unendlich; der Steigungswinkel im Scheitel der Kurve ist also 90^0.

Übung: 1. Wie groß ist die Steigung der Parabel $y^2 = 4x$ an den Punkten mit den Abszissen 1, 2, 3, 4 usw.?

2. In welchen Punkten ist die Steigung gleich 1?

3. Unter welchem Winkel trifft der in Fig. 33 berechnete Wasserstrahl den 0,75 m unter der Ausflußöffnung des Gefäßes liegenden Wasserspiegel?

Die Tangente der Parabel.

Im Berührungspunkt hat die Parabel dieselbe Steigung wie die Tangente. Die Steigung der Parabel war durch Differenzierung ihrer Gleichung gefunden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

Dies ist die allgemeine Größe der Steigung. Die Steigung der Parabel im Berührungspunkt (x_1, y_1) ist also $\frac{p}{y_1}$. Von der Tangente kennen wir jetzt die Steigung und einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt.

Die Gleichung einer Geraden, die durch einen Punkt geht, und deren Steigung gleich M ist, war nach Gleichung (4):

$$M = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Setzt man hierin die berechnete Steigung ein, so erhält man:

$$\frac{p}{y_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Dies ist die Gleichung der Tangente. Sie läßt sich noch vereinfachen:

$$y y_1 - y_1^2 = px - px_1$$
$$y y_1 - 2px_1 = px - px_1$$
$$y y_1 = p(x + x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Bemerkung: Diese Gleichung der Tangente unterscheidet sich von derjenigen der Parabel dadurch, daß man statt des Quadrates y^2 das Produkt yy_1 und statt $2x$ die Summe $(x + x_1)$ hat. Die Gleichung ist von der zweiten Dimension, da p eine Länge ist.

Der Abschnitt der Tangente auf der Y-Achse.

Die Gleichung der Tangente ist $y\,y_1 = p\,(x + x_1)$. Für den Schnitt mit der Y-Achse ist $x = 0$. Setzt man dies ein, so erhält man

$$y = p\,\frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1^2}{2\,y_1} = \frac{1}{2}\,y_1$$

Der Abschnitt der Tangente auf der Y-Achse ist also halb so groß wie die Ordinate des Berührungspunktes.

Bemerkung: Aus dieser Tatsache ergibt sich eine sehr einfache Konstruktion der Tangente. Man halbiert die Ordinate des Berührungspunktes, trägt die erhaltene Hälfte vom Scheitel auf der Y-Achse nach oben bezw. unten ab und zieht durch den erhaltenen Punkt und den Berührungspunkt eine Gerade. Dies ist die Tangente.

Übung: 1. An die Parabel $y^2 = 4\,x$ in einem ihrer Punkte mit der Ordinate $y_1 = 8$ cm eine Tangente zu legen. Wie heißt die Gleichung der Tangente in der Normalform? Maßstäbliche Zeichnung.

2. Für welchen Berührungspunkt der Parabel würde die Tangente parallel zur X-Achse gehen? Für welchen parallel zur Y-Achse?

3. Man stelle die Gleichungen der Tangenten auf, die eine Steigung von 30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150° haben. Man bestimme die Koordinaten ihrer Berührungspunkte und die Größe ihrer Abschnitte auf den Achsen. Maßstäbliche Zeichnung für $p = 2$ cm.

4. Die Gleichung der Tangente aufzustellen, deren Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt. Wie groß ist ihr Steigungswinkel? Maßstäbliche Zeichnung für $p = 4$ cm.

Die Normale.

Errichtet man auf der Tangente in ihrem Berührungspunkt ein Lot, so heißt dies die Normale. Ihre Gleichung soll aufgestellt werden. Die Steigung eines Lotes war nach Gleichung (5)

$$M_1 = -\frac{1}{M}$$

wenn M die Steigung der Geraden ist, auf der das Lot senkrecht steht.

Da nun die Steigung der Tangente $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y_1}$ war, so ist die der Normalen $\frac{dy}{dx} = -\frac{y_1}{p}$

Dies wird wie bei der Tangente in die Gleichung (4) einer Geraden eingesetzt, die durch einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt $x_1 y_1$, geht und eine gegebene Steigung hat:

$$-\frac{y_1}{p} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Aufgabe: Diese Gleichung ist auf die Normalform zu bringen und n zu bestimmen.

Die Berührungsgrößen.

Beim Kreise konnte man alle vier Berührungsgrößen planimetrisch bestimmen. Bei der Parabel berechnen wir eine dieser Größen analytisch und leiten aus ihr die anderen planimetrisch ab (Fig. 36).

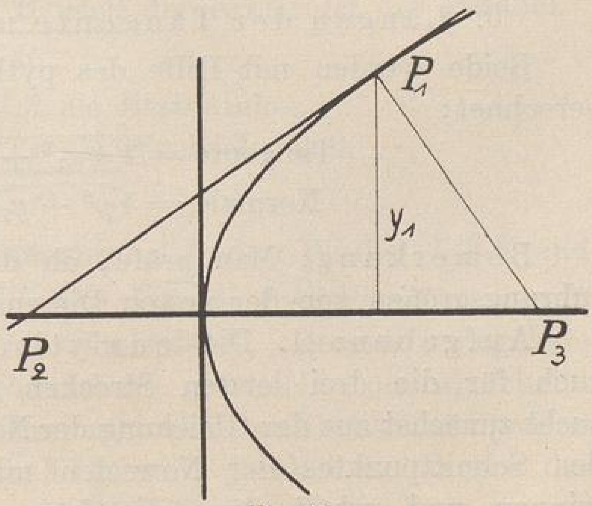


Fig. 36.

1. Länge der Subtangente.

Die Tangente $yy_1 = p(x + x_1)$ schneidet die X-Achse im Punkte P_2. Die Koordinaten dieses Schnittpunktes erfüllen die Gleichung $y_2 y_1 = p(x_2 + x_1)$. Für P_2 ist aber $y_2 = 0$. Also ist

$$0 = p(x_2 + x_1)$$

$$x_2 = -x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,\mathrm{a})$$

Demnach ist die Subtangente $= 2x_1$, also doppelt so groß als die Abszisse des Berührungspunktes; sie wird demnach im Scheitel der Parabel halbiert.

Bemerkung: Hieraus folgt eine weitere einfache Konstruktion der Tangente, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, durch Abtragen von x_1 (siehe auch Seite 40).

2. Länge der Subnormalen.

Hat man die Subtangente auf diesem analytischen Wege gefunden, so lassen sich die übrigen Größen sehr leicht planimetrisch bestimmen.

Die Ordinate des Berührungspunktes ist die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und Subnormalen

$$y_1^2 = \text{Subtangente} \times \text{Subnormale}$$

$$\text{Subnormale} = \frac{y_1^2}{2x_1} = \frac{2px_1}{2x_1} = p \quad . \quad . \quad . \quad (17\,\mathrm{b})$$

Die Subnormale ist also für jeden Punkt der Parabel konstant, nämlich gleich dem halben Parameter.

3. Längen der Tangente und Normalen.

Beide werden mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes berechnet:

$$\text{Tangente} = \sqrt{4x_1^2 + 2px_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,\mathrm{c})$$

$$\text{Normale} = \sqrt{p^2 + y_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,\mathrm{d})$$

Bemerkung: Man prüfe, ob die Formeln für die Berührungsgrößen von der ersten Dimension sind.

Aufgaben: 1. Die analytische Ableitung soll auch für die drei letzten Strecken gesucht werden. Man sucht zunächst aus der Gleichung der Normalen die Koordinaten des Schnittpunktes der Normalen mit der X-Achse zu gewinnen und erhält dann die Länge der Subnormalen als

Differenz zweier Abszissen. — Die Länge der Tangente und die der Normalen ergibt sich dann als Abstand ihrer Endpunkte P_1 und P_2 bzw. P_1 und P_3.

2. Man beweise, daß Subtangente und Subnormale zusammen gleich dem doppelten Brennstrahl $FB = LB$ (Fig. 37) sind.

Benennungen: Die Verbindung eines Punktes der Parabel mit dem Brennpunkt nennen wir Brennlinie oder Brennstrahl (Radius vector). Zieht man durch einen Punkt der Parabel eine Parallele zur X-Achse, so nennen wir diese Linie „Durchmesser„.

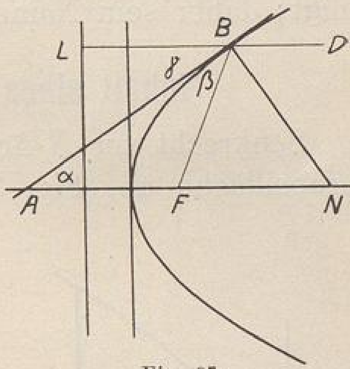


Fig. 37.

Lehrsatz: Die Tangente der Parabel halbiert den Winkel zwischen der Brennlinie und der Verlängerung des Durchmessers, die Normale den zugehörigen Nebenwinkel.

Beweis: $AF = x_1 + \frac{p}{2}$ (Fig. 37.),

$$LB = x_1 + \frac{p}{2} \text{ (Fig. 37),}$$

$$\underline{LB = FB \text{ nach}} \text{ der Erklärung der Parabel,}$$

also ist $AF = FB$.

Daher $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$ als Basiswinkel,

$$\underline{\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \gamma \text{ als}} \text{ Wechselwinkel,}$$

demnach $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma$.

Also halbiert die Tangente AB den Winkel LBF und demnach die Normale PN den Winkel FBD.

Anwendung: Ein Hohlspiegel, dessen spiegelnde Fläche ein Rotations-Paraboloid ist (siehe unten), heißt parabolisch. Ein vom Brennpunkt eines parabolischen Spiegels ausgehender Lichtstrahl (FB) wird parallel zur Achse der Parabel zurückgeworfen (BD). Ebenso alle anderen von F

ausgehenden Lichtstrahlen. Die Spiegel der Scheinwerfer sind deshalb parabolisch. Das Licht ist dem Spiegel meist etwas näher gerückt, damit die Strahlen ein wenig divergieren.

Umgekehrt werden alle parallel zur Achse eintretenden Lichtstrahlen im Brennpunkt vereinigt. Richtet man die Achse eines solchen Spiegels gegen die Sonne, so werden die Sonnenstrahlen vom Spiegel zurückgeworfen und im Brennpunkt vereinigt; daher sein Name.

Inhalt eines Abschnittes der Parabel.

Senkrecht zur X-Achse schneiden wir ein Stück von der Parabelfläche ab (Fig. 38). Wir berechnen den Inhalt des oberen Teiles dieses Abschnittes, indem wir ihn in senkrechte schmale Streifen von der Höhe y und der Breite $\triangle x$ zerlegen. Wenn jeder Streifen unendlich schmal ist, so kann er als Rechteck aufgefaßt werden, und sein Inhalt ist $y \cdot dx$. Die ganze Fläche wäre also:

$$F = \int y \cdot dx = \int \sqrt{2px} \cdot dx$$

Die Fläche bis zum Ende der Abszisse x_1 ist:

$$F = \int_{x=0}^{x=x_1} \sqrt{2px} \cdot dx =$$

$$= \sqrt{2p} \int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

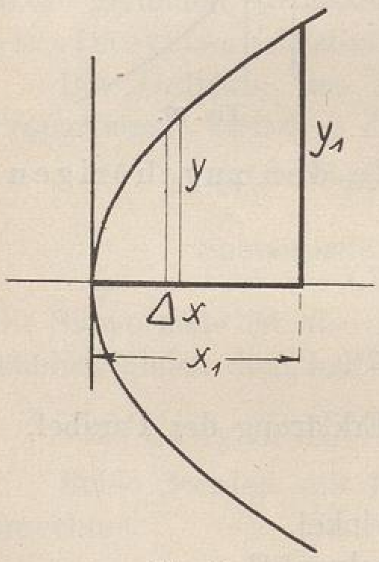


Fig. 38.

Integriert man diesen Ausdruck, so erhält man: $\left[\sqrt{2p}\,\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{x_1}$

Setzt man hierin die Grenzen ein, so wird:

$$F = \sqrt{2p}\,\frac{x_1^{3/2}}{3/2} - 0 = \frac{2}{3} x_1 \sqrt{2px_1} = \frac{2}{3} x_1 y_1 \,.\,.\, (18)$$

Besprechung: Diese Formel ist von der zweiten Dimension. Die Fläche ist $^2/_3$ des umschließenden Rechtecks, was auch dem Augenmaß entspricht. In der Formel kann man x und y vertauschen, d. h. man erhält denselben Inhalt, wenn man die Parabel um 90^0 dreht und den Abschnitt bis y_1 rechnet.

Rotations-Paraboloid.

1. Berechnung nach dem Prinzip von Cavalieri.

Nach diesem Prinzip sind alle Körper inhaltsgleich, die in gleicher Höhe gleichen Querschnitt haben.

Läßt man eine Parabel um die X-Achse rotieren, so entsteht ein Rotations-Paraboloid, das wir uns aufrechtstehend

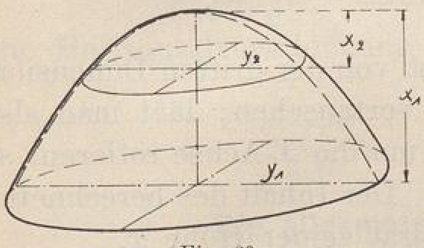


Fig. 39 a.

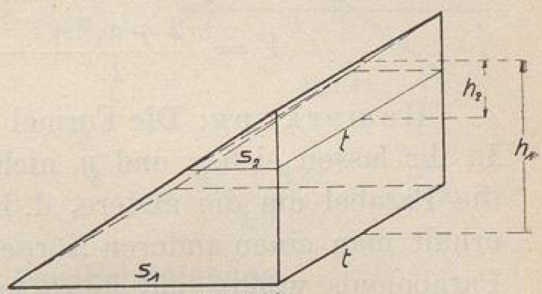


Fig. 39 b.

denken (Fig. 39 a). Da in einer Parabel sich die Abszissen x wie die Quadrate der Ordinaten y verhalten, so ist:

$$x_1 : x_2 = y_1^2 : y_2^2$$

$$\text{also auch } x_1 : x_2 = y_1^2\,\pi : y_2^2\,\pi.$$

Diese horizontalen Querschnitte durch das Paraboloid verhalten sich also wie die Höhen x. Dies ist auch bei dem daneben gezeichneten Dachkörper der Fall. Denn $h_1 : h_2 = s_1 : s_2 = s_1 t : s_2 t$. Beide Körper haben in gleicher Höhe gleiche Querschnitte, sind also inhaltsgleich. Ihre Grundflächen sind $s_1 t = y_1^2 \pi$.

Der Dachkörper ist aber die Hälfte des zugehörigen Prismas und sein Inhalt demnach $\frac{1}{2} G \cdot h$. Diese Formel gilt also auch für das Paraboloid und sein Inhalt bis zu den Koordinaten x_1 und y_1 ist

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{2} G \cdot h = \frac{1}{2} y_1^2 \pi \cdot x_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

2. Berechnung durch Integration.

Denken wir uns wie in Fig. 38 die Parabel in unendlich dünne Streifen zerlegt und lassen wir sie jetzt um die X-Achse rotieren, so entstehen unendliche dünne Scheiben von der Grundfläche $y^2 \pi$, der Dicke dx und dem Inhalt $y^2 \pi \cdot dx$. Der Gesamtinhalt ist also

$$V = \int_{x=0}^{x=x_1} y^2 \pi \, dx = \int_0^{x_1} 2\, p\, x\, \pi \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{2\, p\, x^2 \pi}{2} \right]_0^{x_1}$$

Setzt man die Grenzen $x = x_1$ und $x = 0$ ein, so erhält man denselben Wert wie vorher.

$$V = \frac{2\, p\, x_1{}^2 \pi}{2} - 0 = \frac{y_1{}^2\, x_1\, \pi}{2}.$$

Bemerkung: Die Formel ist von der dritten Dimension. In ihr lassen sich x und y nicht vertauschen; läßt man also die Parabel um die andere, d. h. um die Y-Achse rotieren, so erhält man einen anderen Körper. Der Inhalt des berechneten Paraboloids wächst mit dem Quadrat seiner Höhe x.

Aufgabe: 1. Wenn man eine Parabel um die Y-Achse rotieren läßt, so soll der entstehende trichterförmige Körper durch eine ähnliche Integration gewonnen werden.

2. Bei dieser Rotation um die Y-Achse beschreibt die Parabel einen ringförmigen Körper, der den vorigen zu einem Zylinder ergänzt. Man berechne ihn als Differenz oder durch Integration aus einer Summe von Hohlzylindern.

3. Bei der Rotation der Parabel um die X-Achse bleibt ein haubenartiger Außenkörper übrig. Man berechne ihn durch Integration aus einer Summe von Hohlzylindern. Der Körper ergänzt das Paraboloid zu einem Zylinder, kann also auch als Differenz gewonnen werden.

Verschiebung der Parabel.

Eine Parabel habe die Scheitelgleichung $\eta^2 = 2\, p\, \xi$ und gegen ein neues Achsenkreuz die horizontale Verschiebung h und die vertikale Verschiebung v (Fig. 40).

Ein beliebiger Punkt der Parabel hat also jetzt die Gleichung:

$$(y-v)^2 = 2\,p\,(x-h)$$

$$y^2 - 2\,v\,y + v^2 = 2\,p\,x - 2\,p\,h$$

oder: $y^2 - 2\,v\,y - 2\,p\,x + v^2 + 2\,p\,h = 0.$

Es sei nun folgende Gleichung einer allgemeinen Parabel gegeben:

$$y^2 + a\,y + b\,x + c = 0.$$

So ist hierin:

der Parameter

$$p = -\frac{b}{2} \quad \ldots\ldots \quad (20\,\text{a})$$

die Vertikalverschiebung

$$v = -\frac{a}{2} \quad \ldots\ldots \quad (20\,\text{b})$$

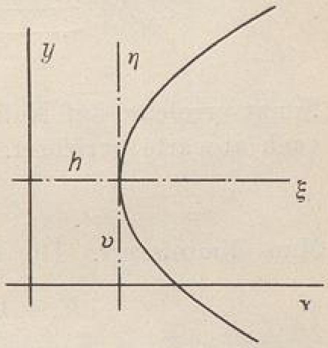


Fig. 40.

die Horizontalverschiebung

$$h = \frac{c - v^2}{2\,p} = \frac{c - \frac{a^2}{4}}{-b} = \frac{a^2 - 4\,c}{4\,b} \quad \ldots \quad (20\,\text{c})$$

Die allgemeine Parabelgleichung.

Eine Gleichung zweiten Grades ist dann eine Parabelgleichung, wenn die eine Koordinate nur in der ersten Potenz, die andere Koordinate in der zweiten oder in der ersten und zweiten Potenz und außerdem kein Produkt beider Koordinaten vorkommt.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$y^2 + a\,y + b\,x^2 + c\,x + d\,y\,x + e = 0$$

stellt also dann eine Parabel vor, wenn $b = 0$ und $d = 0$ ist.

Diese Gleichung stellt dagegen einen Kreis dar, wenn $d = 0$ und $b = 1$ ist. Siehe Gleichung (10).

Anwendungen: 1. Ein Geschoß verläßt das Geschützrohr, welches um den Winkel α gegen die Horizontale geneigt ist, mit der Geschwindigkeit v, Fig. 41. Man soll die Gleichung der Geschoßbahn bestimmen, wenn der Luftwiderstand nicht berücksichtigt wird.

Anleitung: Das Geschoß behält die horizontale Geschwindigkeit $v_1 = v \cdot \cos\alpha$ während der ganzen Flugzeit bei, so daß es nach t Sekunden einen horizontalen Weg $s = v_1 \cdot t$ zurückgelegt hat. Die vertikale Geschwindigkeit v_2 des Geschosses ändert sich nach den Gesetzen des freien Falles. Sie ist beim Verlassen des Geschützrohres $v_2 = v \cdot \sin \alpha$, vermindert sich bis zum Augenblick, wo das Geschoß seinen höchsten

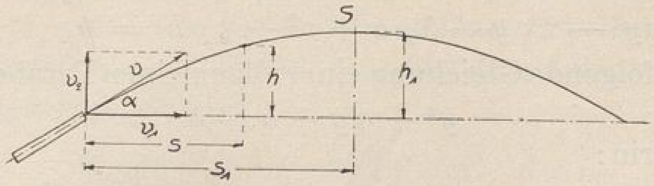


Fig. 41.

Punkt erreicht, auf Null und wächst dann ins Negative, d. h. ist dann nach abwärts gerichtet. Die Flughöhe h ist nach t Sekunden

$$h = v_2 \cdot t - \frac{g\,t^2}{2}.$$

Man eliminiere t. Die Gleichung der Kurve erhält man zu

$$h = \operatorname{tg} \alpha \cdot s - \frac{g}{2} \cdot \frac{s^2}{v^2 \cdot \cos^2 \alpha}.$$

Welcher Art ist die Kurve? Welches sind die Koordinaten s_1 und h_1 des höchsten Punktes der Kurve? Man bestimme Tragweite s_2 und höchste Erhebung h_1 für ein Infanteriegeschoß mit $v = 800$ m/sec und $\alpha = 20^0$.

2. Ein Freiträger trägt an seinem nicht eingespannten Ende eine Einzellast Q. Wie groß ist in jedem Querschnitt das Biegungsmoment M_b? (Bezeichnungen nach Fig. 42.) Wie groß werden die Biegungsmomente bei gleichmäßig verteilter Last Q? Welche Kurven entstehen,

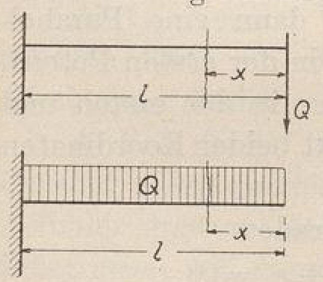


Fig. 42.

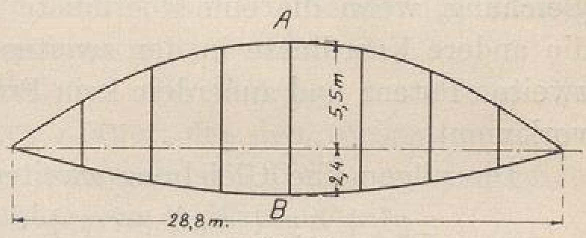


Fig. 43.

wenn man in jedem Trägerquerschnitt das Biegungsmoment für Einzellast und für verteilte Last aufträgt? In welcher Beziehung stehen die beiden Kurven zueinander? Zeichne beide Kurven für $Q = 1000$ kg und $l = 1$ m. Maßstab für die Längen 1 : 10, für M_b 1 mm = 2000 cmkg

3. Die obere und die untere Gurtung des in Fig. 43 gezeichneten Brückenträgers sollen die Form einer Parabel mit dem Scheitel in A bezw. B haben. Die eingeschriebenen Maße des mittleren Stabes sind gegeben. Man bestimme rechnerisch die Länge der übrigen sechs senkrechten Stäbe, welche gleiche Entfernung voneinander haben.

Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse.

Erklärung: Die Ellipse ist der geometrische Ort für diejenigen Punkte (P), für welche die Summe der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten (F_1 und F_2) gleich groß ist. In Fig. 44 ist $PF_1 + PF_2 =$ Konstante $= 2\,a$.

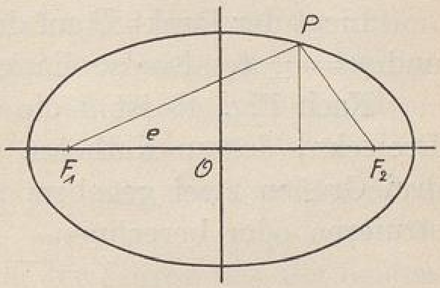


Fig. 44.

Ableitung der Gleichung: Wir legen die X-Achse durch $F_1 F_2$ und die Y-Achse als Lot hierzu durch die Mitte von $F_1 F_2$. Wir setzen $F_1 F_2 = 2\,e$. Wenn nun P ein beliebiger Punkt xy der Ellipse und die Summe seiner Entfernungen von F_1 und F_2 gleich $2\,a$ ist, so wird:

$$PF_1 = \sqrt{(e + x)^2 + y^2}$$
$$PF_2 = \sqrt{(e - x)^2 + y^2}$$

Also: $\sqrt{(e + x)^2 + y^2} + \sqrt{(e - x)^2 + y^2} = 2\,a.$

Um die Wurzeln fortzuschaffen, quadriert man zweimal und erhält schließlich: $a^2 y^2 + x^2(a^2 - e^2) = a^2(a^2 - e^2)$.

Hierin setzt man $a^2 - e^2 = b^2$ (Fig. 45) und erhält:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2} \\ \text{oder:}\quad \boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

Bezeichnung: Die große Achse heißt Hauptachse ($= 2\,a$), die kleine heißt Nebenachse ($= 2\,b$). F_1 und F_2 sind die Brennpunkte, PF_1 und PF_2 sind die Brennlinien, Brennstrahlen oder Fahrstrahlen. Der Abstand der Brennpunkte vom Zentrum, z. B. OF_2, heißt die Exzentrizität ($= e$). Jede Gerade, die durch den Mittelpunkt geht, ist ein Durchmesser.

Besprechung: Aus der Formel (21) der Ellipse folgt, daß

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

ist. Zu jedem x gehören also zwei gleiche und entgegengesetzte y; die Kurve ist demnach zur X-Achse symmetrisch. Dasselbe läßt sich für die Y-Achse nachweisen.

Liegt der Punkt P auf der X-Achse, so ist $y = 0$ und $x = \pm a$, also ist die große Achse $= 2a$.

Liegt der Punkt P auf der Y-Achse (Fig. 45), so ist $x = 0$ und $y = \pm b$, also ist die kleine Achse gleich $2b$.

Nach Fig. 45 ist a die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten e und b sind. Sind von diesen drei Größen zwei gegeben, so läßt sich die dritte leicht konstruieren oder berechnen.

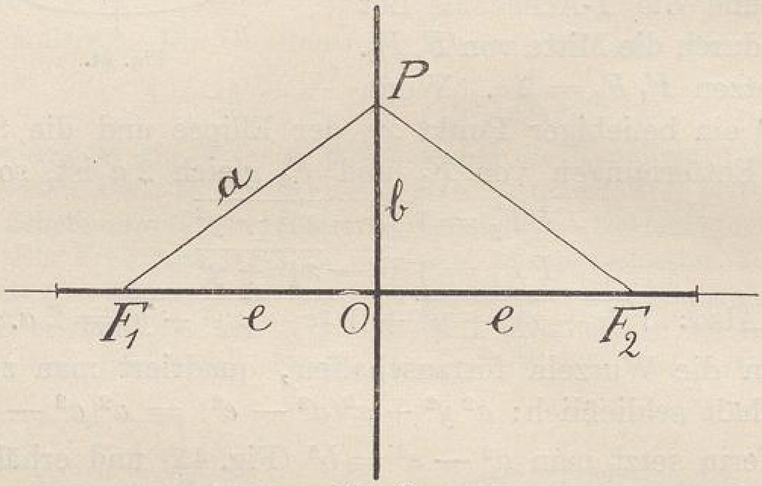


Fig. 45.

Für $x > a$ wird y imaginär und für $y > b$ wird x imaginär. Hier liegen also keine Punkte der Ellipse.

Wird $a = b$, so wird die Ellipse zum Kreis. Dieser ist demnach nur ein besonderer Fall der Ellipse.

Konstruktionen der Ellipse.

1. Aus der Erklärung ergibt sich eine einfache Konstruktion der Ellipse aus der großen Achse und den Brennpunkten. Man teilt die große Achse in zwei beliebig große Teile und schlägt mit dem einen Teil um den einen Brennpunkt, mit dem anderen Teil um den anderen Brennpunkt einen Kreis. Die erhaltenen Kreise schneiden sich in zwei Ellipsenpunkten. Dies Verfahren wiederholt man beliebig oft.

2. Bei der **Fadenkonstruktion** befestigt man zwei Stifte in den Brennpunkten und schlingt einen unelastischen Faden herum. Dann spannt man durch die Spitze eines Bleistiftes den Faden an und fährt mit ihr an der Innenseite des Fadens hin, indem man zugleich auf das Papier zeichnet. Es entsteht eine Ellipse. In der Praxis ist diese Konstruktion nur dann angebracht, wenn keine große Genauigkeit der Ellipse verlangt wird (z. B. zum Anreißen elliptischer Tischplatten oder elliptischer Gewölbebogen), weil es keinen Faden gibt, welcher unelastisch und gleichzeitig für den vorliegenden Zweck geschmeidig genug ist.

3. Die bequemste Konstruktion der Ellipse aus den beiden Achsen ist folgende (Fig. 46). Man trägt auf einem Papier-

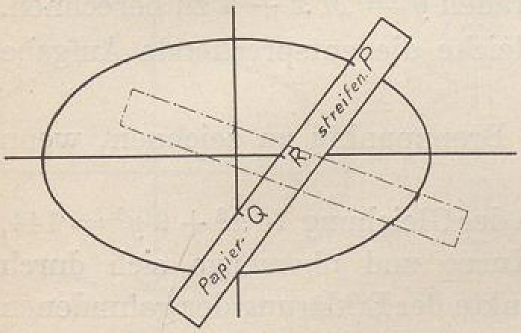


Fig. 46.

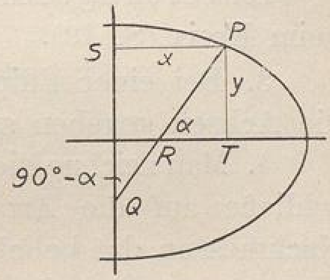


Fig. 47.

streifen mit genau gerader Kante die beiden Halbachsen $PQ = a$ und $PR = b$ von P aus aufeinander ab, so daß $QR = a - b$ ist. Dann verschiebt man den Papierstreifen derart, daß sich der Punkt Q auf der kleinen Achse und der Punkt R auf der großen Achse bewegt. Der Punkt P beschreibt dann eine Ellipse. Man zeichnet bei verschiedenen Stellungen des Streifens den Punkt P von diesem auf das Zeichenpapier mit einem scharfen Bleistift.

Die letztere Ellipsenkonstruktion ist sehr vorteilhaft, weil in der Praxis meist die Achsen der Ellipse gegeben sind und weil keine Hilfslinien auf das Papier gezeichnet werden. Diese Konstruktion gibt auch die Grundlage zu einem **Ellipsenzirkel**.

Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion ergibt sich nach Fig. 47 wie folgt:

$$y = PR \cdot \sin\alpha = b \cdot \sin\alpha$$

Quadriert: $y^2 = b^2 \cdot \sin^2\alpha$

Erweitert: $a^2 y^2 = a^2 b^2 \cdot \sin^2\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{I}$

$$x = PQ \cdot \sin(90^0 - \alpha) = a \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 x^2 = a^2 b^2 \cdot \cos^2\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{II}$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$. Diese Gleichung stellt aber die Ellipse mit den Halbachsen a und b dar.

Übung: 1. Wie groß ist x für $y = 0$, und wie groß y für $x = 0$?

2. Die Koordinaten des Schnittpunktes der Ellipse $x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$ mit einer Geraden $y = Mx + n$ zu berechnen.

Anleitung: Man vergleiche die entsprechende Aufgabe beim Kreis (S. 19).

3. Bei einer Ellipse die Brennpunkte zu zeichnen, wenn die Achsen gegeben sind.

4. Man zeichne die Kurve der Gleichung $16\,x^2 + 9\,y^2 = 144$, schließe auf die Art der Kurve und überzeuge sich durch Nachmessen, daß beliebige Punkte der Erklärung der gefundenen Kurve genügen.

5. Ein Punkt der Ellipse $25\,x^2 + 16\,y^2 = 400$ hat die Ordinate $y_1 = 2$. Wie groß ist seine Abszisse?

6. Zwei Punkte der Ellipse $25\,x^2 + 16\,y^2 = 400$ haben die Abszissen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$. Wie groß ist die zugehörige Sehne?

7. Von einer Ellipse ist $e = 4$ cm und $a = 5$ cm gegeben. Wie lautet ihre Gleichung?

8. Auf der Ellipse $25\,x^2 + 16\,y^2 = 400$ ist ein Punkt mit der Abszisse $x_1 = 2{,}5$ gegeben. Wie lang sind seine Brennlinien?

Der Parameter.

Wir berechnen die Ordinate y_1 im Brennpunkt, indem wir die Abszisse $x_1 = e$ in die Gleichung der Ellipse einsetzen:

$$e^2 b^2 + y_1^2 a^2 = a^2 b^2$$

Nach Fig. 45 ist aber $e^2 = a^2 - b^2$. Dies wird eingesetzt und ergibt:
$$a^2 b^2 - b^4 + y_1^2 a^2 = a^2 b^2$$

Also ist: $y_1^2 = \frac{b^4}{a^2}$ und $y_1 = \pm \frac{b^2}{a}$

Bei der Parabel war die Ordinate im Brennpunkt $y_1 = p$.

Bei der Ellipse kann man nun die Ordinate $y_1 = \frac{b^2}{a} = p$ setzen. Dann ist die ganze Sehne des Brennpunktes, die senkrecht zur Achse steht, gleich $2p$. Auch hier nennen wir diese Sehne den Parameter (Fig. 48).

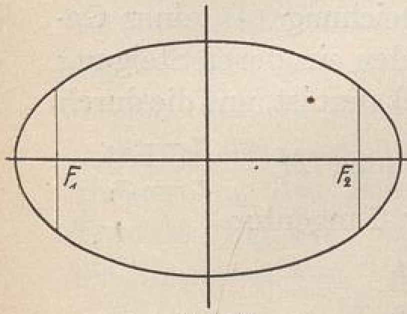


Fig. 48.

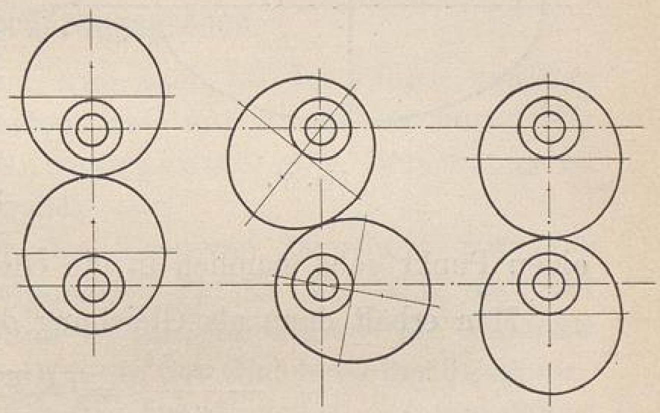


Fig. 49 (a—c).

Anwendung: Die Eigenschaft der Ellipse, daß die Summe der Fahrstrahlen konstant ist, findet unter anderem Anwendung bei elliptischen Zahnrädern, welche man an manchen Textilmaschinen findet. Der Zahnkranz hat die Form einer Ellipse, und beide Zahnräder sind einander kongruent. Die Bohrungen der Zahnräder liegen in den Brennpunkten der Ellipse. Wenn sich nach Fig. 49 das obere Rad mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit dreht, so dreht sich das untere Rad mit veränderlicher Geschwindigkeit. Fig 49 *a* zeigt die Stellung der kleinsten, Fig. 49 *b* diejenige einer mittleren und Fig. 49 *c* diejenige der größten Winkelgeschwindigkeit des unteren Rades.

Die Tangente an die Ellipse.

Wie bisher berechnen wir auch bei der Ellipse ihre Steigung durch Differenzieren der Gleichung der Ellipse:

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$$

$$2 x b^2 + 2 y a^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

Die Steigung ist also: $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x b^2}{y a^2}}$ . . . . . . (22)

Folglich ist $-\dfrac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$ die Steigung der Kurve im Punkte P_1 mit den Koordinaten $x_1 y_1$ (Fig. 50). Diese Steigung ist aber auch zugleich die Steigung der Tangente im Berührungspunkt P_1. Man setzt diese Steigung in die Gleichung (4) einer Geraden ein, deren Steigung bekannt ist, und die durch

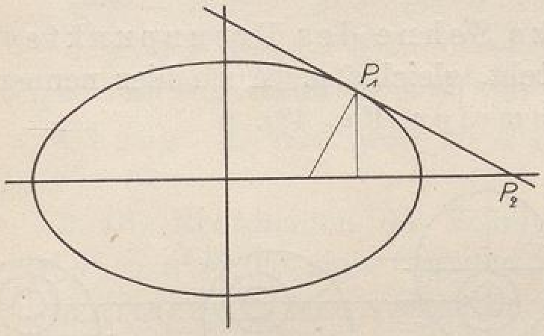


Fig. 50.

einen Punkt geht, nämlich in die Gleichung $M = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

Man erhält dann als Gleichung der Tangente:

$$-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Diese Gleichung läßt sich wie beim Kreis vereinfachen:

$$y y_1 a^2 - y_1^2 a^2 = - x x_1 b^2 + x_1^2 b^2$$

$$y y_1 a^2 + x x_1 b^2 = x_1^2 b^2 + y_1^2 a^2$$

$$x x_1 b^2 + y y_1 a^2 = a^2 b^2$$

$$\boldsymbol{\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2}} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

B e m e r k u n g: Wie beim Kreis unterscheidet sich diese Gleichung der Tangente von der der Ellipse dadurch, daß aus x^2 und y^2 die Produkte $x x_1$ und $y y_1$ geworden sind.

A u f g a b e: 1. Man verfolge die Änderung des Differentialquotienten mit dem Verlauf der Kurve.

2. Man bringe die Gleichung (23) der Tangente auf die Normalform.

Normale.

Da die Steigung der Tangente $-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$ ist, so ist die der Normalen $+\frac{y_1 a^2}{x_1 b^2}$. Setzt man diese in die Gleichung (4) einer Geraden ein, deren Steigung gegeben ist und die durch den Berührungspunkt geht, so erhält man als Gleichung der Normalen:

$$\frac{y_1 a^2}{x_1 b^2} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Aufgabe: Diese Gleichung auf die Normalform zu bringen und n zu bestimmen.

Berührungsgrößen.

Wie bei der Parabel wird auch bei der Ellipse von den Berührungsgrößen mindestens eine analytisch berechnet. Wir wählen auch hier die Subtangente. Die Berechnung ist ähnlich der bei der Parabel.

Aus der Gleichung der Tangente berechnet man die Abszisse x_2 des Schnittpunktes P_2 der Tangente mit der X-Achse (Fig. 50). Alsdann ist die Subtangente die Differenz der Abszissen von P_2 und P_1. In der Gleichung der Tangente: $x_2 x_1 b^2 + y_2 y_1 a^2 = a^2 b^2$ wird $y_2 = 0$ und daher:

$$x_2 = \frac{a^2 b^2}{x_1 b^2} = \frac{a^2}{x_1}$$

$$\text{Subtangente} = x_2 - x_1 = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$$

Ferner ergibt sich die Subnormale daraus, daß die Ordinate y_1 des Berührungspunktes P_1 die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und Subnormalen ist.

$$y_1^2 = \text{Subtangente} \times \text{Subnormale}$$

$$y_1^2 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1} \times \text{Subnormale}$$

$$\text{Subnormale} = \frac{y_1^2 x_1}{a^2 - x_1^2} = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x_1^2\right)\frac{x_1}{a^2 - x_1^2}$$

$$\text{Subnormale} = \frac{b^2 x_1}{a^2} = \frac{p}{a} x_1.$$

Die Längen von Tangente und Normale ergeben sich aus dem pythagoreischen Lehrsatz.

$$\text{Tangente} = \sqrt{\frac{(a^2 - x_1{}^2)^2}{x_1{}^2} + y_1{}^2}$$

$$\text{Normale} = \sqrt{\frac{b^4}{a^4} x_1{}^2 + y_1{}^2}$$

Bemerkung: Man prüfe, von welcher Dimension die Formeln sind.

Oben war die Entfernung des Punktes P_2 von dem Achsenschnittpunkt berechnet worden, nämlich $x_2 = \frac{a^2}{x_1}$. Dies Resultat ist von der kleinen Achse b unabhängig und nur von a und x_1 abhängig. Die Tangenten aller Ellipsen mit gleicher horizontaler Achse, deren Berührungspunkte senkrecht übereinander liegen, shneiden sich also in einem Punkte auf dieser Achse (Fig. 51).

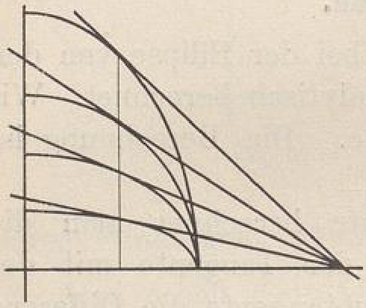


Fig. 51,

Übung: 1, Die Gleichung der Tangente aufzustellen, deren Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt. Maßstäbliche Zeichnung für $a = 6$ und $b = 4$ cm.

2. Wie groß ist der Winkel dieser Tangente mit der X-Achse?

3. Für welchen Berührungspunkt der Ellipse geht die Tangente parallel zur X-Achse? Für welchen parallel zur Y-Achse?

4. Man stelle die Gleichungen der Tangenten auf, die eine Steigung von 30^0, 45^0, 60^0, 120^0, 135^0, 150^0 haben. Man bestimme die Koordinaten ihrer Berührungspunkte und die Größen ihrer Abschnitte auf den Achsen. Maßstäbliche Zeichnung für $a = 6$ und $b = 4$ cm.

5. An die Ellipse $16\,x^2 + 25\,y^2 = 400$ in dem Berührungspunkte, dessen $y_1 = 3$ cm ist, eine Tangente zu legen. Normalform. Maßstäbliche Zeichnung in cm.

6. Man bestimme die Steigung der Ellipse $16\,x^2 + 25\,y^2 = 400$ an den Punkten mit der Abszisse 0, 1, 2, 3, 4, 5 cm.
7. Wo hat die Ellipse die Steigung 1?

Die Scheitelgleichung der Ellipse.

Die Mittelpunktsgleichung war: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = a^2\,b^2$

Verschiebt man die senkrechte Achse in den Scheitel links (Fig. 52), so bleibt für den Punkt P die Ordinate y unverändert; dagegen wird $x = \xi - a$. Die Scheitelgleichung der Ellipse lautet also:

$$\frac{(\xi - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\xi^2 - 2\,a\,\xi + a^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{2\,\xi}{a} - 1$$

$$\boldsymbol{y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,\xi - \frac{b^2}{a^2}\,\xi^2} \quad . \; . \; . \quad (24)$$

Setzt man auch hier $\frac{b^2}{a} = p$ und für ξ das gebräuchlichere x, so erhält man:

$$\boldsymbol{y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}\,x^2}$$

Bemerkung: Diese Formel unterscheidet sich durch das Glied mit x^2 von derjenigen der Parabel.

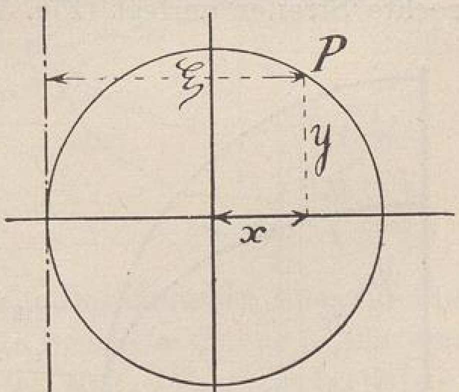


Fig. 52.

Aufgabe: 1. Man verschiebe die Y-Achse in den Brennpunkt und stelle die Gleichung auf.

2. Man verschiebe die X-Achse in den oberen Scheitel und stelle die Gleichung auf.

3. Man zeichne die Kurve der Gleichung $y^2 + 2\,x^2 - 40\,x = 0$. Man schließe auf die Art der Kurve und überzeuge sich durch Nachmessen, daß sie der Erklärung genügt.

4. In welchem Punkte hat die Kurve $y^2 = 4x - 2x^2$ ihr Maximum?

Der Inhalt der Ellipse.

Wenn die Gleichung der Ellipse $x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$ ist, so ist die Ordinate der Ellipse:

$$y_e = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Schlägt man nun um den Mittelpunkt der Ellipse einen Kreis mit der halben großen Achse, so ist die Ordinate des Kreises:

$$y_k = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Diese beiden Werte für die Ordinaten vergleichen wir miteinander und finden, daß y_e jedesmal $\frac{b}{a}$ mal so groß ist wie das betreffende y_k, d. h. dasjenige y_k, das zu demselben x gehört. Multipliziert man also die Ordinaten des Kreises mit $\frac{b}{a}$, so erhält man die Ellipse. —

Denkt man sich jetzt die Ellipse in unendlich schmale senkrechte Streifen zerlegt (Fig. 53), so ist der Inhalt eines jeden

$$y_e \cdot dx = \frac{b}{a} y_k \cdot dx$$

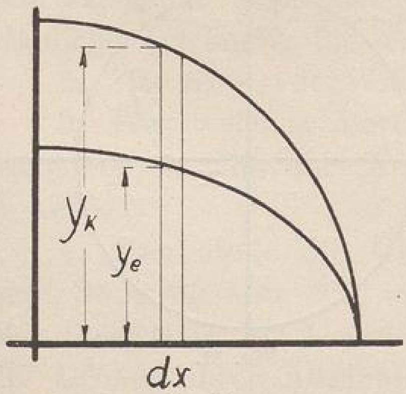


Fig. 53.

Der ganze Inhalt der Ellipse:

$$\int \frac{b}{a} y_k \cdot dx = \frac{b}{a} \int y_k \cdot dx$$

Dies Integral ist aber der Inhalt des gezeichneten Kreises, also $a^2 \pi$.

Demnach ist der Inhalt der Ellipse:

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}^2 \pi = \boldsymbol{a\, b}\, \pi \quad . \quad . \quad (25)$$

Besprechung: Die Formel ist von der zweiten Dimension. In ihr kann man a und b vertauschen, d. h. dreht man das Achsenkreuz um 90 ^{0}, so erhält man dieselbe Formel. Wird $a = b$, so wird die Ellipse zum Kreis. Ein Vergleich mit dem umschließenden Rechteck ($4\,a\,b$) bestätigt, daß die Ellipse ($a\,b\,\pi$) kleiner ist als dies Rechteck.

Die Ellipse als Bild des Kreises.

Blickt man senkrecht auf die Fläche eines Kreises, so erscheint dieser als Kreis. Dreht man ihn jetzt um einen Durchmesser, so erscheint der senkrecht hierzu stehende Durchmesser verkürzt. Nehmen wir den Durchmesser, um den sich der Kreis dreht, als X-Achse, so sind alle y, also alle Ordinaten verkürzt.

Wenn der Durchmesser des Kreises $2\,a$ ist und der verkürzte $2\,b$ lang erscheint, so beträgt die Verkürzung auch für alle parallelen Strecken, also für alle Ordinaten $b:a$ (Fig. 54 a).

Betrachtet man zwei andere senkrecht zueinander stehende Durchmesser, z. B. AB und CD des Kreises, so werden die Ordinaten ihrer Endpunkte AF und CP im Verhältnis $b:a$ verkürzt, und man erhält die Durchmesser LM und NO der Ellipse. Man nennt sie konjugierte Durchmesser.

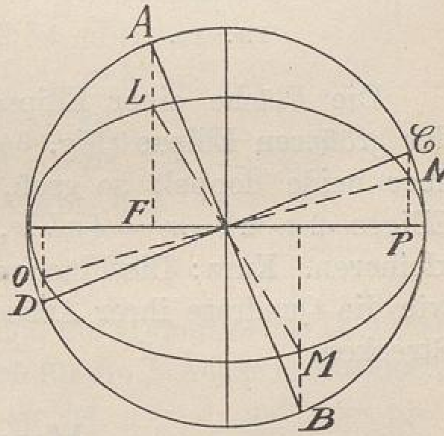


Fig. 54 a.

In einem Kreise halbiert ein Durchmesser alle auf ihm senkrecht stehenden Sehnen, d. h. solche Sehnen, die dem konjugierten Durchmesser parallel sind. Folglich halbiert auch in der Ellipse ein Durchmesser alle Sehnen, die dem konjugierten parallel sind; denn parallele Linien erscheinen in demselben Maße verkürzt.

Zwischen zwei konjugierten Durchmessern muß stets eine Achse liegen.

Ähnlichkeit der Ellipsen.

Alle Kreise sind einander ähnlich. Sieht man nun verschiedene Kreise unter demselben Winkel an, so werden bei ihnen entsprechende Strecken in demselben Maße verkürzt. Sie bleiben also proportional, und die entstandenen Ellipsen sind einander ähnlich. Ellipsen sind dann ähnlich, wenn bei ihnen das Verhältnis $b : a$ dasselbe ist.

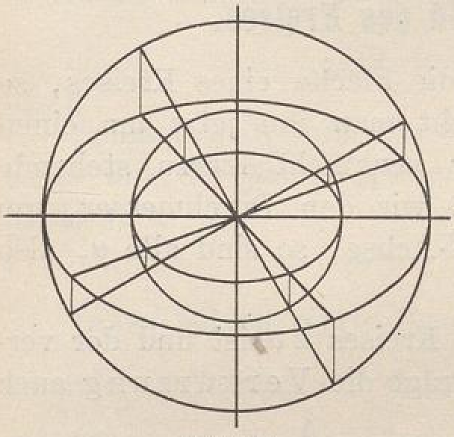


Fig. 54 b.

Ähnliche Ellipsen lassen sich konzentrisch aufeinander legen (Fig. 54 b), sodaß die Achsen und konjugierten Durchmesser sich decken. Sie gehen durch entsprechende Punkte beider Ellipsen. Der Mittelpunkt ist hier „Ähnlichkeitspunkt".

Die Fläche einer Ellipse ist $a\,b\,\pi$. Haben die Achsen der größeren Ellipse (Fig. 54) dasselbe Verhältnis $a : b$, sind aber beide doppelt so groß, so ist die Fläche der größeren Ellipse $2a \cdot 2b \cdot \pi = 4ab\pi$, also 4 mal so groß als die der kleineren. Kurz: Die Flächen ähnlicher Ellipsen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Achsen oder sonstiger entsprechender Strecken.

Hyperbel.

Die Gleichung der Hyperbel.

Erklärung: Eine Hyperbel ist der geometrische Ort derjenigen Punkte (P), für welche die Differenz der Abstände von zwei gegebenen Punkten (F_1 und F_2) gleich bleibt. In Figur 55 ist $PF_1 - PF_2 =$ Konstante $= 2$ a. Die Punkte F_1 und F_2 heißen Brennpunkte, ihr Abstand vom Zentrum O heißt Exzentrizität (e). Die Verbindungslinien PF_1 und PF_2 eines beliebigen Punktes P der Hyperbel mit den Brennpunkten heißen Brennstrahlen, Brennlinien oder Fahrstrahlen (PF_1 und PF_2).

Wie bei der Ellipse, legt man die X-Achse durch die Brennpunkte und die Y-Achse als Mittelsenkrechte dazwischen. Die Entfernung der Brennpunkte $F_1 F_2$ sei auch hier gleich $2e$ und die Differenz der Brennstrahlen gleich $2a$. Dann ist:

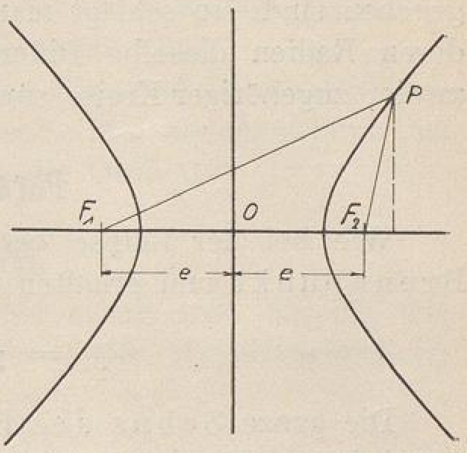


Fig. 55.

$$\sqrt{y^2 + (x+e)^2} - \sqrt{y^2 + (x-e)^2} = 2a.$$

Durch zweimaliges Quadrieren schafft man die Wurzeln weg und erhält schließlich:

$$x^2(e^2 - a^2) - a^2(e^2 - a^2) = a^2 y^2.$$

Wir setzen $\qquad e^2 - a^2 = b^2$ [1])

$$x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Bemerkung: Die Formel ergibt, daß

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

ist; wie bei der Ellipse ist also auch die Hyperbel zur X-Achse symmetrisch, und dies läßt sich auch für die Y-Achse nachweisen.

Liegt P auf der X-Achse, so ist $y = o$ und $x = \pm a$, also $2a$ gleich der Achse und jede Achsenhälfte gleich a. Diese Achse heißt Hauptachse.

Für $x < a$ wird y imaginär; senkrecht über der Strecke $2a$ liegen also keine Punkte der Hyperbel. Die Länge der Nebenachse ist imaginär. Dagegen gibt es für alle Werte von y zwei Werte von x.

Die Fig. 55 zeigt, daß die Hauptachse immer kleiner sein muß als die Exzentrizität.

1) Die geometrische Bedeutung von b kann erst später erörtert werden (S. 64).

Konstruktion: Aus der Erklärung der Hyperbel ergibt sich auch ihre Konstruktion. Wenn die beiden Brennpunkte gegeben sind, so schlägt man um diese Brennpunkte Kreise, deren Radien dieselbe Differenz haben. Die Schnittpunkte zweier zugehöriger Kreise sind jedesmal Punkte der Hyperbel.

Parameter.

Wie bei der Ellipse berechnen wir die Ordinate im Brennpunkt und erhalten auch hier:

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{a} = p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Die ganze Sehne des Brennpunktes, die senkrecht zur Achse steht, ist $2\,p$, und wir nennen diese Strecke den Parameter (Fig. 56).

Die Scheitelgleichung der Hyperbel.

Ähnlich wie bei der Ellipse findet man (Fig. 56):

$$y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}\,x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

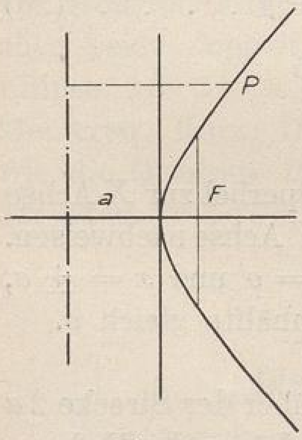


Fig. 56.

Setzt man auch hier $\frac{b^2}{a} = p$, so erhält man:

$$y^2 = 2\,p\,x + \frac{p}{a}x^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Übung: 1. Man berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden $y = Mx + n$ mit der Hyperbel $x^2\,b^2 - y^2\,a^2 = a^2 \cdot b^2$.

2. Die Hyperbel $x^2\,b^2 - y^2\,a^2 = a^2\,b^2$ ist gegeben. Man verschiebe die Y-Achse in den Brennpunkt und stelle jetzt die Gleichung der Hyperbel auf.

3. Man zeichne die Kurve der Gleichung

$$9\,x^2 - 16\,y^2 - 144 = 0.$$

Man schließe auf die Art der Kurve, bestimme a, b und e, suche die Brennpunkte und prüfe dann durch Nachmessen ob sie der Erklärung genügt.

4. Man bestimme die Ordinate des Punktes obiger Hyperbel, dessen Abszisse gleich 5 Längeneinheiten ist.

5. Für welchen Punkt obiger Hyperbel ist die Ordinate doppelt so groß wie die Abszisse? Für welchen Punkt ist die Abszisse doppelt so groß wie die Ordinate?

Tangente.

Als Steigung der Hyperbel erhält man ähnlich wie bei der Ellipse durch Differenzieren der Hyperbelgleichung den Wert:

$$\frac{dy}{dx} = + \frac{x b^2}{y a^2}.$$

Die Gleichung der Tangente wird wie bei der Ellipse hieraus abgeleitet und heißt:

$$x x_1 a^2 - y y_1 b^2 = a^2 b^2$$

oder:

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Auf entsprechende Weise gewinnt man auch die Gleichung der Normalen.

Aufgabe: Man vergleiche den Verlauf des Differentialquotienten mit dem Verlauf der Kurve.

Berührungsgrößen.

Auch diese erhält man ebenso wie bei der Ellipse. Man leitet zunächst analytisch die Größe der Subtangente ab und kann dann die anderen drei Größen entweder planimetrisch oder ebenfalls analytisch bestimmen

Übung: 1. Für welchen Berührungspunkt der Hyperbel geht die Tangente parallel zur X-Achse? Für welchen parallel zur Y-Achse?

2. An die Hyperbel $16 x^2 - 25 y^2 = 400$ soll in dem Berührungspunkte mit der Ordinate 3 cm eine Tangente gelegt werden. Normalform. Maßstäbliche Zeichnung.

3. Die Gleichung der Tangente aufzustellen, deren Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt. Maßstäbliche Zeichnung für $a = 3$ und $b = 2$ cm.

4. Man bestimme die Steigung der Hyperbel

$$16\,x^2 - 25\,y^2 = 400$$

an den Punkten mit der Abszisse 6, 7, 8, 9 cm usw.

5. Wo hat diese Hyperbel die Steigung 1?

Asymptote.

Wir suchen den Schnittpunkt der Hyperbel mit einer Geraden, die durch den Achsenschnittpunkt geht. Für diese Gerade ist $n = 0$ (Fig. 57).

Gegeben ist die Hyperbel:

$$x^2\,b^2 - y^2\,a^2 = a^2\,b^2$$

und die Gerade:

$$y = M\,x$$

Für ihren Schnittpunkt $(x_1\,y_1)$ gilt also:

$$x_1{}^2\,b^2 - a^2\,M^2\,x_1{}^2 = a^2\,b^2$$

$$x_1{}^2\,(b^2 - a^2\,M^2) = a^2\,b^2$$

$$x_1{}^2 = \frac{a^2\,b^2}{b^2 - a^2\,M^2}$$

$$x_1 = \pm\,\frac{a\,b}{\sqrt{b^2 - a^2\,M^2}}.$$

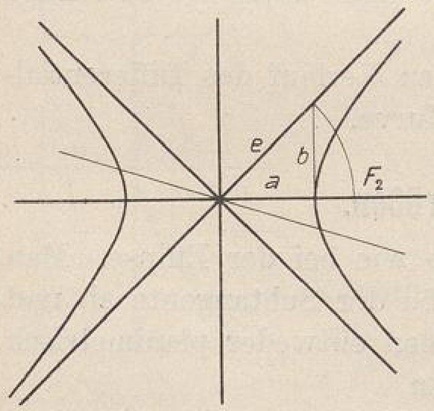


Fig. 57.

Hierbei können drei Fälle eintreten, je nachdem $a^2\,M^2$ größer, gleich oder kleiner als b^2 ist.

Ist $a^2\,M^2 < b^2$, so erhält man zwei reelle gleich große, aber entgegengesetzte x. (Die dünn gezeichnete Sekante in Fig. 57). Aus der Gleichung der Geraden $y = M\,x$ folgt dann, daß auch die y gleich groß und entgegengesetzt sind. Demnach wird die Gerade im Achsenschnittpunkt halbiert, sie heißt **Durchmesser**.

Ist $a^2 M^2 > b^2$, so wird x imaginär, d. h. die Gerade trifft die Hyperbel überhaupt nicht.

Ist aber $a^2 M^2 = b^2$, so wird $x_1 = \infty$. Alsdann heißt die Gerade Asymptote. Jetzt ist $M = \pm \frac{b}{a}$ die Steigung der beiden Asymptoten (Fig. 57) und b ist das auf der X-Achse im Scheitel der Hyperbel errichtete Lot gemessen bis zur Asymptote. Dann ist die Gleichung der Asymptoten

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Die Scheiteltangente berührt die Hyperbel im Scheitel, die Asymptoten treffen die Hyperbel im Unendlichen. Die Berührungspunkte der übrigen Tangenten liegen dazwischen. Alle Tangenten werden daher die Hauptachse zwischen dem Scheitel und dem Achsenmittelpunkt schneiden. Der Steigungswinkel einer Tangente liegt zwischen den Steigungswinkeln der beiden Asymptoten.

Aufgabe: Man stelle die Gleichung der Tangenten an eine Hyperbel mit $a = 2$ und $b = 3$ cm auf, die eine Steigung von 30^0, 45^0, 60^0, 120^0, 135^0, 150^0 haben. Welche von diesen Tangenten sind möglich? Man bestimme die Berührungspunkte und die Größen ihrer Abschnitte auf den Achsen. Maßstäbliche Zeichnung.

Die Näherung der Kurve an die Asymptote.

Für einen beliebigen Punkt (mit der Abszisse x_1) berechne man die Ordinate bis zur Asymptote (y_1) und bis zur Hyperbel (y_1'). Erstere ist

$$y_1 = \frac{b}{a} x_1$$

und letztere

$$y_1' = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a_1^2}.$$

Die Vergleichung dieser beiden Größen ergibt sofort, daß ihr Unterschied desto kleiner sein wird, je kleiner a im Vergleich zu x ist, d. h. je größer x ist. Wird $x = \infty$, so verschwindet der Unterschied. Die Kurve nähert sich also der Asymptote beständig und erreicht sie im Unendlichen.

Ähnlichkeit bei Hyperbeln.

Wie die Ellipsen, so sind auch die Hyperbeln ähnlich, wenn bei ihnen das Verhältnis $a:b$ dasselbe ist, wenn sie also dieselben Asymptoten haben. Man zeichne mehrere Hyperbeln mit gemeinsamen Achsen und Asymptoten. Der Achsenschnittpunkt wird Ähnlichkeitspunkt.

Gleichseitige Hyperbel.

Wird in der Gleichung der Hyperbel $x^2\, b^2 - y^2\, a^2 = a^2\, b^2$ die Länge $a = b$, so erhält man

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

als Gleichung der gleichseitigen Hyperbel. Die Steigung der Asymptote ist $a:a = 1$; also steigt sie unter 45^0 und steht auf der anderen Asymptote senkrecht. Die Hyperbel in Fig. 57 ist als gleichseitige gezeichnet.

Aufgabe: 1. Wie groß ist e bei der gleichseitigen Hyperbel?

2. Wie groß ist bei ihr die Ordinate im Brennpunkt?

Die Asymptotengleichung der gleichseitigen Hyperbel.

Denkt man sich das Achsenkreuz um 45^0 nach rechts gedreht, so werden die Asymptoten zu Achsen und der Drehungswinkel ist -45^0 (Fig. 59).

Wenn x und y die alten und ξ und η die neuen Koordinaten sind, so ist nach Gleichung (12):

$$y = \eta \cos \alpha + \xi \sin \alpha$$
$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha$$

und bei einer Drehung um -45^0 nach Gleichung (13):

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{ und } x = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\xi}{\sqrt{2}}.$$

Setzt man diese Koordinaten in die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ ein, so erhält man:

$$\frac{1}{2}(\xi^2 + 2\,\xi\,\eta + \eta^2) - \frac{1}{2}(\xi^2 - 2\,\xi\,\eta + \eta^2) = a^2$$

$$2\,\xi\,\eta = a^2$$

$$\xi\,\eta = \frac{a^2}{2}$$

$$\xi\,\eta \textbf{ oder } x\,y = \frac{a^2}{2} = \textbf{Konstante} = \mathbf{C} \quad .\ .\ (32$$

Für jeden Punkt der Hyperbel ist also das Rechteck aus Ordinate und Abszisse gleich groß (Fig. 59).

Aufgabe: Man bestimme die kürzeste Entfernung der gleichseitigen Hyperbel vom Achsenschnittpunkt.

Diese ist die frühere Halbachse a. Nach Gleichung (32) muß das in Fig. 59 gestrichelte Quadrat gleich $\frac{a^2}{2}$ = Konstante C sein. Also ist die Diagonale $a = \sqrt{2\,C}$ und die Seite des Quadrates gleich $\sqrt{C}$. Man bestimme diese Größen für die in Fig. 59 gezeichnete Hyperbel $v\,p = 8$.

Konstruktion.

Aus Gleichung (32) ergibt sich eine Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus den Asymptoten $O\,X$ und $O\,Y$ und einem Punkt P (Fig. 58).

Man zieht durch P die Geraden $P\,Q$ parallel zu $O\,Y$ und $P\,U$ parallel zu $O\,X$, verlängert $P\,U$ und trägt beliebige Teile auf der Verlängerung ab. Man verbindet diese Teilpunkte mit O und zieht durch die Schnittpunkte dieser Verbindungen mit $P\,Q$ Parallelen zur Achse $O\,X$. Durch die Teilpunkte zieht man dann Parallelen zur anderen Achse $O\,Y$. Die Schnitt-

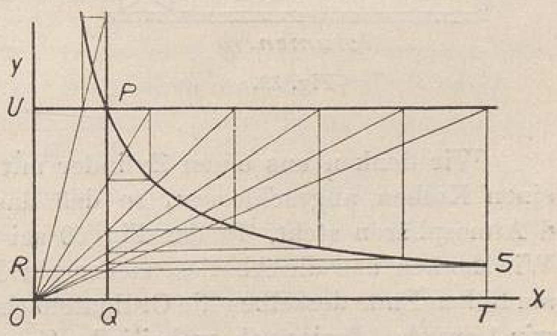


Fig. 58.

punkte der horizontalen mit den entsprechenden vertikalen Parallelen sind Punkte der Hyperbel.

Beweis: Nach einem Satz der Planimetrie sind die Rechtecke $UPQO$ und $ORST$ inhaltsgleich.

Aufgabe: 1. Man stelle die Gleichung der Tangente der gleichseitigen Hyperbel im alten Axenkreuz wie in dem der Asymptoten auf.

2. Man verschiebe das Achsenkreuz parallel, bis der Achsenschnittpunkt auf den Scheitelpunkt fällt und, bestimme die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel:

Anwendungen: 1. Darstellung des Mariotteschen Gesetzes. Hat man ein Volumen Gas in einem Zylinder unter einem bestimmten Druck, und preßt es dann bei gleichbleibender Temperatur mit dem doppelten Druck zusammen, so wird es auf die Hälfte des Raumes zusammengedrückt. Allgemein ausgedrückt kann man sagen, daß sich die Volumen umgekehrt wie die Drucke verhalten. Dies Mariotte- oder Boylesche Gesetz gilt für vollkommene Gase wie Luft, und zwar solange die Temperatur dieselbe bleibt.

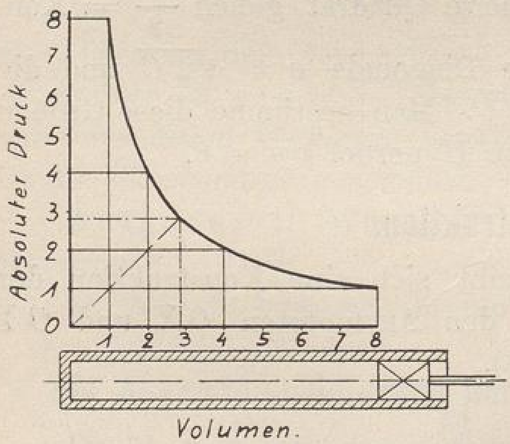


Fig. 59.

Ist nun v_0 das Anfangsvolumen und p_0 der anfängliche Druck, v_1 ein späteres Volumen und p_1 der dazugehörige Druck so verhält sich

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{p_1}{p_0}.$$

Oder es ist

$$v_0 p_0 = v_1 p_1 = \text{Konstante}.$$

Wir denken uns einen Zylinder mit 1 cbm Gas gefüllt und durch einen Kolben abgeschlossen, so daß das Gas unter einem Druck von 8 Atmosphären steht. In der Fig. 59 sei unten der Zylinder angedeutet. Wir denken uns die Abszissenachse parallel zum Zylinder und errichten am linken Ende desselben die Ordinatenachse. Als Anfangszustand tragen wir 1 cm als Abszisse ab, wobei jeder Zentimeter 1 cbm vorstellt. Dann tragen wir 8 cm als Ordinate auf, was einem absoluten Druck von 8 Atmosphären entspricht.

Wir berechnen uns nun wie auf Seite 7 eine Tabelle, indem wir annehmen, das Gas von 1 cbm würde auf 8 cbm ausgedehnt, und indem wir nach der Formel $v \cdot p = v_1 p_1 = 8$ den zugehörigen Druck ausrechnen.

Man trage nun die verschiedenen Volumen ($v = 1, 2, 4, 8$) auf der horizontalen und die entsprechenden Drucke ($p = 8, 4, 2, 1$) senkrecht nach oben auf. Man legt durch die erhaltenen Punkte eine Kurve, die man Isotherme nennt, weil das genannte Gesetz nur bei gleichbleibender Temperatur gilt. Die Rechtecke aus den Koordinaten eines Punktes sind gleich groß, wie Fig. 59 zeigt. Also ist die Isotherme eine gleichseitige Hyperbel. Im vorliegenden Fall erhält man stets das Produkt 8.

2. Beispiel aus der Elektrotechnik: Die in einen Hauptschlußmotor (z. B. einer Straßenbahn oder eines Krans) eingeführte elektromotorische Kraft, also die Klemmenspannung E_k, wird um den Spannungsverlust in dem Motor vermindert. Dieser beträgt $J \cdot R$, d. h. Stromstärke mal inneren Widerstand des Motors. Der Rest $E = E_k - J \cdot R$ ist der elektromotorischen Gegenkraft des Motors gleich, hält ihr das Gleichgewicht und die ihr entsprechende Energie wird in die mechanische Arbeit des Motors umgesetzt.

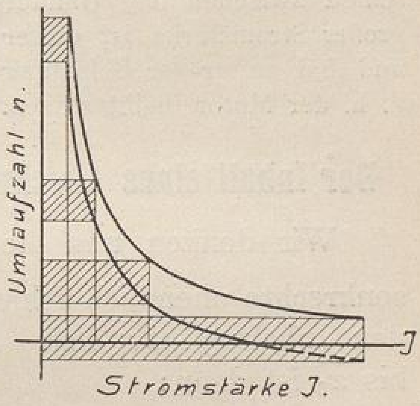


Fig. 60.

Diese Gegenkraft des Motors entsteht durch die Drehung, wobei der Motor als Dynamomaschine wirkt. Diese Gegenkraft ist demnach der Zahl der Umdrehungen (n) und der Kraftlinien (N) proportional. $E = C N n$, wenn C eine Konstante ist.

$$\text{Also ist } C N n = E_k - J \cdot R.$$

Hierin ist die eingeführte elektromotorische Kraft E_k konstant und $J \cdot R$ sehr klein.

a) Vernachlässigt man letzteres, so muß $N n$ eine Konstante sein.

Nun ist bei nicht zu starker Magnetisierung der Pole $N = C_1 \cdot J$, d. h. die Kraftlinienzahl ist der Stromstärke proportional. Also ist nicht nur $N n$, sondern auch $J \cdot n$ eine Konstante.

Trägt man nun J auf einer horizontalen Achse und die zugehörigen n vertikal darüber auf, so erhält man eine gleichseitige Hyperbel, wie in voriger Figur (Fig. 59). Jedes J bildet mit seinem zugehörigen n ein Rechteck, und alle diese Rechtecke $J \cdot n$ sind gleich groß.

Bei kleiner Stromstärke, d. h. unbelastet, läuft der Motor sehr rasch; bei großer Stromstärke läuft er langsam.

b) Vernachlässigt man den kleinen Betrag von $J \cdot R$ aber nicht, so ist:

$$C N n = E_k - J \cdot R \text{ oder}$$
$$C_2 J n = E_k - J R.$$

Von jedem früheren Rechteck von konstanter Größe ist also ein kleiner Betrag $J \cdot R$ abzuziehen, der proportional der Stromstärke J ist.

Gehen z. B. bei 10 Ampere von der eingeführten Spannung 5 Volt verloren, so ist der Verlust bei 2 Ampere nur 1 Volt.

Von jedem früheren Rechteck ist also ein kleines Rechteck $J \cdot R$ abzuziehen, welches eine ebenso große Grundlinie J wie die früheren Rechtecke $J \cdot n$ und eine konstante Höhe proportional R hat. Diese Rechtecke, die abgezogen werden müssen, sind in der Fig. 60 schraffiert.

Die rechten unteren Ecken dieser schmalen Rechtecke geben uns die wirklichen Tourenzahlen an. Sie liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, die um diesen Betrag, der proportional R ist, nach unten verschoben ist.

Beide Kurven nähern sich bei kleiner Stromstärke, d. h. der Unterschied zwischen den Umlaufszahlen ist verhältnismäßig gering. Bei großer Stromstärke ist dieser Unterschied verhältnismäßig viel größer und bei zu großer Belastung schneidet die neue Kurve die X-Achse, d. h. der Motor bleibt stehen.

Der Inhalt eines Abschnittes der gleichseitigen Hyperbel.

Wir denken uns die Fläche der Hyperbel $xy = \frac{a^2}{2}$ in senkrechte unendlich schmale Streifen zerlegt, von denen jeder den Inhalt $y \cdot dx$ hat. Die Fläche des Abschnittes von x_1 bis x_2 ist dann:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a^2}{2x} \cdot dx = \frac{a^2}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$F = \frac{a^2}{2} (\log_e x_2 - \log_e x_1) = \frac{a^2}{2} \log_e \frac{x_2}{x_1} \quad . \quad . \quad (33)$$

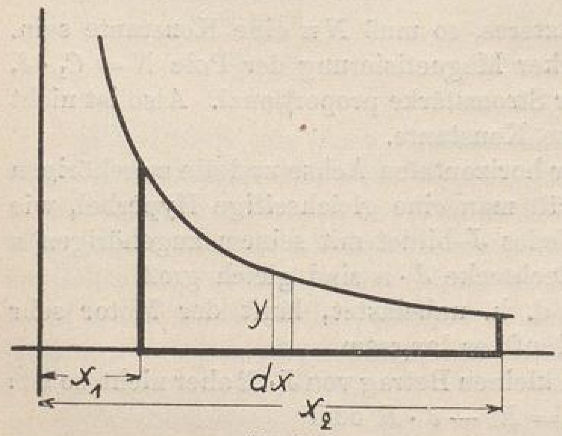


Fig. 61.

Anwendung: Bei der Isotherme dient diese Formel zur Berechnung der Arbeit, die das Gas bei seiner Ausdehnung vom Volumen x_1 auf das Volumen x_2 leistet. Auf der horizontalen Achse sind nämlich nicht nur die Kubikmeter, sondern zugleich auch die Wege des Kolbens aufgetragen, während vertikal darüber die Drucke angegeben sind (Fig. 59). Multipliziert man den kleinen Teil des Weges dx mit dem zugehörigen Druck y, so erhält man die auf dem Wege dx geleistete Arbeit.

Beim Integrieren erhält man dann die Arbeit, die auf dem ganzen Wege $x_1 x_2$ geleistet wird [1]).

Ähnlichkeit der gleichseitigen Hyperbeln.

Aus der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $xy = \frac{a^2}{2}$ geht hervor, daß die verschiedenen gleichseitigen Hyperbeln

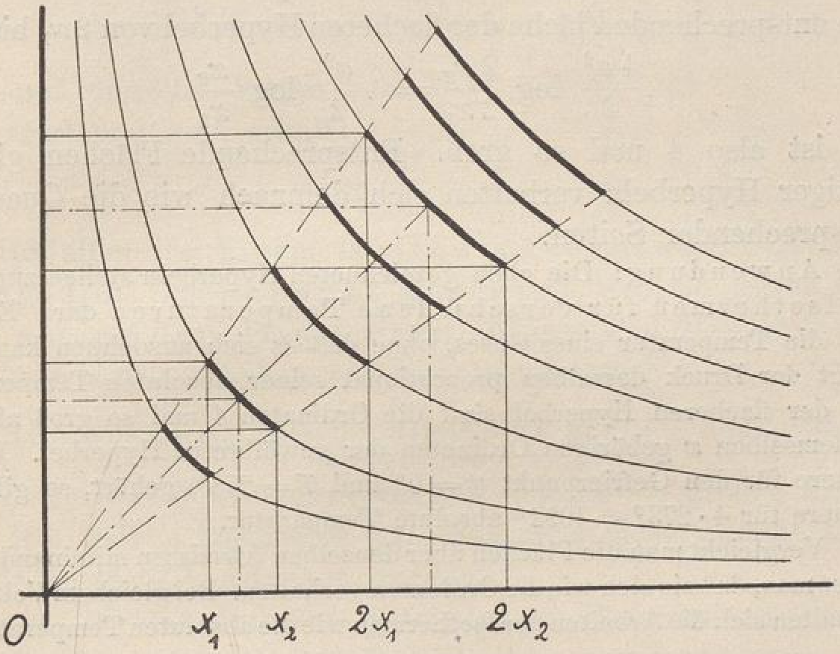


Fig. 62.

sich nur durch die Konstante $\frac{a^2}{2}$ unterscheiden. Sie sind also ähnlich. In Fig. 62 sind unter anderen auch die Hyperbeln $xy = \frac{a^2}{2}$ und $xy = \frac{(2a)^2}{2}$ gezeichnet. Bei der flacheren Hyperbel sind die Flächen der Rechtecke 4 mal so groß wie bei der gewölbteren. Einem doppelt so großen x entspricht ein doppelt

[1]) Die Ausführung eines Beispiels findet man: Elemente der Diff. u. Intg. in geom. Methode von Düsing. 2. Auflage, Seite 75.

so großes y; die flachere Kurve ist nur ein aufs Doppelte vergrößertes Stück der gewölbteren.

Die entsprechenden Stücke sind in der Figur hervorgehoben. Verbindet man entsprechende Punkte miteinander, so gehen die Verbindungslinien durch O. Dieser Achsenschnittpunkt ist der Ähnlichkeitspunkt.

Die Fläche der gewölbteren Kurve von x_1 bis x_2 ist

$$\frac{a^2}{2} \log \frac{x_2}{x_1}.$$

Die entsprechende Fläche der flacheren Hyperbel von $2x_1$ bis $2x_2$ ist

$$\frac{4a^2}{2} \log \frac{2x_2}{2x_1} = 4\frac{a^2}{2} \log \frac{x_2}{x_1}$$

sie ist also 4 mal so groß. Entsprechende Flächen gleichseitiger Hyperbeln verhalten sich demnach wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Anwendung: Die oben gezeichneten Hyperbeln stellen zugleich die Isothermen für verschiedene Temperaturen dar. Erhöht man die Temperatur eines Gases, ohne daß es sich ausdehnen kann, so steigt der Druck desselben proportional seiner absoluten Temperatur. Bei der flacheren Hyperbel sind die Ordinaten 4 mal so groß als die zu demselben x gehörigen Ordinaten der gewölbteren Hyperbel. Wenn letztere für den Gefrierpunkt ($t = 0^0$ und $T = 273^0$) gehört, so gilt die flachere für $4 \cdot 273^0 = 1092^0$ absolute Temperatur.

Vergleicht man die Flächen über denselben Abszissen miteinander, so findet man, daß sie sich wie die Ordinaten verhalten. Bei gleichem Volumen verhalten sich die Arbeiten der Isothermen wie die absoluten Temperaturen.

Verwandtschaft von Parabel, Ellipse und Hyperbel.

Der Parameter.

Bei den betrachteten Kurven sind die im Brennpunkt errichteten Ordinaten y_1 bereits berechnet worden.

a) In die Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$ hatten wir die Abszisse des Brennpunktes $x_1 = \frac{p}{2}$ eingesetzt und erhielten:

$$y_1 = \pm p_p$$

b) In die Gleichung der Ellipse $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ setzten wir die Abszisse des Brennpunktes

$$x_1 = e = \pm \sqrt{a^2 - b^2} \text{ ein}$$

und erhielten:

$$y_1 = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)}$$

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{a} = \pm p_e$$

c) In die Gleichung der Hyperbel $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ wird auf dieselbe Weise $x_1 = e = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ eingesetzt und man erhält:

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{a} = \pm p_h$$

Bei allen drei Kurven ist die senkrecht zur X-Achse durch den Brennpunkt gezogene Sehne gleich $2p$, d. h. gleich dem Parameter. Ellipse und Hyperbel von gleichem a und b haben gleichen Parameter.

Bemerkung: Aus der Gleichung $p = \frac{b^2}{a}$ folgt, daß b die mittlere Proportionale zwischen der halben großen Achse und dem halben Parameter ist. Aus zwei dieser Stücke kann das dritte stets konstruiert werden.

Beim Kreise und der gleichseitigen Hyperbel ist die im Brennpunkt errichtete Ordinate gleich $p = r$ bezw. $= a$.

Die Scheitelgleichungen.

Die Scheitelgleichungen der bisher betrachteten Kurven hatten wir bereits — Gleichung (24), (28), (29) — festgestellt. Schreiben wir sie statt mit ξ und η mit x und y, so erhalten wir folgende Gleichung:

Parabel: $y^2 = 2\, p\, x$

Ellipse: $y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2$

Hyperbel: $y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}\,x^2$

Um diese Formeln besser vergleichen zu können, setzen wir wieder $\frac{b^2}{a} = p$ und erhalten:

$$\text{Parabel: } y^2 = 2\,p\,x$$

$$\text{Ellipse: } y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}\,x^2$$

$$\text{Hyperbel: } y^2 = 2\,p\,x + \frac{p}{a}\,x^2$$

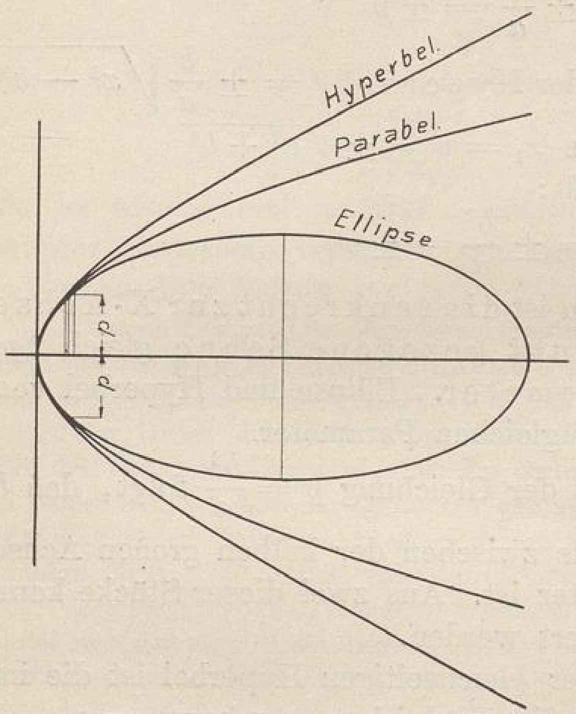


Fig. 63.

Bei der Ellipse wird also von dem Gliede $2\,p\,x$ ein zweites Glied $\frac{p}{a}\,x^2$ abgezogen, bei der Hyperbel aber ein gleich großes Glied hinzugezählt.

Bei den zwei Spezialfällen der gleichseitigen Kurven wird $a = b = p\ (= r)$, und wir erhalten folgende Scheitelgleichungen:

Kreis: $y^2 = 2\,p\,x - x^2$

Gleichseitige Hyperbel:

$$y^2 = 2\,p\,x + x^2$$

Bemerkung: Setzen wir in der Scheitelgleichung der Ellipse $a = \infty$, so entsteht die Gleichung der Parabel. Die Parabel ist also gleichsam eine Ellipse mit unendlich großer Achse. —

Wenn in diesen Scheitelgleichungen die drei Kurven dieselben $p = \frac{b^2}{a}$ und a haben, so sind für eine bestimmte Abszisse x_1 die verschiedenen y_1 verschieden groß. Die Ordinate der Ellipse ist kleiner, die der Hyperbel größer als die der Parabel. In Fig. 63 sind diese drei Kurven gezeichnet, sie haben gleiches a, b und p.

Schnitte durch einen Kegel.

Unter einem „Kegel“ versteht man gewöhnlich einen geraden Kreiskegel, der dadurch entsteht, daß sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete dreht. Durch die Bewegung der Hypotenuse entsteht hierbei der Mantel des Kegels, und in jeder Lage bildet sie eine Seitenlinie desselben. War die Hypotenuse über die Spitze des Kegels hinaus verlängert, so entsteht bei der Drehung zugleich ein umgekehrter Kegel. Das Ganze nennt man dann einen Doppelkegel.

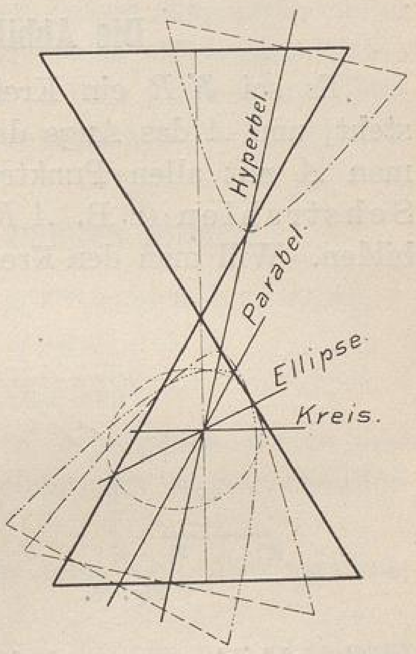


Fig. 64.

Die Grundfläche ist ein K r e i s und ebenso alle ihre parallelen Schnitte durch den Kegel, wie man sich am besten an einem Holzmodell klar macht.

Legen wir durch einen solchen kreisförmigen Schnitt zwei senkrecht zueinander stehende Durchmesser und drehen die Ebene des Kreises etwas um einen dieser Durchmesser, so ändert sich der andere Durchmesser; es entsteht dann eine neue Schnittfigur, eine E l l i p s e.

Dreht man die Schnittebene noch weiter, so wird der immer größer werdende Durchmesser in dem Moment unendlich, wo die Schnittebene einer Seitenlinie des Kegels parallel geht. Die Schnittfigur ist jetzt eine P a r a b e l.

Will man jetzt die Drehung noch weiter verfolgen, so muß man sich den Kegel zu einem Doppelkegel vervollständigen. Dreht man dann weiter, so entsteht auch oben eine Schnittfigur. Beide haben die gewölbten Seiten einander zugewandt, während die abgewandten Seiten offen sind; es sind die beiden Hälften einer H y p e r b e l.

In Fig. 64 sind diese drei Schnitte senkrecht zur Papierebene durch einen Doppelkegel geführt, erscheinen also als Gerade und sind dann in die Papierebene herumgeklappt, um sie zu zeigen.

Ein Schnitt durch einen Kegel liefert also einen Kreis, eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel. Diese Kurven heißen daher „Kegelschnitte".

Die Abbildung des Kreises.

Es sei *K R* ein Kreis, der senkrecht zur Papierebene steht, und *A* das Auge des Beschauers (Fig. 65). Verbindet man *A* mit allen Punkten des Kreises, so erhält man die Sehstrahlen (z. B. *A K* und *A R*), die einen Kegelmantel bilden. Will man den Kreis auf einer Bildebene, z. B. auf

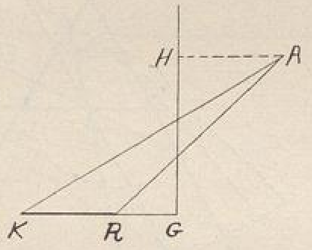


Fig. 65.

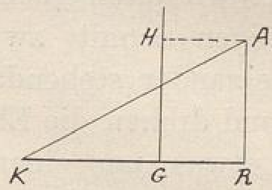


Fig. 66.

H G, abbilden, so erhält man als Bild den Schnitt dieser Bildebene mit dem Kegel.

Ist die Bildebene parallel zu *K R*, so erhält man als Bild einen Kreis. Dreht man die Bildebene um *G* rechts herum, so wird der Durchmesser *K R* verkürzt, man erhält eine Ellipse, deren kleinere Achse in der Papierebene liegt. Die Verkürzung ist am stärksten, wenn *H G* auf *A K* senkrecht steht. Dreht man weiter, so wird dieser in der Papierebene liegende Durchmesser wieder länger, bis man abermals einen Kreis erhält, wenn *H G* senkrecht zu *K R* steht. Dreht man noch weiter, so wird der in der Papierebene liegende Durchmesser weiter verlängert, und man erhält eine Ellipse, deren größere Achse in der Papierebene liegt.

Wenn die Bildebene HG lotrecht steht und der Kreis KR so groß ist, daß R senkrecht unter A liegt (Fig. 66), so fällt das Bild von R ins Unendliche, und man erhält als Bild auf der Bildebene HG eine Parabel.

Liegt der Kreis so, daß R noch weiter nach rechts fällt, so besteht das Bild aus zwei Ästen, und man erhält auf HG eine Hyperbel.

Befindet man sich z. B. in einem Zirkus oder unter einem Brückenbogen, so erscheinen die sichtbaren Stücke der Kreise als Bogen von Hyperbeln. Sie sind in dem Punkte, der dem Auge gegenüberliegt, am stärksten gekrümmt.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades:

$$x^2 + ax + by^2 + cy + dxy + e = 0$$

stellt stets einen Kegelschnitt dar.

Man gebe den Größen a, b, c, d, e beliebige Werte und zeichne die den entstandenen Gleichungen entsprechenden Kurven; es sind Kegelschnitte.

Auch auf folgende Weise kann man sich dies verdeutlichen:

Man verschiebe bei der Parabel, Ellipse und Hyperbel das Achsenkreuz parallel und leite die allgemeinen Gleichungen für diese Kegelschnitte ab.

Wenn h die horizontale und v die vertikale Verschiebung ist, so erhält man für den Kreis (Gleichung 10 und 10a):

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2vy + h^2 + v^2 - r^2 = 0$$

für die Parabel (Gleichung 20):

$$y^2 - 2px - 2vy + v^2 + 2ph = 0$$

Für die Ellipse bezw. Hyperbel erhält man in entsprechender Weise:

$$x^2b^2 \pm y^2a^2 - 2hb^2x \mp 2va^2y + h^2b^2 \pm v^2a^2 - a^2y^2 = 0.$$

Diese Gleichungen vergleiche man mit der bereits genannten allgemeinen Gleichung. Man bemerkt dabei folgendes:

Sind die Vorzahlen (Koeffizienten) von x^2 und y^2 gleich groß und von gleichem Vorzeichen, und fehlt ein Glied mit $x\,y$, so liegt die Gleichung eines Kreises vor.

Sind die Vorzahlen von x^2 und y^2 ungleich, aber von gleichem Vorzeichen, und fehlt ein Glied mit $x\,y$, so entspricht die Gleichung einer Ellipse.

Haben unter den eben genannten Umständen die Vorzahlen von x^2 und y^2 ungleiches Vorzeichen, so liegt die Gleichung einer Hyperbel vor. Sind diese Vorzahlen zwar entgegengesetzt, aber gleich, so stellt sie eine gleichseitige Hyperbel dar.

Fehlt ein Glied mit $x\,y$ und entweder x^2 oder y^2, so liegt die Gleichung einer Parabel vor.

Dreht man jetzt das Achsenkreuz dieser Kegelschnitte, so muß man Gleichung (12) in die Gleichungen derselben einsetzen und erhält dadurch das Glied mit $x\,y$ der allgemeinen Gleichung.

Wenn also in der gegebenen Gleichung das Glied mit $x\,y$ fehlt, so geht eine Achse des Kegelschnitts parallel zur X- oder Y-Achse; ist das Glied mit $x\,y$ vorhanden, so liegen die Achsen des Kegelschnitts geneigt zum Achsenkreuz.

Parabeln höherer Ordnung.

Der Verlauf der Parabeln höherer Ordnung.

Bei der gewöhnlichen Parabel verhalten sich die Abszissen wie die Quadrate der Ordinaten. Verhalten sich aber die Abszissen wie andere Potenzen der Ordinaten, so heißen die zugehörigen Kurven Parabeln höherer Ordnung. Die allgemeine Formel wäre $y^r = q\,x$.

Man zeichne die Kurven zu nebenstehenden Gleichungen. Man setze $q = 1$, gebe x verschiedene Werte und rechne die zugehörigen y aus. Die Abszissen werden dann wie früher auf der horizontalen Achse und die Ordinaten alsdann vertikal aufgetragen. Zusammengehörige Punkte bilden die betreffenden Parabeln.

$$y^1 = q \cdot x$$
$$y^{3/2} = q \cdot x$$
$$y^2 = q \cdot x$$
$$y^3 = q \cdot x$$
$$y^4 = q \cdot x$$
usw.

Aus der Fig. 67 sieht man, daß die Parabeln gerader Ordnung symmetrisch zur X-Achse, und zwar auf der rechten Seite, liegen; zu jedem positiven x gehören zwei gleiche, aber entgegengesetzte y, und für negative x werden die y imaginär. — Die Parabeln ungerader Ordnung aber, z. B. die kubische

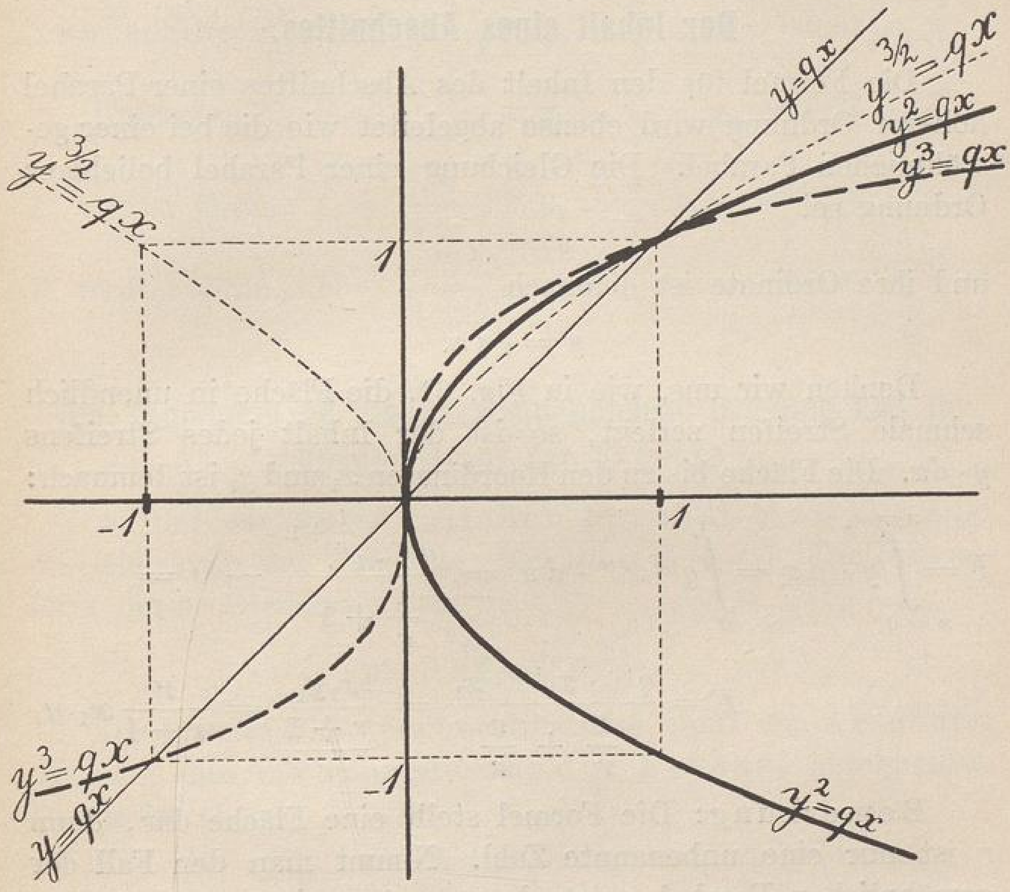


Fig. 67.

Parabel $y^3 = q\,x$, biegt auf die andere Seite der Y-Achse herüber, weil für negative x auch die y negativ werden und zu jedem x nur ein y gehört. — Die flachste der gezeichneten Parabeln ist die semikubische oder Neilsche Parabel $y^{\frac{3}{2}} = q \cdot x$. Sie liegt symmetrisch zur y-Achse.

Bei allen diesen Parabeln wächst mit jedem x auch y; sie bestehen also aus zwei Zügen, die sich ins Unendliche er-strecken. Sie treffen sich alle im Achsenschnittpunkt und im Schnittpunkt der Koordinaten $y = 1$ und $x = 1$, wenn $q = 1$ ist.

Je höher die Potenz von y ist, desto stärker ist die Krümmung der Parabel zwischen $x = 0$ und $x = 1$ bezw. $x = -1$ und desto flacher außerhalb dieser Punkte.

Der Inhalt eines Abschnittes.

Die Formel für den Inhalt des Abschnittes einer Parabel höherer Ordnung wird ebenso abgeleitet wie die bei einer gewöhnlichen Parabel. Die Gleichung einer Parabel beliebiger Ordnung sei

$$y^r = q\,x,$$

und ihre Ordinate ist demnach

$$y = \sqrt[r]{q\,x}.$$

Denken wir uns, wie in Fig. 61, die Fläche in unendlich schmale Streifen zerlegt, so ist der Inhalt jedes Streifens $y \cdot dx$. Die Fläche bis zu den Koordinaten x_1 und y_1 ist demnach:

$$F = \int_{x=0}^{x=x_1} y \cdot d\,x = \int_0^{x_1} q^{1/r} x^{1/r} \cdot d\,x = \frac{q^{1/r} x_1^{\frac{1}{r}+1}}{\frac{1}{r}+1} - 0 =$$

$$F = \frac{q^{1/r} \cdot x_1^{1/r} \cdot x_1}{\frac{1}{r} + \frac{r}{r}} = \frac{x_1 y_1}{\frac{r+1}{r}} = \frac{r}{r+1} x_1\, y_1$$

Bemerkung: Die Formel stellt eine Fläche dar, denn r ist nur eine unbenannte Zahl. Nimmt man den Fall der gewöhnlichen Parabel, setzt also $r = 2$, so ist

$$F = \frac{2}{3} x_1\, y_1$$

Je höher die Potenz ist, desto mehr nähert sich der Inhalt des Abschnittes dem des umschließenden Rechtecks. In Fig. 67 sieht man dies sehr gut in dem Quadrat aus den Koordinaten 1 und 1. Man erhält der Reihe nach bei den in Fig. 67 gezeichneten Kurven für den Inhalt F folgende Werte:

$$\text{Gerade: } F = \frac{1}{1+1} x_1 y_1 = \frac{1}{2} x_1 y_1 = 0{,}50\ x_1 y_1$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Semikubische}\\ \text{Parabel}\end{array}\right\}: F = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+1} x_1 y_1 = \frac{3}{5} x_1 y_1 = 0{,}60\ x_1 y_1$$

$$\text{Gewöhnliche P.: } F = \frac{2}{2+1} x_1 y_1 = \frac{2}{3} x_1 y_1 = 0{,}67\ x_1 y_1$$

$$\text{Kubische P.: } F = \frac{3}{3+1} x_1 y_1 = \frac{3}{4} x_1 y_1 = 0{,}75\ x_1 y_1$$

$$\text{P. vierter Ordn.: } F = \frac{4}{4+1} x_1 y_1 = \frac{4}{5} x_1 y_1 = 0{,}80\ x_1 y_1$$

$$\text{P. fünfter Ordn.: } F = \frac{5}{5+1} x_1 y_1 = \frac{5}{6} x_1 y_1 = 0{,}83\ x_1 y_1$$

Die Tangenten an die Parabeln höherer Ordnung und ihr Abschnitt auf der Y-Achse.

1. Bei der gewöhnlichen Parabel $y^2 = 2\,px$ ist die Gleichung der Tangente: $y y_1 = p\,(x + x_1)$. Die Normalform dieser Gleichung ist:

$$y = \frac{p}{y_1} x + p \frac{x_1}{y_1}$$

Das zweite Glied der rechten Seite stellt den Abschnitt (n) dar, den die Tangente auf der Y-Achse abschneidet. Dieser ist also:

$$n = p \frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1^2}{2\,y_1} = \frac{1}{2} y_1$$

Der Abschnitt auf der Y-Achse ist demnach halb so groß wie die Ordinate y_1 des Berührungspunktes.

2. Bei der kubischen Parabel $y^3 = q\,x$ erhalten wir durch Differenzieren $\frac{dy}{dx}\,3\,y^2 = q$

Der Differentialquotient ist also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{3\,y^2}$$

Wie früher bei der Ableitung der Gleichung einer Tangente, setzen wir auch hier den Differentialquotient $\frac{p}{3\,y_1{}^2}$ als Steigung am Berührungspunkt in die Gleichung (4) einer Geraden ein, deren Steigung bekannt ist und die durch einen gegebenen Punkt, hier den Berührungspunkt, geht. Man erhält:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{q}{3\,y_1{}^2}$$

$$3\,y\,y_1{}^2 - 3\,y_1{}^3 = q\,x - q\,x_1$$

$$3\,y\,y_1{}^2 = q\,x + 2\,q\,x_1$$

$$y\,y_1{}^2 = q\,(\tfrac{1}{3}\,x + \tfrac{2}{3}\,x_1)$$

Dies ist die Gleichung der Tangente; wir bringen sie auf die Normalform: $y = \frac{q\,x}{3\,y_1{}^2} + \frac{2\,q\,x_1}{3\,y_1{}^2}$

Folglich ist $n = \frac{2\,q\,x_1}{3\,y_1{}^2} = \frac{2\,y_1{}^3}{3\,y_1{}^2} = \frac{2}{3}\,y_1$

Hier ist also der A b s c h n i t t a u f d e r Y - A c h s e gleich $\frac{2}{3}$ der Ordinate y_1 des Berührungspunktes. In der Gleichung aller Tangenten steht y immer in der ersten Potenz.

3. Bei einer P a r a b e l b e l i e b i g e r O r d n u n g $y^r = q\,x$ leitet man die Steigung wie oben ab und erhält als Differentialquotienten: $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{q}{r\,y_1{}^{r-1}}$

Die Gleichung der Tangente ist also: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{q}{r\,y_1{}^{r-1}}$

oder wie oben umgeformt $y\,y_1{}^{r-1} = q\left(\frac{1}{r}\,x + \frac{r-1}{r}\,x_1\right)$

Ihr A b s c h n i t t a u f d e r Y - A c h s e ist demnach:

$$n = \frac{r-1}{r}\,\frac{q\,x_1}{y^{r-1}} = \frac{r-1}{r}\,y_1$$

Z u s a m m e n s t e l l u n g: Man erhält der Reihe nach für die zum Teil in Fig. 67 gezeichneten Kurven folgende Abschnitte auf der Y-Achse:

$$\text{Gerade Linie: } n = \frac{1-1}{1}\, y_1 = \quad = 0$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Semikubische}\\ \text{Parabel}\end{array}\right\}: n = \frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}}\, y_1 = \frac{1}{3}\, y_1 = 0{,}33\, y_1$$

$$\text{Gewöhnliche P.: } n = \frac{2-1}{2}\, y_1 = \frac{1}{2}\, y_1 = 0{,}5\, y_1$$

$$\text{Kubische P.: } n = \frac{3-1}{3}\, y_1 = \frac{2}{3}\, y_1 = 0{,}67\, y_1$$

$$\text{P. vierter Ordnung: } n = \frac{4-1}{4}\, y_1 = \frac{3}{4}\, y_1 = 0{,}75\, y_1$$

$$\text{P. fünfter Ordnung: } n = \frac{5-1}{5}\, y_1 = \frac{4}{5}\, y_1 = 0{,}80\, y_1$$

Konstruktion der kubischen und semikubischen Parabel.

1. Die Konstruktion der kubischen Parabel (Fig. 68) ähnelt derjenigen der gemeinen Parabel. Gegeben sei der Scheitel O, die Achse OX und ein beliebiger Punkt P der kubischen Parabel. Man ziehe PB parallel OX und OB senkrecht zu OX und teile die Strecken PB und OB in dieselbe Anzahl gleicher Teile (in der Zeichnung fünf Teile). Die Teilungspunkte sind a, b, c, d und 1, 2, 3, 4 genannt. Man schlägt über BP als Durchmesser den Halbkreis, und um B als Mittelpunkt die Kreisbogen $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, $d\,d'$. Dann fällt man die Lote $a'\,I$, $b'\,II$, $c'\,III$, $d'\,IV$ und verbindet

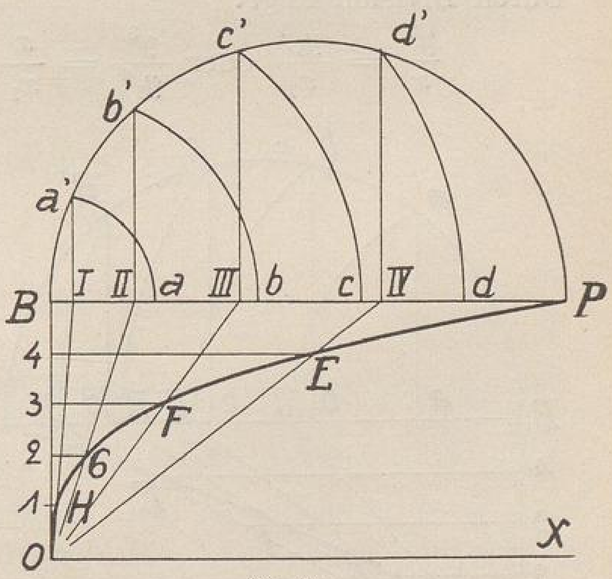


Fig. 68.

die Fußpunkte I, II, III, IV mit O durch Strahlen. Zum Schluß zieht man durch 1, 2, 3, 4 Parallelen zu OX und erhält als Schnitte mit den Strahlen die Parabelpunkte $H\,G\,F\,E$.

Beweis: Es ist $\overline{F3} = \frac{3}{5}\,\overline{B\,III}$

und $$\overline{BP} \cdot \overline{B\,III} = (\overline{Bc'})^2 = (\overline{Bc})^2 = \left(\frac{3}{5}\,\overline{BP}\right)^2$$

also $$\overline{B\,III} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \overline{BP}$$

Oben eingesetzt gibt: $\overline{F3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \overline{BP}$

Außerdem ist aber $\overline{O3} = \frac{3}{5} \cdot \overline{OB}$

Die beiden letzten Gleichungen kann man auch schreiben:

$$x = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot x_1$$

$$y = \frac{3}{5} \cdot y_1 \text{ oder } y^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot {y_1}^3$$

Durch Division folgt:

$$\frac{y^3}{x} = \frac{{y_1}^3}{x_1} \text{ oder } \frac{y^3}{{y_1}^3} = \frac{x}{x_1} \text{ oder } y^3 = \frac{{y_1}^3}{x_1} \cdot x$$

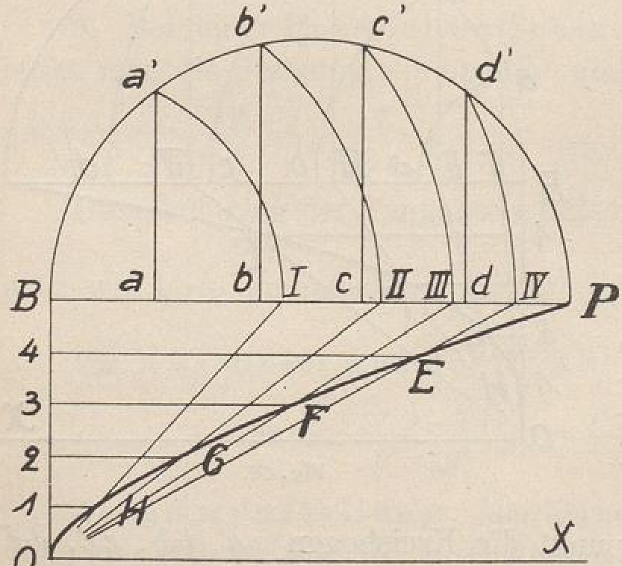


Fig. 69.

Dieses ist aber die Gleichung der kubischen Parabel, welche durch den Punkt P mit den Koordinaten x_1 und y_1 geht.

2. Die semikubische Parabel (Fig. 69) wird wie folgt konstruiert. Gegeben sind wie oben OX und P. Man teilt auch hier die Strecke BP durch die Punkte a, b, c, d und die

Strecke OB durch die Punkte 1, 2, 3, 4 in dieselbe Anzahl gleicher (in der Zeichnung fünf) Teile. Dann errichtet man die Lote $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, $d\,d'$, schlägt um B die Kreisbogen $a'I$, $b'II$, $c'III$, $d'IV$, und zieht die Strahlen $O\,I$, $O\,II$, $O\,III$ und $O\,IV$. Die entsprechenden Schnittpunkte E, F, G und H dieser Strahlen mit den Parallelen durch 1, 2, 3 und 4 sind dann Punkte der semikubischen Parabel.

Beweis: Es ist $\overline{F\,3} = \frac{3}{5}\,\overline{B\,III} = \frac{3}{5}\,\overline{B\,c'}$

und $$(\overline{B\,c'})^2 = \overline{B\,c} \cdot \overline{B\,P} = \left(\frac{3}{5}\,\overline{B\,P}\right) \cdot \overline{BP}$$

also $$\overline{B\,c'} = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \overline{B\,P}$$

Oben eingesetzt gibt:

$$\overline{F\,3} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \overline{B\,P} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \overline{B\,P}$$

Außerdem ist noch $\overline{O\,3} = \frac{3}{5}\,\overline{O\,B}$

Die beiden letzten Gleichungen kann man auch schreiben:

$$x = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot x_1$$

$$y = \frac{3}{5} \cdot y_1 \text{ oder } y^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot y_1^{\frac{3}{2}}$$

Durch Division folgt:

$$\frac{y^{\frac{3}{2}}}{y_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{x_1} \text{ oder } y^{\frac{3}{2}} = \frac{y_1^{\frac{3}{2}}}{x_1} \cdot x$$

Dieses ist aber die Gleichung der semikubischen Parabel, welche durch den Punkt P mit den Koordinaten x_1 und y_1 geht.

Übung: Man zeichne die kubische und die semikubische Parabel durch den Punkt $x_1 = 8$; $y_1 = 6$ cm. Stelle ihre Gleichungen auf und berechne den Inhalt eines Abschnittes; man zeichne ihn, schätze und planimetriere ihn. Man stelle die Gleichung für die Tangente am Berührungspunkte $(x_1\,y_1)$ auf und berechne den Abschnitt der Tangente auf der Y-Achse. Man zeichne ihn und messe ihn nach.

Anwendungen: Die Form der verschiedenen Parabeln spielt eine nicht unbedeutende Rolle bei den Trägern gleicher Festigkeit, d. h. solchen auf Biegung beanspruchten Balken, Wellen oder Achsen, bei denen die Biegungsspannung über die ganze Länge des Trägers dieselbe sein soll. Die wichtigsten Arten der Träger gleicher Festigkeit sollen im Folgenden behandelt werden.

a) Balken von rechteckigem Querschnitt mit gleichbleibender Breite b und Einzellast P (Fig. 70). Für den Querschnitt im Abstand x vom rechten Auflager gilt nach den bekannten Bezeichnungen der Festigkeitslehre:

$$M_b = W \cdot k_b$$

oder $$B \cdot x = P \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot x = \frac{b \cdot y^2}{6} \cdot k_b$$

In anderer Anordnung lautet die Gleichung:

$$y^2 = P \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot \frac{6}{b \cdot k_b} \cdot x$$

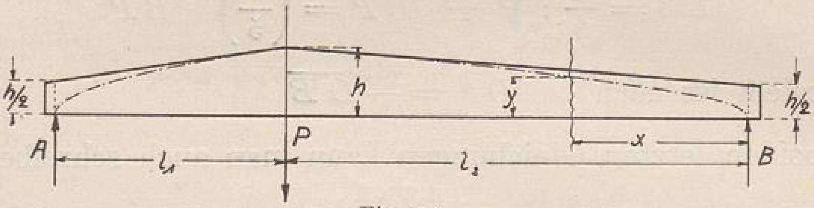


Fig. 70.

Für die linke Seite des Trägers würde sich ergeben:

$$y^2 = P \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{6}{b \cdot k_b} \cdot x$$

Beide Gleichungen stellen gemeine Parabeln dar, wie sie in Fig. 70 gestrichelt eingezeichnet sind. An Hobelmaschinen- und Brückenträgern findet man vielfach die parabolische Form. Aus praktischen Gründen nimmt man häufig statt der Parabel die Tangente an sie im höchsten Punkt. Nach Seite 40 und 81 weiß man dann, daß die Balkenhöhe am Auflager $^1/_2\, h$ sein muß.

Die Höhe h des Balkens im Angriffspunkt der Last P findet man, indem man für x in eine der vorher gefundenen Gleichungen l_1 bzw. l_2 einsetzt.

Dann wird $$y_{max}^2 = h^2 = P \frac{l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{6}{b \cdot k_b}$$

b) Achse von kreisförmigem Querschnitt und Einzellast (Fig. 71).

Hier ist für den Querschnitt mit dem Abstand x vom Auflager:

$$B \cdot x = P \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot x = \frac{(2\,y)^3}{10} \cdot k_b = \frac{8}{10}\,y^3 \cdot k_b \;\left(\text{weil } \frac{\pi}{32} = \sim \frac{1}{10}\right)$$

Also ist: $$y^3 = P\,\frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot \frac{10}{8 \cdot k_b} \cdot x$$

Für die linke Seite des Trägers würde sein:

$$y^3 = P \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{10}{8 \cdot k_b} \cdot x$$

Beide Gleichungen stellen kubische Parabeln dar, wie sie in die Fig. 71 eingestrichelt sind. In der Praxis ersetzt man die Parabel durch die

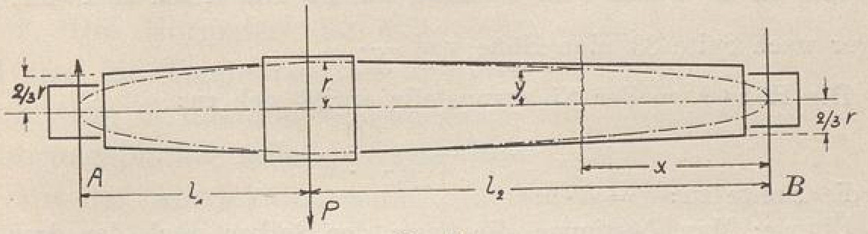


Fig. 71.

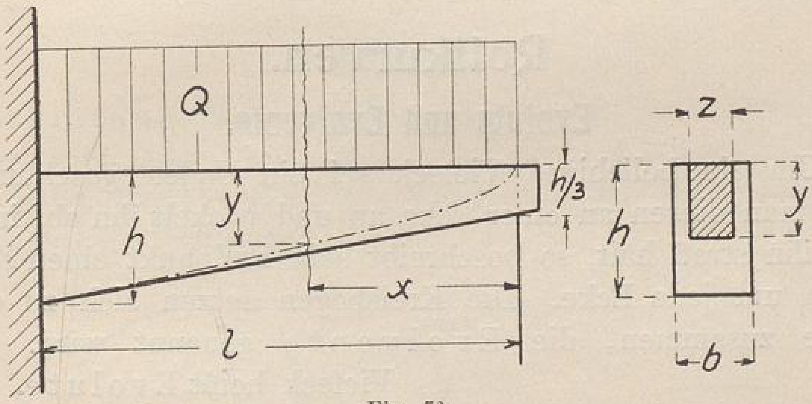


Fig. 72.

Tangente im höchsten Punkt. In den Auflagern hat diese nach Seite 82 den Abstand $\frac{2}{3}\,r$ von der Mitte.

Der Halbmesser r am Angriffspunkt der Last P ergibt sich wie oben zu: $$y_{max}{}^3 = r^3 = P\,\frac{l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{10}{8 \cdot k_b}$$

c) Freiträger mit gleichförmig verteilter Last und sich verjüngendem rechteckigen Querschnitt vom Seitenverhältnis $\frac{z}{y} = \alpha$ (Fig. 72).

Für den gezeichneten Querschnitt ist:

$$M_b = Q \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2} = \frac{z \cdot y^2}{6} \cdot k_b$$

Da nun aber $z = y \cdot \alpha$ ist, so folgt weiter:

$$Q \cdot \frac{x^2}{2\,l} \cdot \ = \frac{\alpha\, y^3}{6} \cdot k_b$$

oder

$$y^3 = \frac{3\,Q}{\alpha \cdot l \cdot k_b} \cdot x^2$$

Dieses ist die Gleichung einer semikubischen Parabel.

Die angenäherte Form des Freiträgers ergibt sich durch die Tangente an die Parabel im höchsten Punkt. Am freien Ende hat der Träger nach Seite 83 eine Höhe von $\frac{h}{3}$.

Die Höhe h an der Einspannstelle ergibt sich zu:

$$y_{max}{}^3 = h^3 = \frac{3\,Q}{\alpha \cdot l \cdot k_b} \cdot l^2$$

und die Breite zu: $b = \alpha \cdot h$.

Übung: Man bestimme die Form der Balken nach den drei besprochenen Formen für $P = Q = 1000$ kg, $l = 60$ cm und $k_b = 250$ kg/qcm.

Rollkurven.

Evolute und Evolvente.

Um ein beliebiges Vieleck sei ein Faden geschlungen. Faßt man diesen an einer Ecke an und wickelt ihn ab, indem man ihn straff hält, so beschreibt sein Endpunkt einen Kreisbogen um jede Ecke. Die Kreisbogen setzen sich zu einer Kurve zusammen, die Evolvente genannt wird. Das Vieleck heißt Evolute. Die Radien der Kreisbogen heißen Krümmungsradien, sie sind zugleich die Normalen der Evolvente.

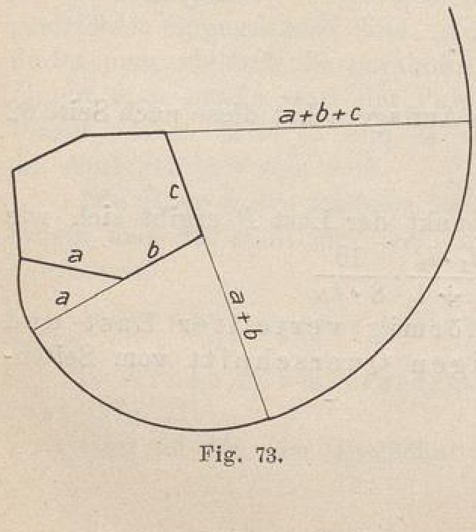


Fig. 73.

Aus der Fig. 73 gehen sofort folgende Sätze hervor:

1. Der Krümmungsradius der Evolvente ist gleich dem abgewickelten Stück der Evolute (z. B. gleich $a + b + c$).

2. Die Normalen der Evolvente umhüllen die Evolute.

3. Die Krümmungsmittelpunkte der Evolvente liegen auf den Ecken der Evolute.

Läßt man die Seiten des Vielecks unendlich klein und ihre Anzahl unendlich groß werden, so wird das Vieleck zu einer Kurve und die obigen drei Sätze lassen sich fast unverändert auf die Kurve übertragen:

1. Der Krümmungsradius der Evolvente ist gleich dem abgewickelten Stück der Evolute.

2. Die Normalen der Evolvente umhüllen die Evolute, sind also die Tangenten der letzteren.

3. Die Krümmungsmittelpunkte der Evolvente sind die Berührungspunkte dieser Tangenten.

Mit der Abwicklung kann man an einer beliebigen Stelle beginnen. Eine Evolute hat demnach unendlich viele Evolventen, die einander parallel sind; es sind also „Parallelkurven".

Zykloide.

Erklärung: Rollt ein Kreis auf einer seiner Tangenten so beschreibt jeder Punkt dieses Kreises eine Zykloide. Der Kreis heißt Rollkreis, die Tangente heißt Bahn und F der Fußpunkt (Fig. 74).

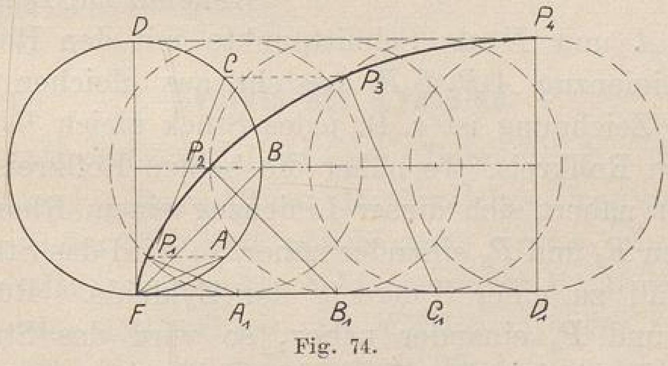


Fig. 74.

Konstruktion: Sie ergibt sich aus der Erklärung. Man teilt den Umfang des Rollkreises in beliebig viele Teile, z. B. in 8 gleiche Teile durch die Punkte A, B, C usw. und trägt die erhaltenen Bogen auf der Bahn vom Fußpunkt aus bis zu den Punkten A_1, B_1, C_1 usw. ab. Dann zieht man durch A, B, C usw. Parallelen zur Bahn und schlägt um jeden Teilpunkt der Bahn A_1, B_1, C_1 usw. mit der entsprechenden Sehne des Rollkreises einen Kreis, z. B. mit AF um A_1. Die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 usw. der Kreise mit den zugehörigen Parallelen sind die Punkte der Zykloide. Bei der Lage des Rollkreises über A_1 kommt die Sehne FA in die Lage $A_1 P_1$. Bei der Lage über B_1 kommt die Sehne FB nach $P_2 B_1$.

Tangente der Zykloide.

Lehrsatz: Die Tangente der Zykloide halbiert den Winkel zwischen der zugehörigen Tangente des Rollkreises und der Parallelen zur Bahn (Fig. 75).

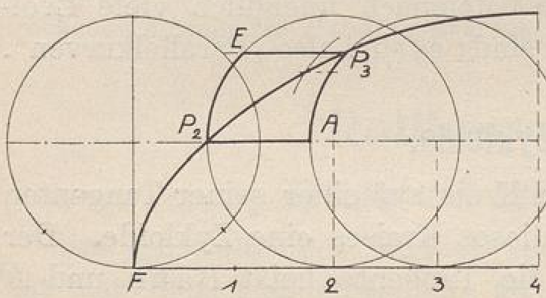


Fig. 75.

Beweis: Wir zeichnen zwei auf einander folgende Lagen des Rollkreises, z. B. über den Fußpunkten 2 und 3. Dann sind P_2 und P_3 Punkte der Zykloide; zieht man hierdurch Parallelen zur Bahn, so erhält man A und E als Schnittpunkte mit den Rollkreisen.

Der Linienzug $A P_2 E P_3$ besteht aus gleichen Stücken, in unserer Zeichnung ist z. B. jedes Stück gleich $^1/_8$ des Umfanges vom Rollkreis. Je näher die beiden Rollkreise liegen, desto mehr nähert sich dieser Linienzug einem Rhombus.

Rücken P_2 und P_3 einander näher, so wird das Stück $P_2 P_3$ im Grenzfall zu einer Tangente der Zykloide. Rücken zugleich A und P_3 einander näher, so wird das Stück $A P_3$ im Grenzfall zu einer Tangente des Rollkreises.

Da nun die Diagonale im Rhombus die Winkel desselben halbiert, so halbiert die Tangente der Zykloide den Winkel zwischen der zugehörigen Tangente des Rollkreises und der Parallelen zur Bahn.

Tangente und Normale.

Lehrsatz: Die Tangente der Zykloide geht durch den höchsten, die Normale durch den tiefsten Punkt des Rollkreises.

Beweis: Man zieht an den Rollkreis eine beliebige Tangente, verbindet seinen tiefsten Punkt F (Fig. 76) und seinen höchsten Punkt H mit dem Berührungspunkt B und mit einander und fällt von B die Senkrechte auf den Durchmesser FH. Dann ist:

$\alpha = \alpha'$ als Sehnen- und Tangentenwinkel,

$\alpha = \alpha''$ als Komplemente desselben Winkels.

Folglich ist $\alpha' = \alpha''$, d. h. BH halbiert den Winkel zwischen der Tangente des Rollkreises und der Horizontalen, ist also eine Tangente der Zykloide und BF die zugehörige Normale. Demnach geht die Tangente der Zykloide durch den höchsten und die Normale durch den tiefsten Punkt des zugehörigen Rollkreises.

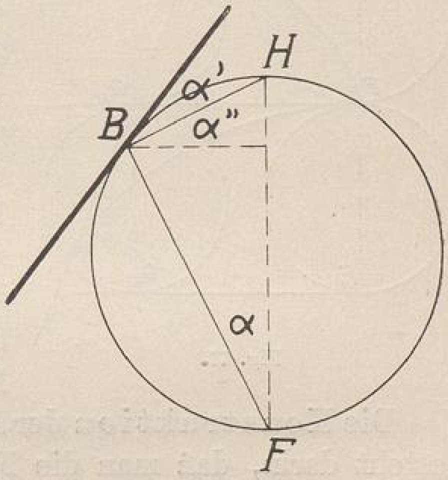


Fig. 76.

Evolute der Zykloide.

Man läßt einen Kreis auf seiner Bahn abrollen, bis z. B. $^3/_8$ seines Umfanges abgerollt ist. Dann zeichnet man symmetrisch unter der Bahn FQ zwei gleich große Kreise (Fig. 77).

Verbindet man nun den Zykloidenpunkt B mit dem tiefsten Punkt Q des Rollkreises und verlängert diese Gerade bis zum Schnitt C mit dem untern Kreis, so sind die abgeschnittenen Bogen $\overparen{BQ}$ und $\overparen{CQ}$ gleich und zwar hier gleich $^3/_8$ des Umfanges vom Rollkreis.

Denkt man sich jetzt den unteren Kreis nach links auf der unteren Bahn $Q_1 F_1$ abrollen, so beschreibt jeder Punkt des

Kreises, z. B. C, eine Zykloide. Sind $^3/_8$ des Umfanges abgerollt, also der Kreis bei F_1 angekommen, so muß C seinen höchsten Stand erreicht haben, also bei F angekommen sein. C und F sind also Punkte einer unteren Zykloide.

Da $B\,C$ durch Q also den tiefsten Punkt des oberen und den höchsten Punkt des unteren Rollkreises geht, so ist $B\,C$ die Tangente an die untere und zugleich Normale an die obere Zykloide (nach dem vorhergehenden Lehrsatz); dies läßt sich auch für die übrigen Stellungen des Rollkreises beweisen. Die untere Zykloide ist also die Evolute und die obere die zugehörige Evolvente. $B\,C$ ist demnach der Krümmungsradius der oberen Zykloide und C der Krümmungsmittelpunkt.

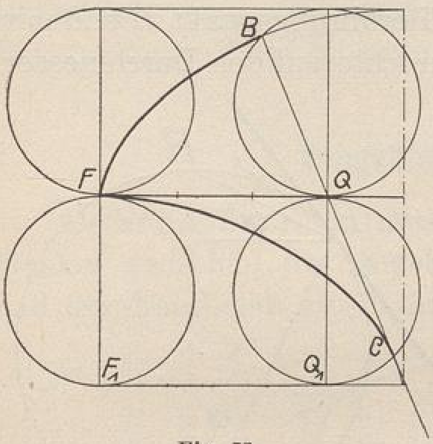


Fig. 77.

Die Konstruktion der Evolute einer gegebenen Zykloide besteht darin, daß man die Normalen der Zykloide über den Fußpunkt Q um sich selbst verlängert. Umgekehrt kann man auch die Tangenten über den höchsten Punkt des Rollkreises hinaus um sich selbst verlängern und erhält dann die zugehörige Evolvente der gegebenen Zykloide.

Auch die Länge der Zykloide ist jetzt leicht ableitbar. Da die Tangente gleich dem abgewickelten Stück z. B. $\overline{B\,C} = \widehat{F\,C}$ ist, so ist die ganze Länge der Zykloide gleich dem vierfachen Durchmesser des Rollkreises $L = 8\,r$.

Die Fläche der Zykloide.

Man zeichne eine Zykloide und die zugehörige Evolute (Fig. 78), ziehe dann einen beliebigen Krümmungsradius, z. B. $P_1\,C_1$ dicht daneben einen benachbarten $P_2\,C_2$ und durch P_2 eine Parallele $P_2\,E$ zur Bahn $A\,B$. Die beiden Krümmungsradien werden in G und H durch die Bahn halbiert. Liegen

P_1 und P_2, also auch C_1 und C_2 unendlich nahe aneinander, so wird $E P_2 C_2 C_1$ zum $\triangle E P_2 C_2$. Also ist das untere Dreieck $H G C_2 = \frac{1}{4}$ des ganzen $E P_2 C_2$.

Denken wir uns nun die ganze Fläche $AJBD = F_1 + F_2$ in unendlich viele schmale Dreiecke zerlegt, so ist die Summe der unteren Dreiecke also

$$F_2 = \frac{1}{4}(F_1 + F_2).$$

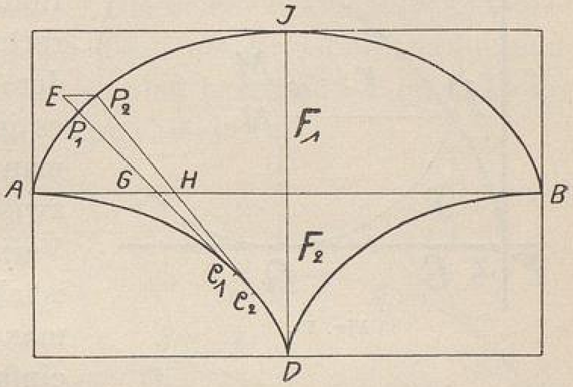


Fig. 78.

Also ist

$$F_1 = \frac{3}{4}(F_1 + F_2).$$

Die beiden Hälften von F_2 sind kongruent den Zwickeln rechts und links über der Zykloide $A\,J\,B$, ergänzen also die Fläche F_1 der oberen Zykloide zu einem Rechteck vom Inhalt:

$$F_1 + F_2 = 2\,r \cdot 2\,r\,\pi = 4\,r^2\,\pi \text{ oder } d \cdot d\,\pi = \pi\,d^2.$$

Demnach ist die Fläche der Zykloide

$$\boldsymbol{F_1 = 3\,r^2\,\pi = \frac{3}{4}\,\pi\,d^2}.$$

Die Gleichung der Zykloide.

Wir nehmen die Bahn des Rollkreises zur X-Achse und den Anfangspunkt F der Zykloide zum Schnittpunkt eines rechtwinkligen Achsenkreuzes (Fig. 79).

Hat sich nun der Rollkreis von F nach Q gewälzt und sich dabei um den Winkel φ gedreht, so ist

$$\overline{FQ} = \widehat{PQ} = r \cdot \varphi$$

worin φ der „Rollwinkel" ist. Wenn man nun beachtet, daß

$$PN = r \cdot \sin\varphi$$

und

$$MN = r \cdot \cos\varphi$$

ist, so ergibt sich:

$$x = FQ - PN = r\varphi - r\sin\varphi = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\varphi}) \quad . \ \mathrm{I}$$

$$y = MQ - MN = r \quad - r\cos\varphi = \boldsymbol{r}(\mathbf{1} - \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\varphi}) \quad . \ \mathrm{II}$$

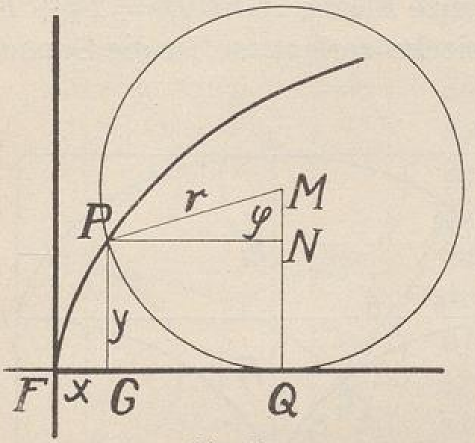


Fig. 79.

In diesen beiden Gleichungen sind x und y von einer dritten Variablen, nämlich dem Rollwinkel φ abhängig. Berechnet man $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ aus der einen Gleichung und setzt es in die andere ein, so erhält man eine einzige Gleichung zwischen x und y ohne die dritte Variable φ. Diese Gleichung ist aber wenig übersichtlich und man behält daher besser obige einfachere Gleichungen bei.

Die Steigung der Zykloide.

Aus Gleichung I folgt durch Differenzieren nach x:

$$1 = r\frac{d\varphi}{dx} - r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dx}$$

also

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{r - r\cos\varphi} = \frac{1}{r(1-\cos\varphi)}$$

Aus Gleichung II folgt ebenso und durch Einsetzen von $\frac{d\varphi}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = r\sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dx} = r\sin\varphi\frac{1}{r(1-\cos\varphi)} =$$

$$\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}$$

B e m e r k u n g: Diese Formel zeigt, daß die Steigung einer Zykloide nur vom Rollwinkel φ und nicht vom Radius des Rollkreises abhängig ist. Wenn $\varphi = 90^0$, so ist die Steigung $= 1$, also der Winkel der Tangente $= 45^0$. Wenn $\varphi = 0$

oder 360°, so ist die Steigung $= \infty$ und der Steigungswinkel $= 90°$. Ist $\varphi = 180°$, so ist die Steigung $= 0°$. Im allgemeinen nimmt die Steigung mit dem Cosinus des Rollwinkels zu und ab.

Epizykloide.

Erklärung: Rollt ein Kreis auf einem anderen als Bahn, den er von außen berührt, so beschreibt jeder Punkt des Rollkreises eine Epizykloide. — Die bisher betrachtete Zykloide rollte auf einer Geraden. Da diese als Kreislinie mit unendlich großem Radius aufgefaßt werden kann, so ist die Zykloide nur ein besonderer Fall der Epizykloide.

Konstruktion: Aus der Erklärung ergibt sich, daß die Konstruktion der Epizykloide derjenigen der Zykloide entspricht. Der Unterschied besteht nur darin, daß die Parallelen zur Bahn hier konzentrische Kreise um den Mittelpunkt des festen sind. Das übrige Verfahren ist dasselbe wie bei der Zykloide (Fig. 80).

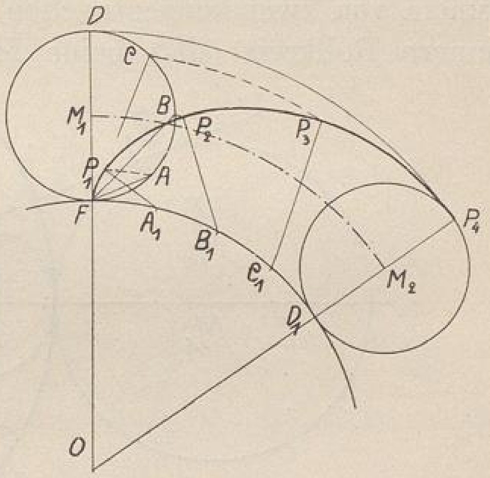


Fig. 80.

Lehrsatz: 1. Die Tangente der Epizykloide geht durch den höchsten, d. h. hier den äußersten, die Normale durch den tiefsten, d. h. hier den innersten Punkt des Rollkreises.

Beweis: Läßt man den Kreis um ein unendlich kleines Stückchen rollen, so unterscheidet sich der entstandene Bogen der Epizykloide nicht von dem der Zykloide, weil dies Stückcken der Bahn als unendlich kurze Gerade aufgefaßt werden kann. Durch den entstandenen Bogen der Epizykloide ist die Richtung der Tangente und die der Normalen gegeben, folglich haben diese dieselbe Richtung wie bei der Zykloide, jene Sätze der Zykloide gelten also auch für die Epizykloide.

Lehrsatz: 2. Ist der Radius des festen Kreises $n = \frac{R}{r}$ mal so groß wie der des Rollkreises, so ist nach einer vollen Abwicklung des rollenden Kreises die abgelaufene Bahn $\frac{1}{n} = \frac{r}{R}$ des Umfanges des festen Kreises.

Beweis: Die Umfänge verhalten sich wie die Radien.

Die Evolute der Epizykloide.

Hilfssatz: Rollen zwei Rollkreise (M_1 und M_2) auf je einem von zwei konzentrischen festen Kreisen (C), sodaß der innere Rollkreis (M_2) beide festen Kreise berührt und die

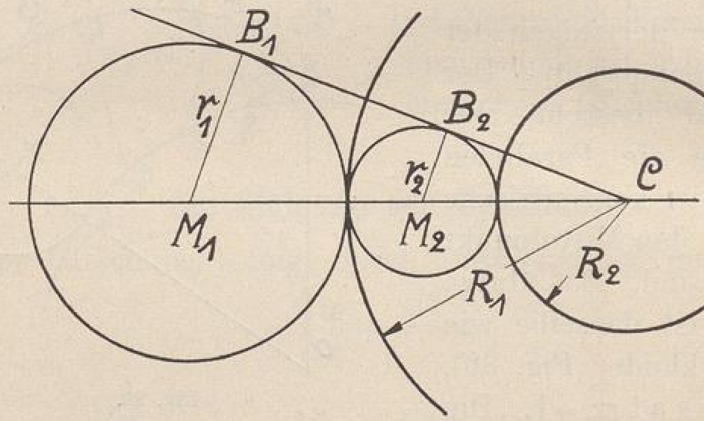


Fig. 81.

gemeinsame Tangente ($B_1 B_2$) der Rollkreise durch den Mittelpunkt C der festen Kreise geht, so verhalten sich die Radien der Rollkreise wie die der festen (Fig. 81).

Beweis: Man zieht die Radien r_1 und r_2 zu den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangente. Dann ist:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{M_1\,C}{M_2\,C} = \frac{r_1 + R_1}{r_2 + R_2}$$

$$r_1 r_2 + r_1 R_2 = r_1 r_2 + r_2 R_1$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Die Konstruktion dieser Kreise ergibt sich aus der Proportion $r_1 : R_1 = r_2 : R_2$ und $R_1 = 2\,r_2 + R_2$. Wäre z. B. $r_1 : R_1 = 2 : 3$ gegeben, so teilt man

$$R_1 \text{ in } 2 \cdot 2 + 3 = 7 \text{ Teile}$$

und der zweite Teilpunkt ist der Mittelpunkt des inneren Kreises. Das Verhältnis der Kreise ist dann

$$R_1 : R_2 = 7 : 3 = r_1 : r_2$$

Die Evolute. Ähnlich wie bei der Zykloide zeichnen wir den Stand des Rollkreises, wenn z. B. $\frac{3}{8}$ seines Umfanges abgerollt ist (Fig. 82); alsdann zeichnen wir auch die inneren Rollkreise nach der vorigen Konstruktion hinzu. Dann ist:

$$\widehat{BQ} = \widehat{FQ}$$

nach Konstruktion. Wir ziehen jetzt die Sehne BQ und verlängern sie bis zum Schnitt C mit dem innern Kreise. Da sich die Radien der Rollkreise wie die der festen verhalten, so verhalten sich auch ebenso entsprechende Bogen. $\widehat{BQ} : \widehat{CQ} = \widehat{FQ} : \widehat{F_1 Q_1}$. Da nun $\widehat{BQ} = \widehat{FQ}$ nach Konstruktion ist, so ist auch $\widehat{CQ} = \widehat{F_1 Q_1}$.

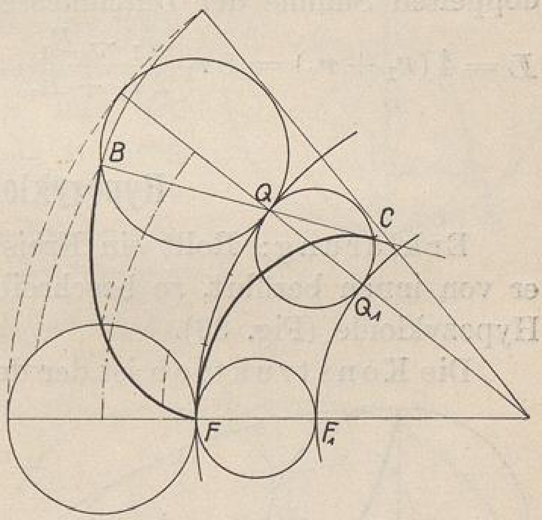


Fig. 82.

Wenn also der kleine Rollkreis auf dem inneren festen Kreis von Q_1 bis F_1 rollt, so hat sich der Punkt C um $\widehat{QC}$ gedreht, ist also an die höchste Stelle, also nach F gerückt. C und F sind also Punkte einer zweiten Epizykloide.

Wie bei der Zykloide, so ist auch hier BC sowohl Tangente der inneren, als auch Normale und Krümmungsradius der äußeren Epizykloide. Die innere ist also Evolute der äußeren, die äußere ist Evolvente der innern und C der Krümmungspunkt für B.

Konstruktion der Evolute: Man erhält die Evolute der Epizykloide, indem man die Normale, z. B. BQ der Epizykloide über den Fußpunkt Q hinaus im Verhältnis der Radien der Rollkreise verlängert. — Dies Verhältnis war bei der Zykloide 1 : 1. — Durch entsprechende Verlängerung der Tangente nach außen erhält man die Evolvente aus der Evolute.

Die Länge der Epizykloide FC ist ähnlich wie bei der Zykloide gleich dem Krümmungsradius BC ihrer Evolvente; also ist die ganze Länge einer Epizykloide gleich der doppelten Summe der Durchmesser der Rollkreise.

$$\boldsymbol{L} = 4(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = 8\, r_1 \frac{r_1 + R_1}{2\, r_1 + R_1}$$

Hypozykloide.

Erklärung: Rollt ein Kreis in einem anderen ab, den er von innen berührt, so beschreibt jeder seiner Punkte eine Hypozykloide (Fig. 83).

Die Konstruktion ist der der Epizykloide entsprechend.

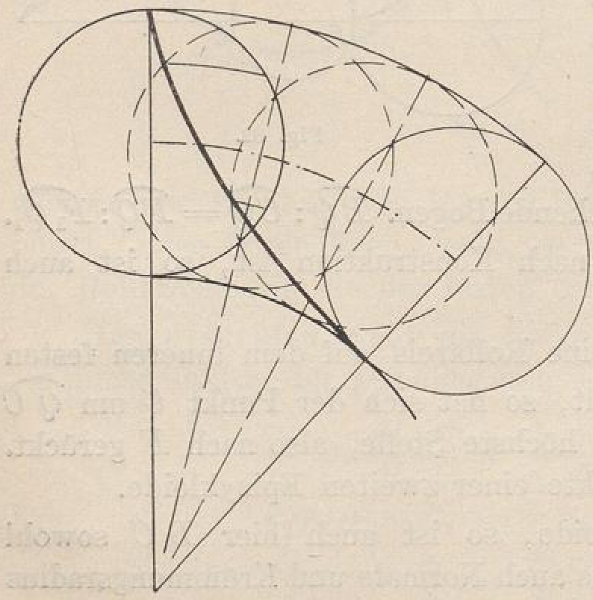


Fig. 83.

Die konzentrischen Kreise liegen hier nnerhalb.

Die Tangente geht durch den höchsten, d. h. hier den i nnersten, die Normale durch den tiefsten, d. h. hier den äußersten Punkt des Rollkreises. Beweis wie oben.

Auch hier ist die nach einer vollen Abwicklung abgelaufene Bahn

$\frac{1}{n} = \frac{r}{R}$ des festen Umfanges, wenn der Halbmesser des festen Kreises $n = \frac{R}{r}$ mal so groß ist, wie der des Rollkreises.

Hypozykloide Gradführung.

Lehrsatz: Ist der Halbmesser KG des Rollkreises halb so groß wie der des festen $F_1 G$, so ist die Hypozykloide eine Gerade und zwar der Durchmesser (Fig. 84).

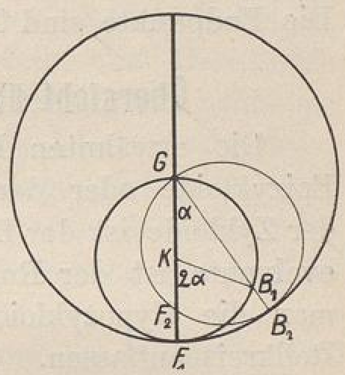


Fig. 84.

Beweis: Wir wollen den Weg eines beliebigen Punktes B_1 des Rollkreises feststellen. Wir verbinden B_1 mit den Mittelpunkten K und G. Dann ist $F_1 K B_1$ doppelt so groß wie $F_1 G B_1$. Da sich also die Zentriwinkel umgekehrt verhalten wie die Radien, so sind die zugehörigen Bogen gleich, d. h. $\widehat{B_1 F_1} = \widehat{B_2 F_1}$. Der Kreis ist also vom Fußpunkt F_1 bis B_2 gerollt und B_1 bewegt sich hierbei auf dem Durchmesser von B_1 nach B_2; ebenso bewegt sich gleichzeitig F_1 nach F_2. Die Punkte des Rollkreises bewegen sich also auf geraden Linien und zwar auf Durchmessern.

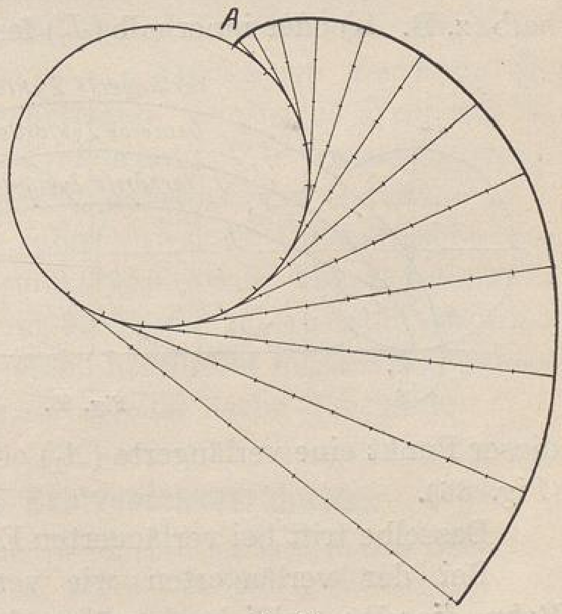


Fig. 85.

Kreisevolvente.

Erklärung: Denkt man sich um einen Kreis einen Faden gelegt und wickelt man diesen von einem Punkte, z. B. A aus ab, so beschreibt dieser Punkt A eine Kreisevolvente (Fig. 85). Stellt man sich statt dessen vor, daß eine Tangente auf einem Kreisumfang rollt, so beschreibt jeder Punkt der Tangente ebenfalls eine Kreisevolvente.

Die Konstruktion ergibt sich aus dieser Erklärung. Man trägt von A aus gleiche Teile auf dem Kreise ab. Durch jeden Teilpunkt des Bogens zieht man eine Tangente und macht die erste gleich 1, die zweite gleich 2 dieser Teile usw. Die Endpunkte sind Punkte der Kreisevolvente.

Übersicht über die bisherigen Rollkurven.

Die erwähnten Rollkurven können als Spezialfälle der Epizykloide oder der Hypozykloide aufgefaßt werden. Bei der Zykloide ist der Bahnkreis unendlich groß. Bei der Kreisevolvente ist der Rollkreis unendlich groß. Außerdem kann man die Hypozykloide als eine Epizykloide mit negativem Rollkreis auffassen.

Verlängerte Zykloiden.

Denkt man sich mit dem Rollkreis einen Punkt außerhalb (z. B. A_1) oder innerhalb (J_1) fest verbunden, so beschreibt

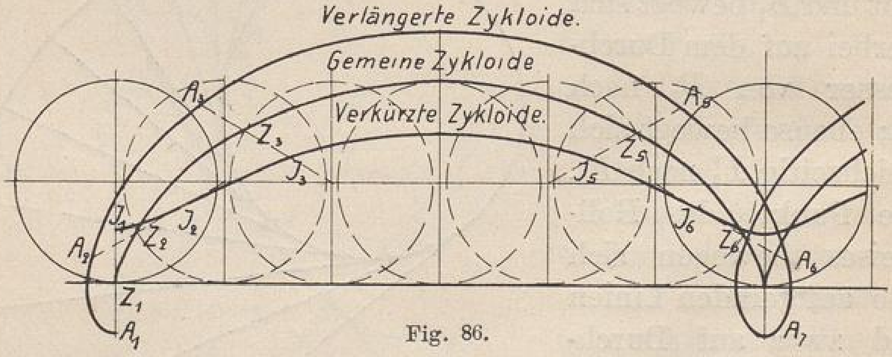


Fig. 86.

dieser Punkt eine verlängerte (A_1) oder verkürzte Zykloide (J_1) (Fig. 86).

Dasselbe tritt bei verlängerten Epi- und Hypozykloiden ein.

Bei der verlängerten wie verkürzten Zykloide ist die Bahn dieselbe geblieben, während bei der verlängerten der

Punkt A_1 einem größeren, bei der verkürzten Zykloide der Punkt J_1 einem kleineren Kreis als der Rollkreis entspricht.

Trochoiden entstehen ähnlich wie die Zykloiden. Der Kreis rollt aber nicht bloß, sondern eilt gleichzeitig durch Vorwärtsgleiten vor oder bleibt durch Rückwärtsgleiten zurück. Man trägt statt der Teile der Peripherie beliebige, aber gleiche Stücke auf der Bahn ab; diese Wegestücke können länger oder kürzer sein als die Teile der Peripherie.

Die stärker gekrümmte Trochoide entsteht, wenn der Rollkreis trotz seiner Drehung auf einer glatten Bahn im Vergleich zum reinen Abrollen zurückbleibt (bei den Lokomotivrädern während des Anfahrens und beim Slip der Schaufelräder). Bei ihrer Konstruktion trägt man kleinere Stücke auf der Bahn ab, als die Teile des Umfanges betragen. Die gekrümmtere Trochoide ist mit der verlängerten Zykloide identisch. Als Grenzfall, wo die Vorwärtsbewegung gleich Null ist, entsteht ein Kreis.

Die flache Trochoide entsteht, wenn der Rollkreis sich rascher fortbewegt, als seiner Abwicklung entspricht (bei der Kurbel eines Fahrrades). Ebenso entsteht sie, wenn ein Rad n seiner Umdrehung so gebremst wird, daß es zum Teil auf der Bahn gleitet (beim Einfahren in die Station). Bei ihrer Konstruktion trägt man größere Stücke auf der Bahn ab, als die Teile des Umfanges betragen. Die flache Trochoide ist mit der verkürzten Zykloide identisch. Als Grenzfall, wenn das Rad sich nicht mehr dreht, entsteht eine Gerade.

Der Mond macht im Jahre etwa 12 Umdrehungen um die Erde im Abstand von rund 384 000 km, während die Erde gleichzeitig einen Umlauf um die Sonne im Abstand von rund 150 000 000 km macht. Der Mond beschreibt folglich angenähert eine verkürzte Epizykloide, d. h. eine flache Trochoide.

Zykloiden- und Evolventenverzahnung.

Das Übersetzungsverhältnis zweier zusammenarbeitender Zahnräder soll konstant bleiben, die Räder sollen sich also gleichförmig, d. h. mit konstanter Winkelgeschwindigkeit drehen. Diese Bedingung wird nach dem Verzahnungsgesetz erfüllt, wenn die Normale im jeweiligen Berührungspunkt (Eingriffpunkt) der Zahnprofile stets durch denselben Punkt O der Verbindungslinie $M_1 M_2$ der Wellenmitten geht (Fig. 87). Dieser Punkt O teilt dann die Gerade $M_1 M_2$ im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Räder. Die durch O gehenden Kreise sind die Teilkreise, ihre Punkte haben dieselbe Um-

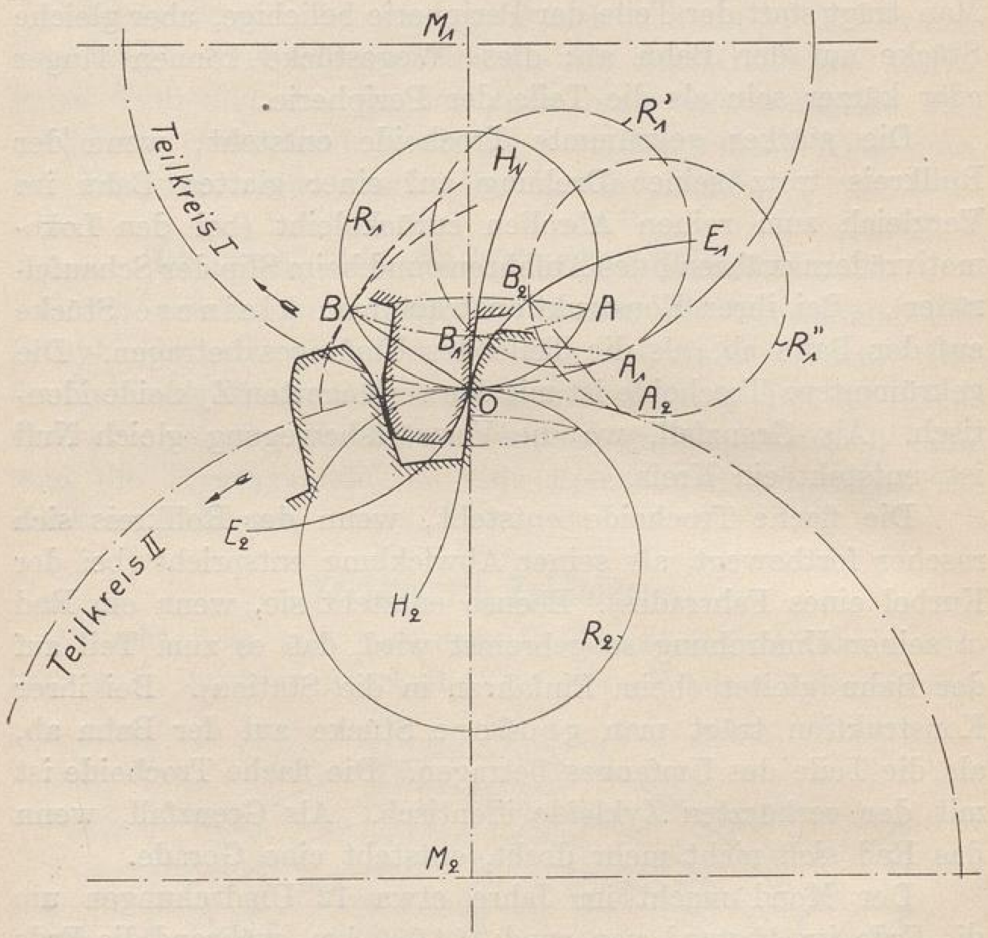


Fig. 87.

fangsgeschwindigkeit. Die Eingriffpunkte können auf einer ganz beliebig gestalteten Kurve (der Eingrifflinie) liegen. Die Beurteilung der Verzahnung gestaltet sich indessen leichter, wenn man als Eingrifflinie einen Kreis oder eine gerade Linie wählt. Man erhält dann als Zahnflanken zyklische Kurven und hat dadurch den weiteren Vorteil der einfachen Konstruktion der Zahnprofile und der genauen Formgebung bei der Bearbeitung der Zähne.

Daß die zyklischen Kurven das oben genannte Verzahnungsgesetz erfüllen, zeigen folgende Betrachtungen:

1. Zykloidenverzahnung (Fig. 87): Läßt man auf jedem der beiden Teilkreise I und II die Rollkreise R_1 und R_2 sich abwälzen, so erhält man die Epizykloiden $O\,E_1$ und $O\,E_2$ sowie die Hypozykloiden $O\,H_1$ und $O\,H_2$. Einem beliebigen Bogen des Rollkreises R_1, z. B. $\widehat{O\,A}$, entsprechen die Wälzungsbögen $\widehat{O\,A_1}$ und $\widehat{O\,A_2}$, und diesen die Kurvenpunkte B_1 bezüglich B_2, die man in der früher (Seite 95) angegebenen Weise erhält. Der Rollkreis R_1 hat dann die Lagen R_1' bzw. R_1''. Denkt man sich nun diese Kreise R_1' und R_1'' sowie die Kurven $O\,E_1$ und $O\,H_1$ mit den Teilkreisen I und II starr verbunden, und dreht die Teilkreise im Sinne der Pfeile so, daß sie aufeinanderrollen, ohne zu gleiten, so werden, weil $\widehat{O\,A_1} = \widehat{O\,A_2}$ ist, die Punkte A_1 und A_2 zugleich nach O kommen; die Kreise R_1' und R_1'' decken sich dann mit R_1, und weil $A_1\,B_1 = A_2\,B_2 = O\,A = O\,B$ ist, fallen die Punkte B_1 und B_2 mit B zusammen, d. h. die Eingriffpunkte liegen auf dem Kreise R_1. Da weiter $A_1\,B_1$ und $A_2\,B_2$ die Normalen der Kurven sind, weil sie durch den tiefsten Punkt des Rollkreises gehen, so muß auch $O\,B$ die gemeinsame Normale im Berührungspunkt B sein; diese geht demnach durch Punkt O, erfüllt also das Verzahnungsgesetz. Ähnliche Verhältnisse liegen beim Eingriff der Kurven $O\,E_2$ und $O\,H_2$ vor, welche vom Rollkreis R_2 erzeugt werden.

Wird der Radius des Teilkreises II unendlich groß, so geht dieser Kreis in eine Gerade über, man erhält eine Zahnstange; die Epizykloide $O\,E_1$ und die Hypozykloide $O\,H_2$ werden dann Zykloiden.

2. Evolventenverzahnung (Fig. 88). Die Gerade $A_1\,O\,A_2$ ist die gemeinsame Tangente der beiden Grundkreise I und II. Die Punkte A_1 und A_2 sind ihre Berührungspunkte. Durch Wälzen der Geraden $O\,A_1$ auf Grundkreis I entsteht die Evolvente $O\,E_1$, durch Wälzen der Geraden $O\,A_2$ auf dem Grundkreis II entsteht die Evolvente $O\,E_2$. Die Wälzungsbögen $A_1\,B_1$ und $A_2\,B_2$ seien gleich. Dem Punkte B_1 entspricht der Kurvenpunkt P_1, dem Punkte B_2 der Kurvenpunkt P_2. Denkt man sich die so entstandenen Kurven und die Geraden $B_1\,P_1$ und $B_2\,P_2$ mit den Grundkreisen starr verbunden, und diese so in Richtung der Pfeile gedreht, daß ihre Punkte dieselbe Umfangsgeschwindigkeit haben, so werden zugleich Punkt B_1 nach A_1 und B_2 nach A_2 fallen. Die Kurvenpunkte P_1 und P_2 kommen dann auf die Tangente $A_1\,A_2$ zu liegen, da ja auch $B_1\,P_1$ bzw. $B_2\,P_2$ Tangenten der Grundkreise sind. Punkt P_1 und P_2 müssen auf $A_1\,A_2$ zusammenfallen, da:

$$\overline{B_1\,P_1} = \overline{A_1\,O} + \widehat{A_1\,B_1}$$
$$\overline{B_2\,P_2} = \overline{A_2\,O} - \widehat{A_2\,B_2}$$

$$\overline{B_1\,P_1} + \overline{B_2\,P_2} = \overline{A_1\,O} + \overline{A_2\,O} = \overline{A_1\,A_2} = \text{Konstante.}$$

Die Evolventen berühren sich also stets auf $A_1 A_2$, d. h. die Eingrifflinie ist eine Gerade. Da ferner $B_1 P_1$ und $B_2 P_2$ Normalen der Evolventen sind und bei der Drehung auf $A_1 A_2$ fallen, so geht die gemeinsam Normale im Berührungspunkt stets durch Punkt O.

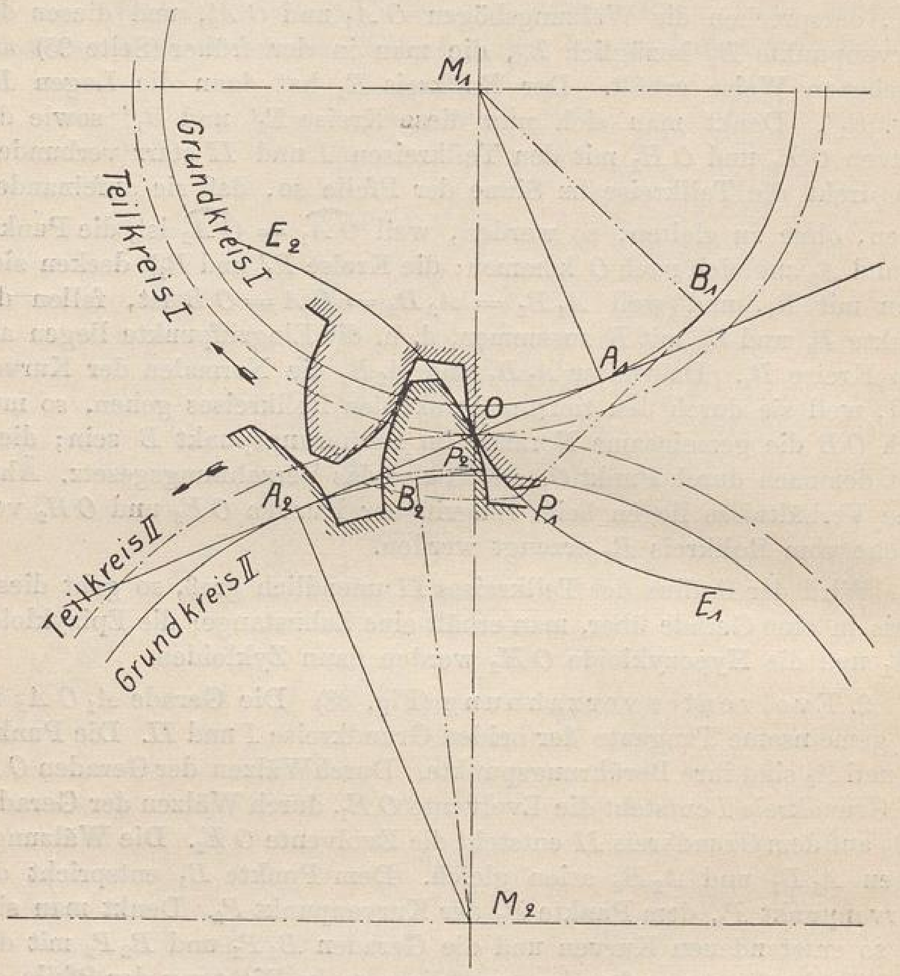


Fig. 88.

Da ferner $\varDelta\ M_1 O A_1 \sim M_2 O A_2$,

so ist
$$\frac{M_1 A_1}{M_2 A_2} = \frac{M_1 O}{M_2 O}$$

Bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit in den Grundkreisen sind also auch die Umfangsgeschwindigkeiten in den Teilkreisen gleich, und O teilt die Gerade $M_1 M_2$ im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der Räder. Das Verzahnungsgesetz ist also erfüllt.

Andere Kurven.

Die Adiabate.

Ähnlich wie bei der Isotherme (Seite 68) nehmen wir 1 cbm Gas von 8 atm Druck und lassen dies Gas sich ausdehnen (Fig. 89). Bliebe die Temperatur des Gases dieselbe, so würde es sich isothermisch ausdehnen, wie früher besprochen wurde. Wird aber keine Wärme von außen zugeführt, so sinkt die Temperatur während der Ausdehnung. Infolgedessen sinkt der Druck in stärkerem Maße, als das Volumen zunimmt, und zwar ist:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^k,$$

wobei $k = 1{,}4$, dem Verhältnis der spezifischen Wärmen der Gase ist. Die Gleichung der Adiabate ist also:

$$\boldsymbol{v_0^k \cdot p_0 = v_1^k \cdot p_1 =} \textbf{Konstante} \boldsymbol{= C.}$$

Wir berechnen nun eine Tabelle, indem wir der Reihe nach $v = 8$, 4, 2 und 1 setzen und die zugehörigen Drucke berechnen; die Konstante ist hier $C = 1^{1,4} \cdot 8 = 8$.

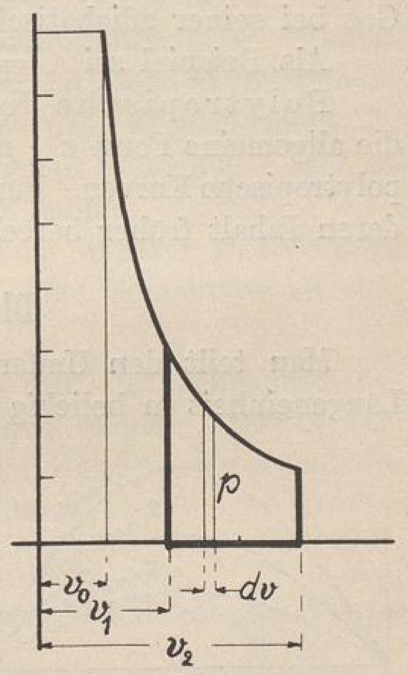


Fig. 89.

Alsdann wird auf der horizontalen Achse das Volumen und auf der vertikalen der zugehörige Druck abgetragen, und man erhält eine Kurve, die der adiabatischen Ausdehnung des Gases entspricht. Diese Kurve ist steiler als die Isotherme.

Inhalt: Um den Inhalt einer unter der Adiabate liegenden Fläche zu finden, zerlegen wir diese Fläche in vertikale Streifen. Jeder hat die Höhe p und die Breite Δv bzw. dv, sein Inhalt ist also $dF = p \cdot dv$. Die Fläche ist demnach im allgemeinen:

$$F = \int dF = \int p \cdot dv = \int \frac{C}{v^k} \cdot dv = \int C \cdot v^{-k} \cdot dv$$

Die Fläche von v_1 bis v_2 ist also

$$F = \int_{v_1}^{v_2} C \cdot v^{-k} \cdot dv = \left[\frac{C \cdot v^{-k+1}}{-k+1}\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{C}{-0{,}4}\,(v_2^{\,-0{,}4} - v_1^{\,-0{,}4})$$

$$= \frac{C}{0{,}4}\left(\frac{1}{v_1^{\,0{,}4}} - \frac{1}{v_2^{\,0{,}4}}\right).$$

Die so berechnete Fläche stellt die Arbeit dar, welche das Gas bei seiner adiabatischen Ausdehnung von v_1 bis v_2 leistet.

Als Beispiel sei $C = 8$ und $v_1 = 2$ cbm, $v_2 = 3$ cbm.

Polytropische Kurven: Kurven, deren Gleichungen die allgemeine Form $v^n \cdot p =$ Konstante $= C$ haben, nennt man polytropische Kurven. Für $n = 1$ ergibt sich die Isotherme, deren Inhalt früher berechnet wurde.

Die Sinuslinie.

Man teilt den Umfang eines Kreises vom Radius $R = 1$ Längeneinheit in beliebig viele Teile und trägt die Länge der Bogenstücke aneinander auf eine horizontale Achse ab. Die ganze Strecke ist also gleich 2π-Einheiten, gleich dem ganzen Umfang; in Fig. 90 ist nur der halbe Umfang π abgewickelt. Alsdann trägt man den zu jedem Bogen x des Einheitskreises gehörigen Sinus y an der zugehörigen Stelle der horizontalen Achse als Ordinate senkrecht nach oben ab. Die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinate heißt Sinuslinie. Ihre Gleichung ist $y = \sin x$.

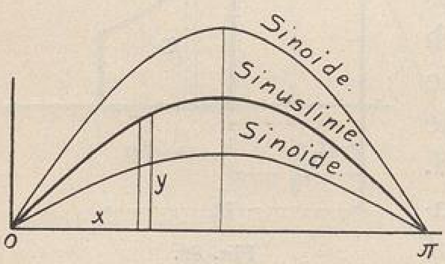


Fig. 90.

Die Steigung: Durch Differenzieren der Gleichung $y = \sin x$ erhält man die Steigung $\frac{dy}{dx} = \cos x$. Die Sinuslinie steigt also so, wie der Cosinus des betreffenden Winkels angibt.

Bei 0^0 beträgt der Cosinus 1, mithin ist die Steigung hier gleich 1. Der zugehörige Steigungswinkel ist demnach 45^0, da $tg\ 45^0 = 1$ ist. Bei 0^0 steigt also die Tangente der Sinuslinie unter 45^0 an.

Setzt man die Steigung $y' = \cos x$ gleich Null, so erhält man die Lage des Maximums bei $\frac{\pi}{2}$, d. h. bei $\frac{1}{4}$ des Umfangs und des Minimums bei $\frac{3\pi}{2}$, d. h. bei $\frac{3}{4}$ des Umfangs. Beide Extremwerte sind gleich dem Radius, also hier gleich ± 1.

Setzt man den zweiten Differentialquotienten $y'' = -\sin x$ gleich Null, so erhält man bei 0, π und 2π einen Wendepunkt.

Ähnlichkeit: Ist der Radius des Kreises nicht 1, sondern r, so sind alle Längen der neuen Sinuslinie r mal so groß. Alle Sinuslinien sind einander ähnlich.

Die Steigung ($\cos x$) ist nur vom Winkel x abhängig, nicht vom Radius; sie ist also bei allen Sinuslinien an entsprechenden Punkten gleich groß.

Inhalt: Wenn man sich die von der Sinuslinie begrenzte Fläche in senkrechte unendlich schmale Streifen zerlegt denkt, so hat jeder Streifen die Höhe $r \cdot \sin x$ und die Grundlinie $r \cdot dx$, demnach die Fläche

$$dF = r^2 \cdot \sin x \cdot dx.$$

Die gezeichnete, dem halben Umfang entsprechende Fläche ist also:

$$F = \int_0^\pi r^2 \cdot \sin x \cdot dx = r^2 \int_0^\pi \sin x \cdot dx = -r^2 \Big[\cos x\Big]_0^\pi$$

$$= -r^2 (\cos \pi - \cos 0) = -r^2(-1-1) = 2r^2$$

Die Fläche der Sinuslinie ist also gleich dem doppelten Quadrat des Radius. Man prüfe dies Resultat durch Zeichnung.

Die Inhalte verschiedener Sinuslinien verhalten sich wie die Quadrate der Radien[1]).

---

[1]) Elektrotechnische Anwendungen der Sinuslinie finden sich: Elemente der Differential- und Integralrechnung v. Düsing. Seite 78 u. 79.

Sinoide.

Trägt man nicht die Sinus selbst, sondern Vergrößerungen oder Verkleinerungen dieser Stücke senkrecht nach oben auf, so erhält man als Kurve eine Sinoide. Eine solche Kurve bekommt man auch, wenn man die Sinus zwar selbst in wahrer Größe, aber die Bogen vergrößert oder verkleinert aufträgt.

Allgemeine Betrachtungen an Kurven.

Die Bogenlänge.

Die Länge s einer beliebigen Kurve (Fig. 91), die zwischen zwei den Abszissen x_1 und x_2 entsprechenden Punkten der Kurve liegt, denkt man sich in unendlich kleine Teile zerlegt. Jedes Teilchen ds ist dann:

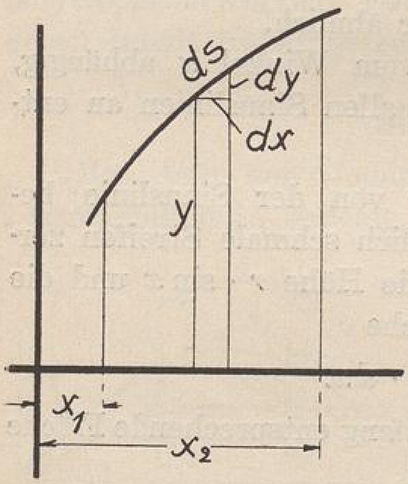


Fig. 91.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Die Länge der Kurve zwischen den Abszissen x_1 und x_2 ist also:

$$s = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Die Fläche.

Den Inhalt der Fläche zwischen einer Kurve, der Abszissenachse und den Ordinaten y_1 und y_2 haben wir bei den Kegelschnitten wiederholt berechnet. Ähnlich wie bei diesen zerlegen wir auch bei einer beliebigen Kurve mit bekannter Gleichung die Fläche in senkrechte Streifen von der Länge y und der Breite dx. Dann ist jeder Streifen $y \cdot dx$. Die Fläche zwischen y_1 und y_2 ist also:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} = f(x) \cdot dx$$

Oft sind Flächen von Kurven begrenzt, deren Gleichung nicht bekannt oder sehr verwickelt ist. Der Inhalt kann dann auf verschiedene Weise ermittelt werden.

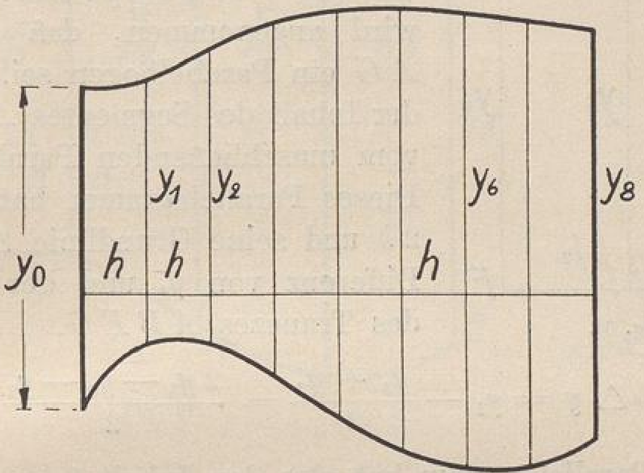


Fig. 92.

a) Trapezregel (Fig. 92): Man teilt die gegebene Fläche in eine beliebige Anzahl Streifen von der gleichen Breite h und sieht die Streifen als Trapeze an. Dann ist Streifen F_1, F_2 usw.:

$$F_1 = h \frac{y_0 + y_1}{2}$$

$$F_2 = h \frac{y_1 + y_2}{2}$$

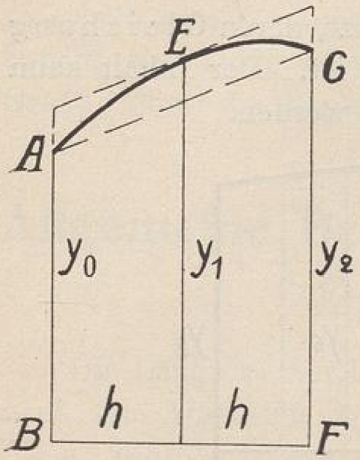
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F_8 = h \frac{y_7 + y_8}{2}$$

Die ganze Fläche $F = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots \frac{y_8}{2}\right)$.

An Stellen mit starker Krümmung zerlegt man die Streifen in schmälere Streifen durch Zwischenordinaten und kann die zerlegten Streifen für sich nach der Trapezregel berechnen.

b) Simpsonsche Regel: Man teilt die gegebene Fläche durch Ordinaten in eine gerade Anzahl von Streifen mit gleicher Breite h, z. B. in Fig. 93 in 2 Streifen. Die Ordinaten sind y_0, y_1, y_2. Wir verbinden A mit G und ziehen durch E eine Parallele zu $A\,G$.



Eig. 93.

Bei der Simpsonschen Regel wird angenommen, daß der Bogen $A\,G$ ein Parabelbogen sei. Dann ist der Inhalt des Segmentes $A\,E\,G = {}^2/_3$ vom umschließenden Parallelogramm. Dieses Parallelogramm hat die Höhe $2\,h$ und seine Grundlinie $\triangle\,y$ ist die Differenz von y_1 und der Mittellinie des Trapezes $A\,B\,F\,G$.

$$\triangle\,y = y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2} = \frac{2\,y_1 - y_0 - y_2}{2}$$

Das Parallelogramm hat also den Inhalt $2\,h \cdot \triangle\,y$.

$$\text{Parabelsegment} = \frac{2}{3}\,2\,h \cdot \triangle\,y = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot h\,\frac{2\,y_1 - y_0 - y_2}{2}$$

$$= \frac{h}{3}\,(4\,y_1 - 2\,y_0 - 2\,y_2).$$

Hierzu kommt noch das Trapez:

$$A\,B\,F\,G = 2\,h\,\frac{y_0 + y_2}{2} = \frac{h}{3}\,(3\,y_0 + 3\,y_2)$$

Als Summe von Parabelsegment und Trapez erhält man die Fläche $F_1 = \frac{h}{3}\,(4\,y_1 - 2\,y_0 - 2\,y_2 + 3\,y_0 + 3\,y_2)$

$$F_1 = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$$

Diese Formel gilt auch für Flächen, welche oben und unten durch Kurven begrenzt sind, z. B. F_1 in Fig. 94.

Ist nun die Fläche $A\,B\,C\,D$ (Fig. 94) zu ermitteln, so teilt man sie in eine gerade Anzahl von Teilen von gleicher

Breite h. Die berechnete Fläche F_1 ist der erste Teil der gegebenen Fläche $ABCD$. Letztere ergibt sich als Summe der Teile:

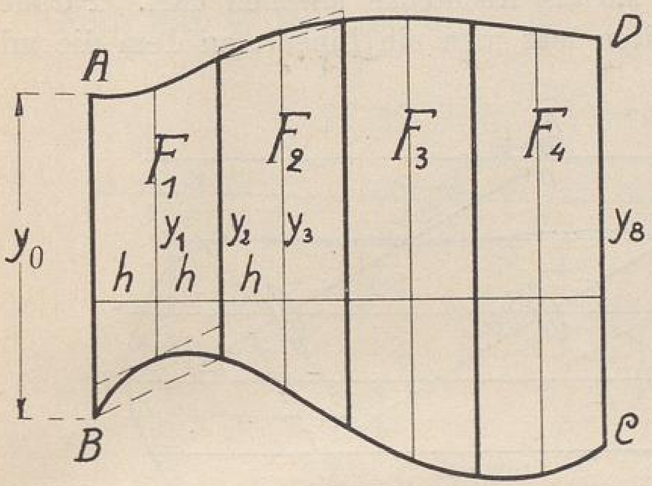


Fig. 94.

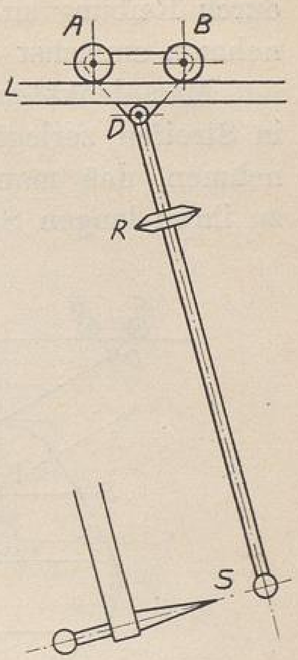


Fig. 95.

$$F_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$$

$$F_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4\,y_3 + y_4)$$

$$F_3 = \frac{h}{3}(y_4 + 4\,y_5 + y_6)$$

$$F = \frac{h}{3}(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + 2\,y_4 + 4\,y_5 + y_6).$$

Diese Formel liefert größere Genauigkeit als die Trapezregel, weil sich die Parabel besser als die Gerade an eine Kurve anschmiegt.

c) Der Integrator (Fig. 95). Den Inhalt einer beliebig begrenzten Fläche kann man auch ohne Rechnung durch Ausmessen mit dem Integrator finden. An einem um D drehbaren Arm sitzt eine Spitze S und zugleich eine Rolle R, welche beide auf dem Papier aufliegen. Umfährt man mit der Spitze S die Umrisse der gegebenen Fläche, so wird die Rolle durch Reibung auf dem Papier in Umdrehung versetzt. Wir nehmen zunächst an, die Rolle befände sich an der Spitze S.

Man denkt sich jetzt die gegebene Fläche durch Parallelen in Streifen zerlegt (Fig. 96); diese kann man so schmal annehmen, daß man sie als Rechtecke ansehen darf. Parallel zu ihren langen Seiten legt man ein Lineal, an dem die mit

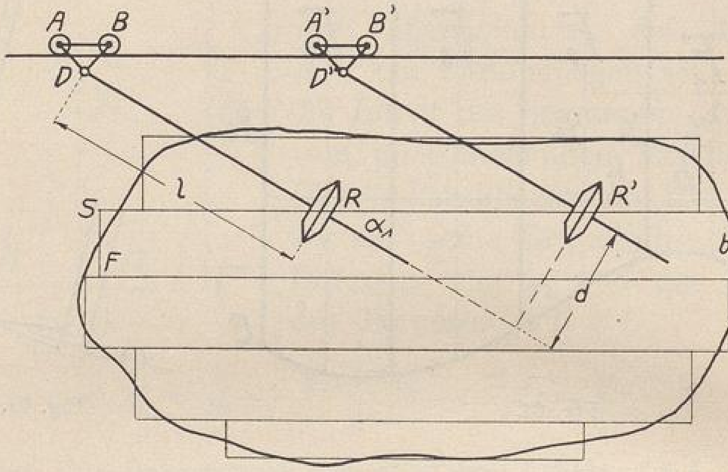


Fig. 96.

dem Drehpunkt D fest verbundenen Rollen A und B entlangrollen. Fährt man mit der Rolle über eine Seite, z. B. von R bis R', so können wir uns diese Bewegung der Rolle zusammengesetzt denken aus einem Schieben der Rolle längs ihrer Achse und einem Drehen der Rolle senkrecht hierzu um ihre Achse (Fig. 96). Also ist die Drehung auf dem Wege $R\,R'$

$$d = R\,R' \cdot \sin \alpha_1 .$$

Die Drehung ist also proportional dem Sinus des Winkels zwischen dem Arm und der durchlaufenen Strecke.

Befindet sich die Rolle nun nicht an der Spitze S, sondern bei R (Fig. 95), so führt sie bei ihrer Drehung sowohl wie bei ihrer Schiebung dieselben Bewegungen aus wie die Spitze S, was man sich in Fig. 96 leicht hineinzeichnen kann.

Beim Durchlaufen der Seite $ST = a$ (Fig. 97) beträgt die Drehung also $+ a \cdot \sin \alpha_1$.
Beim Zurücklaufen auf der unteren Seite NF beträgt die Drehung $- a \cdot \sin \alpha_2$.

Nach Fig. 97 ist: $\sin \alpha_1 = \frac{r}{l}$

$$\sin \alpha_2 = \frac{r + b}{l}$$

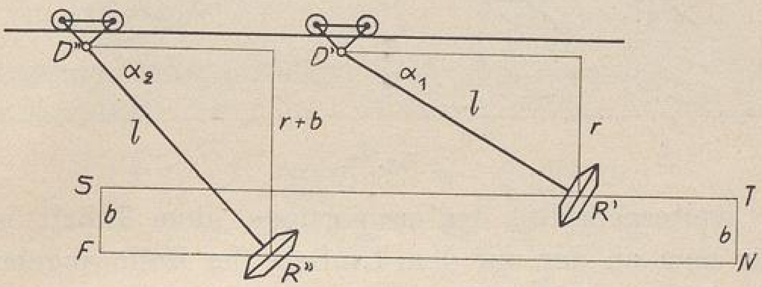


Fig. 97.

Die Drehung beim Durchlaufen der oberen **und** unteren Seite beträgt also:

$$a \frac{r}{l} - a \frac{r + b}{l} = \frac{a}{l} (r - r - b) = - \frac{ab}{l}$$

Diese Drehung der Rolle ist also proportional dem Inhalt ab.

Es bleibt noch das Durchfahren der Abstände links (SF) und rechts (TN). Denkt man sich diese in unendlich viele kleine Teile zerlegt, so werden entsprechende Stücke links und rechts in entgegengesetztem Sinne und unter demselben Winkel durchlaufen. **Die Drehungen** auf beiden Rechtecksseiten b **heben sich also auf**, auch wenn die Rolle R sich nicht an der Spitze befindet.

Die Gesamtdrehung beim Umfahren des **ganzen** Rechteckes bleibt also $- \frac{ab}{l}$, also proportional dem Inhalt.

Umfährt man nun das folgende, z. B. in Fig. 96 unter $SFNT$ liegende Rechteck, so heben sich die **Drehungen auf dem gemeinsamen Stück der Seite** FN auf.

Statt also sämtliche Rechtecke einzeln zu umfahren, braucht man nur ihren Gesamtumriß, d. h. den Umriß der gegebenen Fläche, zu umfahren. Die Rolle hat sich hierbei um einen

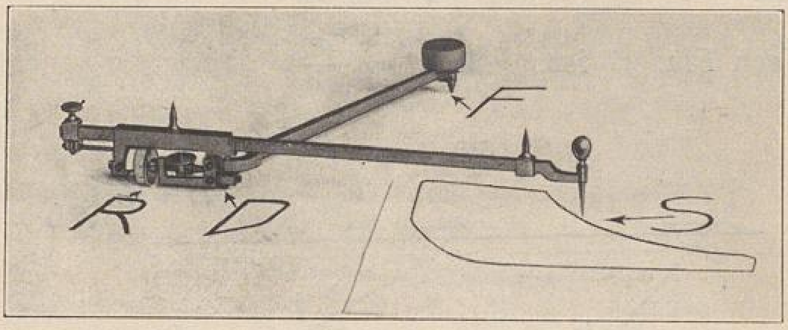


Fig. 98.

Betrag weitergedreht, der proportional dem Inhalt ist und welchen man an der auf dem Umfang der Rolle angebrachten Teilung abliest. Die Teilung ist so gewählt, daß man direkt den Inhalt zahlenmäßig erhält.

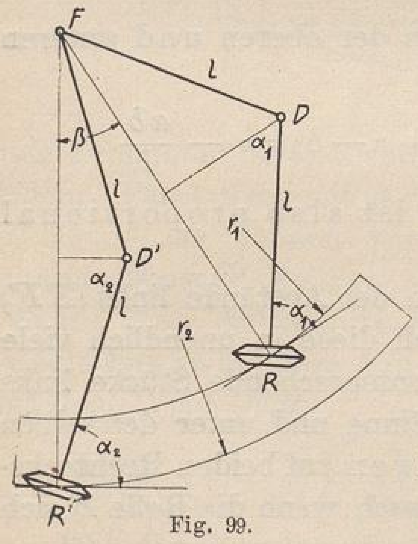


Fig. 99.

d) Polarplanimeter. Gebräuchlicher als dieser Integrator ist das Polarplanimeter (Fig. 98 und 99). Es unterscheidet sich vom vorherigen dadurch, daß die Punkte A und B (Fig. 95 und 96) zu einem vereinigt sind, der einen festen Drehpunkt F bildet.

Wir denken uns die gegebene Fläche durch konzentrische Kreise in Ringe zerlegt und stecken die feste Nadel F des Planimeters in ihren Mittelpunkt.

Auch hier können wir uns die Bewegung der Rolle über ein Stück der Kreise aus einem Schieben der Rolle längs ihrer Achse und einem Drehen senkrecht hierzu um ihre Achse zusammengesetzt denken. Die Drehung ist hierbei wie oben proportional dem Sinus des Winkels zwischen Arm und der durchlaufenen Strecke, d. h. hier zwischen Arm und Tangente an dem Bogen.

Die Drehung der Rolle (Fig. 99) beim Bewegen über den Bogen $\widehat{r_1 \cdot \beta}$ des inneren Kreises ist demnach $+ \widehat{r_1 \cdot \beta} \cdot \sin \alpha_1$ und beim äußeren Kreis $- \widehat{r_2 \cdot \beta} \cdot \sin \alpha_2$.

Nun ist aber in den gleichschenkligen Dreiecken FDR und $FD'R'$:

$$\left.\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \frac{r_1}{2} : l \\ \sin \alpha_2 &= \frac{r_2}{2} : l \end{aligned}\right\}$$ Diese Werte werden eingesetzt und

die Drehung beim Bewegen über den inneren und äußeren Bogen ist also:

$$+ \widehat{r_1 \cdot \beta} \cdot \sin \alpha_1 - \widehat{r_2 \cdot \beta} \cdot \sin \alpha_2 =$$

$$+ \frac{r_1 \cdot \widehat{r_1 \cdot \beta}}{2\,l} - \frac{r_2 \cdot \widehat{r_2 \cdot \beta}}{2\,l} =$$

$$\frac{1}{l}\left(\frac{r_1 \cdot \widehat{r_1 \cdot \beta}}{2} - \frac{r_2 \cdot \widehat{r_2 \cdot \beta}}{2}\right)$$

Der Ausdruck $\frac{r_1 \cdot \widehat{r_1 \cdot \beta}}{2}$, oder $\frac{1}{2} \times$ Radius $\times$ Bogen ist aber der Inhalt eines Sektors, dasselbe gilt von $\frac{r_2 \cdot \widehat{r_2 \cdot \beta}}{2}$.

Also ist die Drehung $= \frac{1}{l} \times$ Differenz der Sektoren,

$= \frac{1}{l} \times$ Inhalt des Ringes.

Diese Drehung ist also proportional dem Inhalt des Ringes.

Die Drehung beim Überfahren der Abstände der Kreise hebt sich wie oben auf.

Ebenso braucht man nicht jeden Ring zu umfahren, sondern nur den gesamten Umriß der Ringe, d. h. den Umriß der gegebenen Fläche. Die Gesamtdrehung der Rolle ist also auch hier proportional dem Inhalt der ganzen Fläche. Man liest diesen Inhalt an der Teilung auf dem Umfang der Rolle ab. Wegen der einfacheren Handhabung wird in der Praxis das Polarplanimeter dem Integrator vorgezogen.

Allgemeine Ableitung der Berührungsgrößen.

Es sei der Punkt P_1 einer beliebigen Kurve (Fig. 100) mit den Koordinaten x_1 und y_1 gegeben. Dann sei t die Länge der Tangente und n die Länge der Normalen zwischen dem Berührungspunkt P_1 und der X-Achse; t' und n' seien die entsprechenden Projektionen von t und n auf die X-Achse.

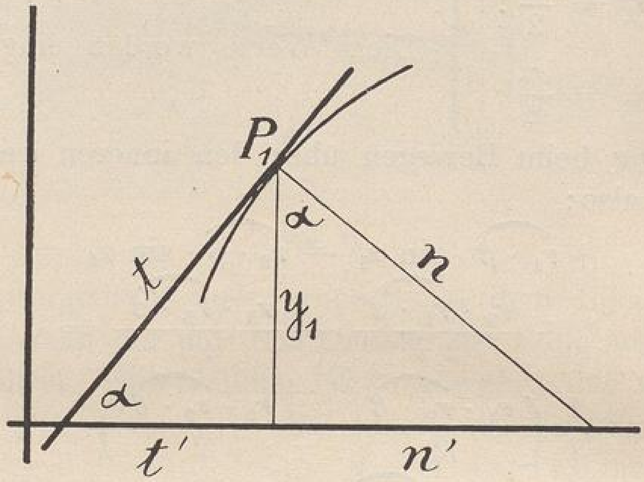


Fig. 100.

Letztere seien zuerst berechnet:[1])

Die Subnormale $n' = y_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = y_1 \cdot y'$

Die Subtangente $t' = \dfrac{y_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \dfrac{y_1}{y'}$

Hieraus ergibt sich:

Die Normale

$$n = \sqrt{n'^2 + y_1^2} = \sqrt{y_1^2 y'^2 + y_1^2} = y_1 \sqrt{1 + y'^2}$$

Die Tangente

$$t = \sqrt{t'^2 + y_1^2} = \sqrt{\left(\frac{y_1}{y'}\right)^2 + y_1^2} = y_1 \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}$$

Diese Formeln gelten für jede Kurve, deren Gleichung bekannt ist.

---

[1]) Anm.: Statt $\dfrac{dy}{dx}$ schreibt man kurz y'.

1. Anwendung auf die Parabel. Man berechnet den Differentialquotienten y' der Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2\,p\,x$$

aus und setzt ihn in obige Formeln ein. Es ergibt sich, daß

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

ist. Die Steigung beim Berührungspunkt P_1 ist also $\frac{p}{y_1}$. Setzt man dies ein und $y_1^2 = 2\,p\,x_1$, so erhält man:

$$\text{Subnormale } n' = y_1 \frac{p}{y_1} = p$$

$$\text{Subtangente } t' = \frac{y_1\,y_1}{p} = \frac{y_1^2}{p} = \frac{2\,p\,x_1}{p} = 2\,x_1$$

Normale

$$n = y_1 \sqrt{1 + \frac{p^2}{y_1^2}} = \frac{y_1}{y_1} \sqrt{y_1^2 + p^2} = \sqrt{y_1^2 + p^2}$$

Tangente

$$= y_1 \sqrt{1 + \frac{y_1^2}{p^2}} = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^4}{p^2}} = \sqrt{y_1^2 + \frac{4\,p^2\,x_1^2}{p^2}} = \sqrt{y_1^2 + 4\,x_1^2}$$

2. Anwendung auf die Ellipse. Der Differentialquotient der Ellipsengleichung ist nach Gleichung (22):

$$y' = -\frac{x\,b^2}{y\,a^2}$$

Die Steigung am Berührungspunkt P_1 ist also: $-\frac{x_1\,b^2}{y_1\,a^2}$

und wird in obige Formeln eingesetzt unter Fortlassung des Vorzeichens, weil nur die absolute Länge in Betracht kommt.

$$\text{Subnormale } n' = y_1 \frac{x_1\,b^2}{y_1\,a^2} = \frac{x_1\,b^2}{a^2}.$$

$$\text{Subtangente } t' = y_1 \frac{y_1\,a^2}{x_1\,b^2} = \frac{y_1^2\,a^2}{x_1\,b^2} = \frac{a^2\,b^2 - x_1^2\,b^2}{x_1\,b^2} = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$$

$$\text{Normale } n = y_1 \sqrt{1 + \frac{x_1^2\,b^4}{y_1^2\,a^4}}$$

$$\text{Tangente } t = y_1 \sqrt{1 + \frac{y_1^2\,a^4}{x_1^2\,b^4}}$$

3. Anwendung auf die Hyperbel. Der Differentialquotient der Gleichung der Hyperbel unterscheidet sich von dem der Ellipse nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen. Da auch hier das Vorzeichen ohne Belang ist, so stimmen die Formeln mit denen der Ellipse überein.

Sämtliche Formeln, die wir unter 1, 2, 3 für die Berührungsgrößen der Kegelschnitte erhalten haben, sind dieselben wie die früher auf Seite 41, 55 und 63 abgeleiteten.

Übung: 1. Man berechne die Subtangente der gleichseitigen Hyperbel $x\,y = C$.

2. Welche Konstruktion von Tangenten ergibt sich hieraus?

3. Man berechne die Subtangenten der höheren Parabeln $y^r = q\,x$.

Die Krümmung.

Legt man an eine Kurve, z. B. an eine Ellipse, Fig. 101, eine Tangente, so kann man durch ihren Berührungspunkt unendlich viele Kreise zeichnen, welche dieselbe Tangente berühren. Ellipse und Kreise haben hier dieselbe Steigung, also auch denselben ersten Differentialquotienten.

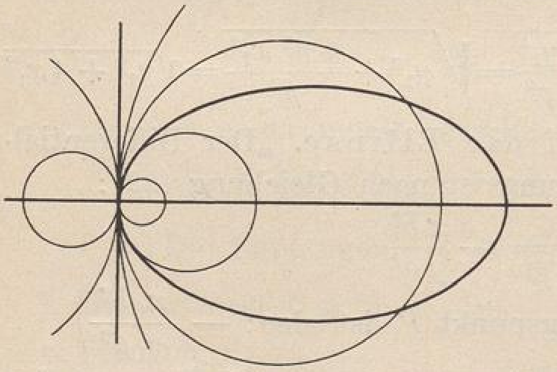


Fig. 101.

Da nun eine Tangente durch Drehung einer Sehne entstanden ist, so hat sie mit der berührten Kurve zwei im Berührungspunkt zusammenfallende Punkte gemeinsam. Alle in Fig. 101 gezeichneten Kurven haben eine Tangente und demnach zwei im Berührungspunkt zusammenfallende Punkte gemeinsam, sie berühren sich.

Unter den gezeichneten Kreisen schmiegen sich viele am Berührungspunkt der Ellipse durchaus nicht an; die linksliegenden krümmen sich sogar nach der entgegengesetzten Seite, obwohl sie zwei zusammenfallende Punkte mit der Ellipse gemeinsam haben.

Schon der Augenschein lehrt, daß unter den vielen möglichen Kreisen einer sein wird, der sich der Krümmung der Ellipse im Berührungspunkt besonders gut anschmiegen wird, also wohl mehr als zwei, vielleicht drei zusammenfallende Punkte mit der Ellipse gemeinsam haben wird. Ein solcher Kreis heißt Krümmungskreis, sein Radius Krümmungsradius. Seine Beziehungen zur Kurve sollen untersucht werden.

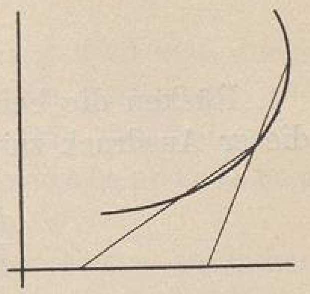


Fig. 102.

Während wir früher eine Sehne drehten, bis ihre beiden Schnittpunkte zusammenfielen und sie zur Tangente wurde, wollen wir jetzt zwei benachbarte Sehnen nehmen (Fig. 102). Sie haben einen Schnittpunkt gemeinsam und werden so lange gedreht, bis auch die beiden anderen Schnittpunkte mit diesem zusammenfallen und aus den zwei Sehnen zwei unmittelbar benachbarte Tangenten werden, die mit der Kurve drei zusammenfallende Punkte gemeinsam haben.

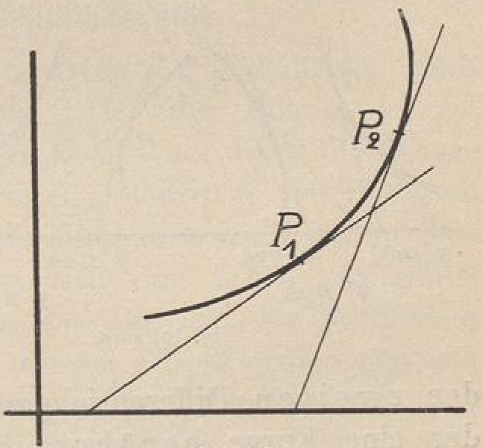


Fig. 103.

Der Krümmungskreis einer Kurve hat mit ihr drei Punkte und demnach zwei auf einander folgende Tangenten gemeinsam.

Um dies besser überschauen zu können, sind in Fig. 103 zwei solche unmittelbar nebeneinander liegende Tangenten angedeutet. Je mehr die Steigung der beiden Tangenten von einander abweicht, desto stärker ist auch die Krümmung der Kurve an dieser Stelle.

Die Steigung der Tangente ist dieselbe wie die der Kurve an der betreffenden Stelle, ist also gleich dem Differentialquotienten y' der Kurvengleichung an der Stelle P_1 bezw.

P_2; dieser sei mit y'_1 bezw. y'_2 bezeichnet. Der Unterschied der Steigung der Tangenten ist also:

$$y'_2 - y'_1 = \Delta y'$$

Wir bestimmeu das Verhältnis dieses Unterschiedes $\Delta y'$ zu Δx und erhalten:

$$\frac{y'_2 - y'_1}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x}$$

Rücken die beiden Punkte P_1 und P_2 zusammen, so wird dieser Ausdruck zum zweiten Differentialquotienten [1]):

$$\frac{d(y')}{d x} = \frac{d \frac{d y}{d x}}{d x} = \frac{d(dy)}{(d x)^2}$$

Obigen Ausdruck schreibt man nun der Kürze halber:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} \text{ oder } y''$$

Da Krümmungskreis und Kurve zwei benachbarte Tangenten gemeinsam haben, so nimmt die Steigung der Tangenten für beide Kurven um denselben Betrag, nämlich um den des zweiten Differentialquotienten zu. Der Krümmungskreis einer Kurve hat mit ihr also nicht nur den ersten, sondern auch den zweiten Differentialquotienten gemeinsam. Ein Kreis, der eine Kurve berührt, hat mit ihr nur den ersten Differentialquotienten gemeinsam.

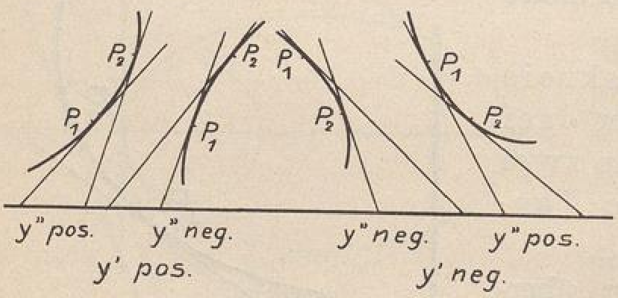


Fig. 104 $a-d$.

Ist $y'_2 > y'_1$, so ist y'' positiv, und die Kurve ist von oben betrachtet hohl (konkav). (Fig. 104 a und d.)

Ist $y'_2 < y'_1$, so ist y'' negativ und die Kurve von oben betrachtet gewölbt (konvex). (Fig. 104 b und c.)

---

[1]) Elemente d. Differential- u. Integralrechnung v. Düsing, S. 30.

Ist $y_2' = y_1'$, so ist $y'' =$ Null, und die Kurve schmiegt sich an dieser Stelle in drei zusammenfallenden Punkten an die Tangente an. War y'' auf der einen Seite des Berührungspunktes positiv, auf der anderen negativ, so wechselt die Kurve hierbei ihre Krümmung. Einen solchen Punkt nennt man Wendepunkt.

Die Art und das Maß der Krümmung wird also durch den zweiten Differentialquotienten bestimmt. Die Art und das Maß der Steigung wird, wie wir früher gesehen haben, durch den ersten Differentialquotienten bestimmt.

Hat man einen Extremwert bei einer Kurve gefunden, indem man $y' = 0$ setzte und hieraus das x des Extremwertes berechnete, so kann man für diesen Punkt y'' berechnen und sieht hieraus, ob die Kurve an dieser Stelle gewölbt oder hohl ist, ob hier also ein Maximum (y'' negativ) oder ein Minimum (y'' positiv) gefunden wurde.

Lage der Krümmungskreise.

Um sich die verschiedenen Arten der Berührung eines Kreises und eines Kegelschnittes, z. B. einer Ellipse, klarzumachen, legt man zunächst einen Kreis quer durch die Ellipse (Fig. 105 *A*). Er schneidet sie im allgemeinen in vier Punkten.

Dann schiebt man den Kreis allmählich nach unten. Die Schnittpunkte *I* und *II* nähern sich und fallen schließlich zusammen (Fig. *B*). Der Kreis hat also bei der Berührung zwei zusammenfallende Punkte mit der Ellipse gemeinsam und schneidet die Ellipse noch in zwei andern Punkten.

Läßt man den Kreis allmählich wachsen, so fällt schließlich auch Punkt *III* in den Berührungspunkt *I II*. Wir haben also eine Berührung mit drei zusammenfallenden Punkten; der Kreis ist ein Krümmungskreis (Fig. *C*).

Schiebt man den Kreis von Fig. *A* nach links, so nähern sich die Punkte *I* und *IV*. Liegt nun der Mittelpunkt des Kreises auf der *X*-Achse, so fallen schließlich Punkt *I* und *IV* auf der *X*-Achse zusammen (Fig. *D*).

Läßt man diesen Kreis jetzt kleiner werden, so nähern sich auch *II* und *III* dem Scheitel und fallen schließlich mit ihm zusammen (Fig. *E*). Hier haben Kreis und Ellipse vier zusammenfallende Punkte gemeinsam. Einen solchen Krümmungskreis nennen wir „Hauptkrümmungskreis".

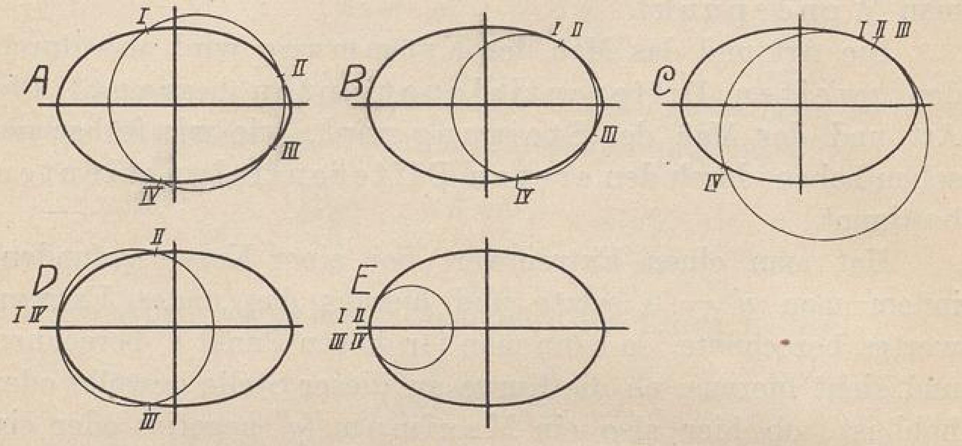


Fig. 105 (*A*—*E*).

Aus Fig. *D* und *E* geht hervor, daß die vier Schnittpunkte nur dann zusammenfallen können, wenn sie sich symmetrisch nähern, d. h. wenn der Mittelpunkt auf der Achse liegt. Hauptkrümmungskreise können also nur an den vier Scheiteln der Ellipse liegen. Bei der Parabel und jedem Hyperbelast gibt es nur einen Hauptkrümmungskreis.

Berechnung der Hauptkrümmungskreise der Kegelschnitte.

Diejenigen Krümmungskreise, welche die Kegelschnitte an einem Scheitel berühren, sind wie gesagt die Hauptkrümmungskreise. Ihr Radius kann auf folgende einfache Weise berechnet werden:

1. Bei der Parabel: Der Scheitel ist beiden Kurven gemeinsam, seine Koordinaten müssen also sowohl die Gleichung der Parabel wie die Scheitelgleichung des Krümmungskreises erfüllen. Erstere lautet:

$$y^2 = 2\,p\,x$$

Letztere (Gleichung 11): $y^2 = 2\,r\,x - x^2$

Folglich gilt für den Scheitelpunkt $x_1 y_1$:

$$2\,p\,x_1 = 2\,r\,x_1 - x_1^2$$

$$2\,p = 2\,r - x_1$$

Da nun für den Scheitel $x_1 = 0$ ist, so ist

$$\boldsymbol{r = p.}$$

Der Radius des Hauptkrümmungskreises einer Parabel ist also gleich dem halben Parameter und gleich der Ordinate im Brennpunkt (Fig. 106).

2. Bei der Ellipse: Ihre Scheitelgleichung (Gleichung 24) lautet:

$$y^2 = \frac{2\,b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2$$

Die Scheitelgleichung des Kreises:

$$y^2 = 2\,r\,x - x^2$$

Die Koordinaten $x_1 y_1$ des Scheitelpunkts erfüllen beide Gleichungen:

$$\frac{2\,b^2}{a}\,x_1 - \frac{b^2}{a^2}\,x_1^2 = 2\,r\,x_1 - x_1^2$$

$$\frac{2\,b^2}{a} - \frac{b^2}{a^2}\,x_1 = 2\,r - x_1$$

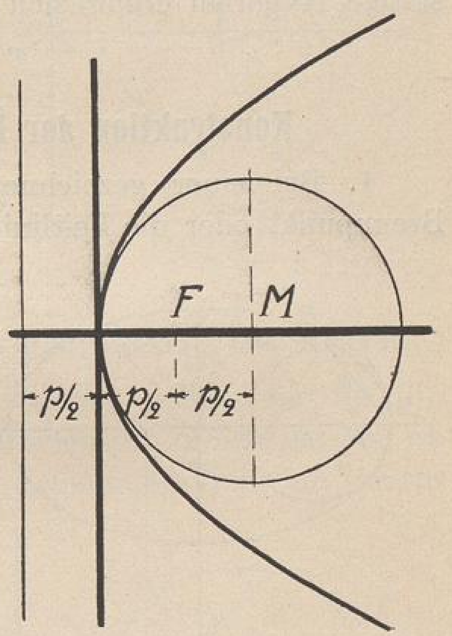


Fig. 106.

Da nun $x_1 = 0$ ist, so ergibt sich

$$\frac{2\,b^2}{a} = 2\,r$$

$$\boldsymbol{r = \frac{b^2}{a} = p}$$

Auch hier ist der Radius des Hauptkrümmungskreises gleich der Ordinate im Brennpunkt. Rechnet man auf ähnliche Weise den Radius des oberen Hauptkrümmungskreises aus, so erhält man

$$\boldsymbol{r = \frac{a^2}{b}}$$

3. Bei der Hyperbel. Die Rechnung wird ebenso durchgeführt wie bei der Ellipse und liefert dasselbe Resultat:

$$r = \frac{b^2}{a}$$

Auch hier erhalten wir also einen Radius, der ebenso groß ist wie die Ordinate im Brennpunkt.

4. Hauptkrümmungskreise der gleichseitigen Kegelschnitte. Sowohl für den Kreis wie für die gleichseitige Hyperbel ergibt sich:

$$r = a.$$

Konstruktion der Hauptkrümmungskreise.

1. Bei einer gezeichneten Parabel ist p durch den Brennpunkt oder die Leitlinie gegeben; gegebenen Falls kann man p auch als Subnormale finden.

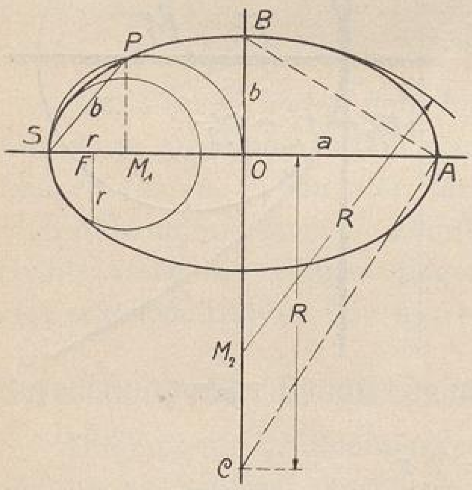


Fig. 107.

2. Bei der Ellipse: Man schlägt über $S\,O$ einen Halbkreis (Fig. 107) und mit b als Radius einen Kreis um S; beide schneiden sich in P. Dann ist die Projektion $S\,M_1$ von der Strecke $S\,P$ oder b auf die große Achse gleich dem gesuchten Radius r des Hauptkrümmungskreises. Es ist nämlich

$$b^2 = S\,P^2 = r\,a, \text{ also } r = \frac{b^2}{a}$$

Sucht man den oberen Hauptkrümmungskreis, so verbindet man die Endpunkte von b und a, nämlich B und A, miteinander und errichtet in A auf $A\,B$ ein Lot, welches auf der unteren Hälfte der Y-Achse eine Strecke abschneidet, die gleich dem gesuchten Radius R des Hauptkrümmungskreises ist. Hier ist nämlich

$$a^2 = b \cdot R, \text{ also } R = \frac{a^2}{b}$$

3. Bei der H y p e r b e l: Man errichtet auf der Asymptote (Fig. 108) im Schnittpunkt mit b, nämlich in B, ein Lot. Dann ist die Projektion dieses Lotes auf die X-Achse der gesuchte Radius r. Es ist nämlich

$$b^2 = a \cdot r, \text{ also } r = \frac{b^2}{a}$$

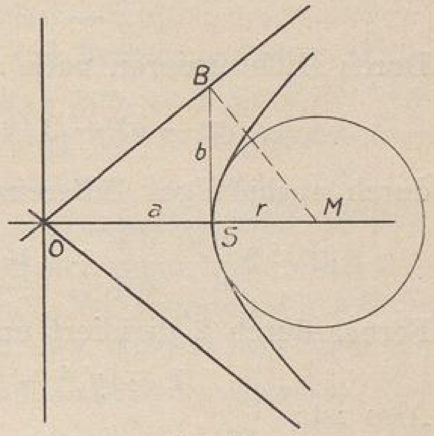


Fig. 108.

Bei allen drei Kegelschnitten kann man auch im Brennpunkt eine Ordinate errichten. Diese ist gleich dem gesuchten Radius des Hauptkrümmungskreises.

Allgemeine Ableitung der Krümmungskreise von Kurven.

Obige Formeln und Konstruktionen gelten nur für die Hauptkrümmungskreise der Kegelschnitte. Diese liegen an den Scheiteln. Will man den Krümmungskreis an einem anderen Punkt der Kegelschnitte oder für irgendeine andere Kurve berechnen, so bedarf man einer allgemeinen Formel, die jetzt abgeleitet werden soll.

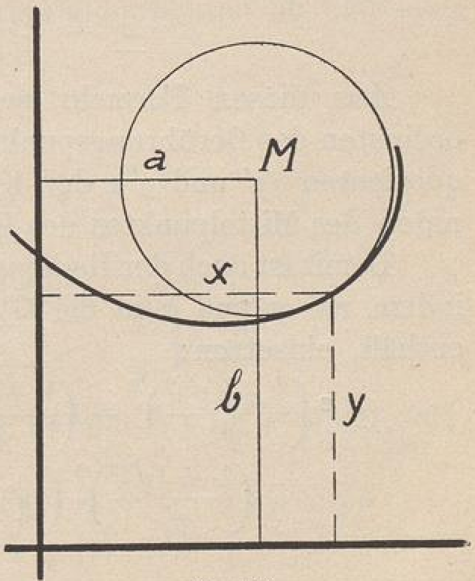


Fig. 109.

Der gesuchte Kreis hat an der Berührungsstelle denselben ersten (y') und zweiten Differentialquotienten (y'') wie die Kurve. Wenn die Gleichung der Kurve gegeben ist, so kann man ihre Differentialquotienten berechnen. Setzt man diese in die allgemeine Gleichung des Kreises ein, so läßt sich aus der erhaltenen Gleichung die Lage des Kreises, also die Länge von a und b der Figur 109 berechnen.

Angenommen, der Kreis um M sei der Krümmungskreis für Punkt (x, y) einer Kurve, so ist seine Gleichung:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Durch Differenzieren nach x erhält man:

$$2\,(x - a) + 2\,(y - b)\,\frac{dy}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

durch nochmaliges Differenzieren bekommt man:

$$2 + 2\,\frac{dy}{dx}\,\frac{dy}{dx} + 2\,(y - b)\,\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Ferner durch 2 dividiert und kurz geschrieben gibt:

$$1 + (y')^2 + y\,y'' - b\,y'' = 0$$

Also ist:

$$\underline{b} = \frac{1 + (y')^2 + y\,y''}{y''} = y + \frac{1 + (y')^2}{y''} \quad \ldots \quad \text{(III)}$$

Setzt man b in die obige Gleichung (II) des ersten Differentialquotienten ein, so läßt sich hieraus auch a berechnen:

$$x - a + y\,y' - y'\,\frac{1 + (y')^2}{y''} - y\,y' = 0$$

Also ist:

$$\underline{a} = x - y'\,\frac{1 + (y')^2}{y''} \quad \ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

Aus diesen Formeln geht hervor, daß durch die Koordinaten des Berührungspunktes (x und y) und die Differentialquotienten (y' und y'') der Kurve die Lage d. h. die Koordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises bestimmt sind.

Damit ist auch der Radius r des Krümmungskreises gegeben, indem wir a und b in die Gleichung (I) des Kreises, die ja r enthält, einsetzen:

$$(y')^2 \left(\frac{1 + (y')^2}{y''}\right)^2 + \left(\frac{1 + (y')^2}{y''}\right)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{1 + (y')^2}{y''}\right)^2 \left((y')^2 + 1\right) = r^2$$

$$\underline{r^2} = \frac{(1 + (y')^2)^3}{(y'')^2} \quad \ldots \quad \text{(V)}$$

Hiermit ist also der Radius des Krümmungskreises einer beliebigen Kurve in einem beliebigen Punkte bestimmt.

Bemerkung: Da $r = \pm \frac{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}}{y''}$

ist, so wechselt das Vorzeichen von r mit demjenigen von y''. Wir hatten früher gesehen, daß bei Zunahme der Steigung der Kurve y'' positiv und die Kurve von oben gesehen hohl ist (Fig. 104 a und d). Alsdann liegt der Krümmungsmittelpunkt oberhalb, und der Krümmungsradius sei dann positiv. — Wird die Kurve flacher, so wächst der Krümmungsradius schließlich ins Unendliche. Dies ist der Fall, wenn z. B. die Kurve zu einer Geraden wird oder bei einem Wendepunkt der Kurve; y'' ist hier gleich Null. — Wird die Kurve von oben gesehen gewölbt, so wird der Krümmungsradius negativ. Der Krümmungsmittelpunkt kommt gleichzeitig aus dem Unendlichen auf der negativen Seite zurück ins Endliche, der zweite Differentialquotient ist negativ (Fig. 104 b, c). — Wird die Krümmung der Kurve stärker, so wird der Krümmungsradius schließlich Null und es entsteht ein Punkt.

1. Anwendung auf die Parabel.

Man leitet die beiden Differentialquotienten ab und setzt sie in obige Formel (V) für r^2 ein.

Die Gleichung der Parabel ist: $y^2 = 2\,p\,x$

Der erste Differentialquotient:

$$y' = \frac{p}{y} = \frac{p}{\sqrt{2\,p\,x}} = \sqrt{\frac{p}{2\,x}}$$

Der zweite Differentialquotient:

$$y'' = -\sqrt{\frac{p}{2}}\,\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{2\,x^3}}$$

Diese Größen werden in die Formel (V) für r^2 eingesetzt:

$$r^2 = \frac{\left(1 + \frac{p}{2\,x}\right)^3}{\frac{p}{8\,x^3}} = \frac{(2\,x + p)^3\;8\,x^3}{8\,x^3\,p} = \frac{(2\,x + p)^3}{p}$$

Bemerkung: Die Dimension der Formel ist richtig. Zur weiteren Prüfung setzen wir $x = 0$, was am Scheitel der Parabel der Fall ist, und erhalten:

$$r^2 = \frac{p^3}{p} \text{ und } r = p.$$

Dies stimmt mit der früher (S. 123) gefundenen Formel für den Radius des Hauptkrümmungskreises überein.

2. Anwendung auf die Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse ist:

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$$

Man differenziert und erhält:

$$2 b^2 x + 2 a^2 y y' = 0$$

Also ist

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Man differenziert abermals:

$$2 b^2 + 2 a^2 (y')^2 + 2 a^2 y y'' = 0$$

Also ist

$$y'' = \frac{-b^2 - a^2 (y')^2}{a^2 y} = -\frac{b^2 a^2 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^3} =$$

$$-\frac{b^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2)}{a^4 y^3} = -\frac{a^2 b^4}{a^4 y^3} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

Die erhaltenen beiden Differentialquotienten werden in die Formel für r^2 eingesetzt:

$$r^2 = \frac{\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^3 a^4 y^6}{b^8} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3 a^4 y^6}{a^{12} y^6 b^8} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}{a^8 b^8}.$$

Bemerkung: Die Formel hat die richtige Dimension. Zur weiteren Prüfung setzen wir $x = a$ und $y = 0$. Dann wird:

$$r^2 = \frac{(b^4 a^2)^3}{a^8 b^8} = \frac{b^{12} a^6}{a^8 b^8} = \frac{b^4}{a^2}$$

Also ist $r = \frac{b^2}{a}$

Setzt man dagegen $x = 0$ und $y = b$, so erhält man

$$r = \frac{a^2}{b}.$$

Beide Resultate stimmen überein mit den Formeln für die Radien der Hauptkrümmungskreise der Ellipse.

3. Anwendung auf die Hyperbel.

Die Differentialquotienten sind dieselben wie bei der Ellipse, nur hat der erste das entgegengesetzte Vorzeichen. Da beide in der Formel für r^2 als Quadrate vorkommen, so erhält man dieselbe Formel für r^2 wie bei der Ellipse.

Aufgabe: 1. Bei einer Ellipse soll man den Radius desjenigen Krümmungskreises zahlenmäßig berechnen, dessen Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt, also etwa wie bei Fig. 105 *C*. Bei der Ellipse sei gegeben:

$$a = 9 \text{ und } b = 7 \text{ cm.}$$

Anleitung: Man berechnet das x und y des Berührungspunktes und setzt es ebenso wie das gegebene a und b in die Formel für den Krümmungsradius der Ellipse ein:

$$r^2 = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}{a^8 b^8}$$

Oder man berechnet aus x, y, a, b zuerst y' und y'' und setzt diese Größen in die allgemeine Formel (V) des Krümmungsradius ein:

$$r^2 = \frac{(1 + (y')^2)^3}{(y'')^2}$$

2. Die Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ und der Hauptkrümmungskreis sollen verglichen werden, und zwar sollen die Ordinaten in der halben Brennweite $\left(x_1 = \frac{p}{4}\right)$ für beide Kurven berechnet und verglichen werden.

Das Ergebnis wird zeigen, daß die Gestalt der Parabel in der Nähe des Scheitels sich nur wenig von der des Hauptkrümmungskreises unterscheidet. Daher nimmt man oft statt der parabolischen Spiegel kugelförmige, die sich leichter herstellen lassen. Doch dürfen sie im Vergleich zur Brennweite nicht zu groß sein. Der Brennpunkt liegt dann in der Mitte des Radius (Fig. 106).

3. Man untersuche die Krümmungen der Kegelschnitte. Hierbei wird man finden, daß y'' stets beide Vorzeichen hat, wenn es durch x ausgedrückt ist, weil zu jedem x eine gewölbte und eine hohle Stelle gehört. Drückt man aber y'' durch y aus, so hat es entweder das positive oder das negative Vorzeichen. Für negative y sind die Kurven von oben betrachtet hohl, für positive oberhalb der X-Achse sind sie dagegen gewölbt.

4. Man untersuche, ob die Kegelschnitte Wendepunkte haben.

5. Man bestimme für die Kurve

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$

Maximum, Minimum und Wendepunkt, ferner den Radius der Krümmungskreise an den Stellen des Maximums und Minimums, sowie die Koordinaten der Mittelpunkte dieser Krümmungskreise. [1])

6. Man führe dieselben Rechnungen für die Kurve mit folgender Gleichung aus:

$$y = 2\,x^3 + 5\,x^2 + 4\,x + 1$$

Andere Koordinatensysteme.

Unter besonderen Umständen ist es angebracht, andere Koordinaten als die rechtwinkligen zu gebrauchen.

Gebogene Koordinaten.

1. Bei vielen Registrierapparaten, z. B. bei einem selbstschreibenden Barometer, dreht sich eine Trommel von einem Uhrwerk getrieben langsam um ihre Achse. Auf sie ist

[1]) Weitere Beispiele über Minim., Maxim. u. Wendepunkte findet man: „Elem. d. Diff.- u. Integ.-Rechnung“ v. Düsing, 2. Aufl., S. 54—67.

ein Papierstreifen gewickelt, über den ein Stift fährt und den Barometerstand aufschreibt. Da der Stift aber an einem langen Hebelarm sitzt, der sich um einen Drehpunkt bewegt, so würde er bei stillstehender Trommel Kreisbögen auf das Papier schreiben. Die Ordinaten sind daher Kreislinien, deren Radius gleich der Hebellänge ist. Jede horizontale Linie entspricht einem bestimmten Barometerstand (Fig. 110); jeder Kreisbogen einer bestimmten Stunde. Auf dem Registrierpapier sind solche Kreislinien für jede zweite Stunde vor-

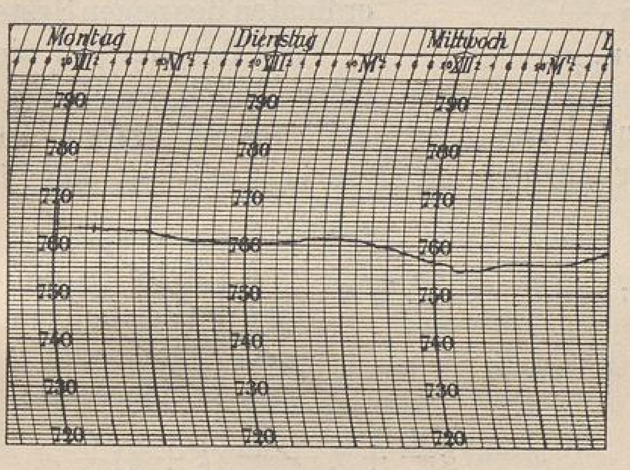


Fig. 110.

gezeichnet. Bei der Bewegung der Trommel zeichnet nun der Stift eine Kurve auf, welche den Verlauf des Barometerstandes angibt.

2. Auch die geographische Breite und Länge, die bekanntlich zur Bestimmung der Lage eines Ortes auf der Erde dient, mag als eine Art gebogener Koordinaten hier erwähnt werden. Die Messung geschieht wie bekannt nach Graden, Minuten und Sekunden.

Schiefwinklige Koordinaten.

Umformung: Die rechtwinkligen Koordinaten x und y eines Punktes sollen in die Koordinaten ξ und η eines Systems umgerechnet werden, dessen Achsen einen schiefen Winkel (hier $\beta - \alpha$) miteinander bilden (Fig. 111).

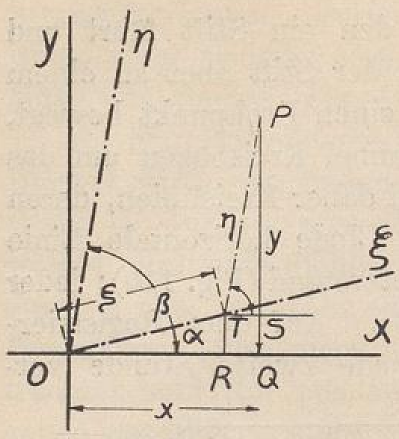


Fig. 111.

$$x = OQ = OR + QR = OR + ST,$$
$$x = \xi \cos \alpha + \eta \cos \beta,$$
$$\text{weil } \measuredangle PTS = \beta,$$
$$y = PQ = PS + SQ = PS + RT,$$
$$y = \eta \sin \beta + \xi \sin \alpha.$$

Diese Umrechnung wird in die gegebene Gleichung des Punktes oder der Linie eingesetzt, und man erhält eine Gleichung, die die Koordinaten des neuen Systems enthält.

Als Beispiel soll die Gleichung einer beliebigen Hyperbel in bezug auf ihre Asymptoten aufgestellt werden. Der Winkel der Asymptoten (Fig. 112) sei 2 φ, dann ist unser

$$\alpha = -\varphi \text{ und } \beta = +\varphi$$

Ferner ist: $\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= -\sin\beta = \frac{b}{e} \\ \cos\alpha &= \cos\beta = \frac{a}{e} \end{aligned}\right\}$ wird in die Gleichungen für x und y eingesetzt:

$$x = \xi \frac{a}{e} + \eta \frac{a}{e} = (\xi + \eta) \frac{a}{e}$$
$$y = \eta \frac{b}{e} - \xi \frac{b}{e} = (\eta - \xi) \frac{b}{e}$$

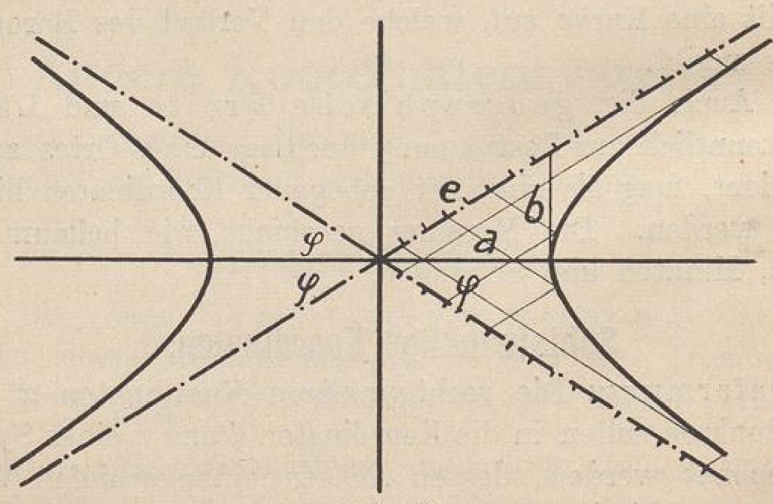


Fig. 112.

Eingesetzt in die Gleichung der Hyperbel

$$x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2 \text{ gibt:}$$

$$(\xi^2 + 2\,\xi\,\eta + \eta^2)\,\frac{a^2 b^2}{e^2} - (\eta^2 - 2\,\xi\,\eta + \xi^2)\,\frac{a^2 b^2}{e^2} = a^2 b^2$$

$$\xi^2 + 2\,\xi\,\eta + \eta^2 - \eta^2 + 2\,\xi\,\eta - \xi^2 = e^2$$

$$4\,\xi\,\eta = e^2$$

$$\xi\,\eta = \frac{e^2}{4}$$

Also ist auch hier das Produkt der Koordinaten eine Konstante. Für die gleichseitige Hyperbel ist $a = b$, also

$$e^2 = a^2 + a^2 = 2\,a^2.$$

Demnach $\xi\,\eta = \frac{a^2}{2}$, wie früher gefunden.

Polarkoordinaten.

Die Lage eines Punktes P in einer Ebene kann auch durch die Länge r der Verbindungslinie mit einem festen Punkte O und durch den Winkel φ bestimmt werden (Fig. 113), den diese Verbindungslinie mit einer festen Geraden OX bildet, die durch den Punkt O geht. Der Winkel wird wie beim Einheitskreis durch eine Drehung links herum, also von OX nach OP positiv gerechnet.

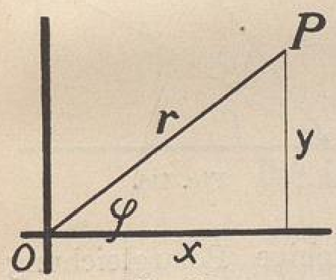


Fig. 113.

Die Länge r heißt Leitstrahl (Radius vector) und φ der Polarwinkel (Anomalie); beide heißen Polarkoordinaten. Der feste Punkt O heißt Pol und OX die Polarachse. Die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten hat also im allgemeinen die Form $r = f(\varphi)$ oder auch $\varphi = f(r)$. Die Polarkoordinaten werden unter anderem vorteilhaft verwendet bei der Aufstellung der Gleichungen von verschiedenen Spiralen.

Umwandlung: Die rechtwinkligen Koordinaten kann man in Polarkoordinaten umwandeln. Wie die Fig. 113 zeigt, ist nämlich:

$$x = r \cos\varphi \text{ und } y = r \sin\varphi.$$

Diese Formeln gelten, wenn der Anfangspunkt O beider Koordinatensysteme derselbe ist und die X-Achse des rechtwinkligen Systems mit OX zusammenfällt. Ist dies nicht der Fall, so muß das rechtwinklige Koordinatensystem entsprechend verschoben und gegebenenfalls auch gedreht werden.

Bei der Parabel z. B. sei der Brennpunkt F der Pol und die Achse der Parabel auch Achse des Systems. Dann ist (Fig. 114):

$$r = PM = LQ = LF + FQ = p + r \cos\varphi$$

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$$

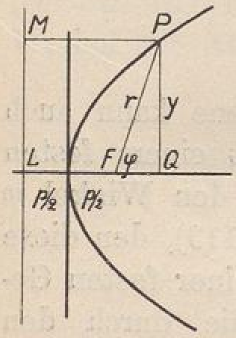


Fig. 114.

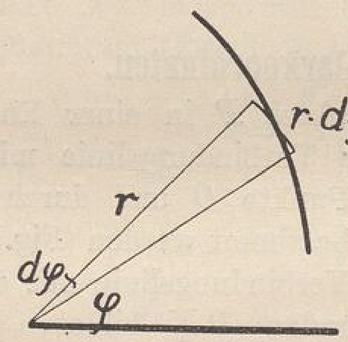


Fig. 115.

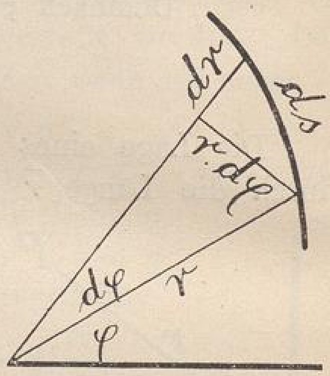


Fig. 116.

Rückwandlung: Soll eine beliebige Polargleichung wieder in eine Gleichung mit rechtwinkligen Koordinaten verwandelt werden (Fig. 113), so setzt man:

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Die Fläche, die von einer Kurve und zwei Leitstrahlen eingeschlossen wird, läßt sich auf folgende Weise berechnen (Fig. 115). Man denkt sich die Fläche durch benachbarte Leitstrahlen in unendlich schmale Dreiecke zerlegt. Jedes hat die Fläche

$$dF = \frac{r}{2} \cdot \widehat{r \cdot d\varphi}$$

Die ganze Fläche von φ_1 bis φ_2 ist also

$$F = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cdot d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(f(x)\right)^2 \cdot dx$$

Die Bogenlänge. Man zerlegt in derselben Weise Für das Bogenteilchen ds gilt dann (Fig. 116):

$$(ds)^2 = (r \cdot d\varphi)^2 + (dr)^2$$

$$ds = \sqrt{r^2 \cdot (d\varphi)^2 + (dr)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi$$

Die ganze Länge zwischen φ_1 und φ_2 bzw. zwischen r_1 und r_2 ist also:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi. = \frac{dr}{d\varphi}\sqrt{r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + 1} \cdot d\varphi$$

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + 1} \cdot dr$$

Die Logarithmische Spirale.

Man denkt sich von einem Punkte O aus Strahlen ge. zogen. Die logarithmische Spirale windet sich spiralig um den Punkt O und trifft jeden Strahl unter demselben Winkel (α) Ein Stück der Spirale hiervon ist in Fig. 117 gezeichnet.

In dieser Figur ist um O ein Kreis mit dem Radius 1 geschlagen. Auf seinem Umfang schneidet man einen Bogen AR ab, der so lang ist wie der Radius; es ist also $AR = 1$. Dann teile man AR in sehr viele gleiche Teile, z. B. n-Teile. Jeder Bogenteil ist also $= \frac{1}{n}$. Ferner legt man durch den Mittelpunkt O und jeden Teilpunkt einen Strahl. Endlich zieht man von A aus eine kurze Gerade, die den folgenden Strahl unter dem Winkel α trifft; auf diese Weise geht man geradlinig unter dem konstanten Winkel α von Strahl zu Strahl

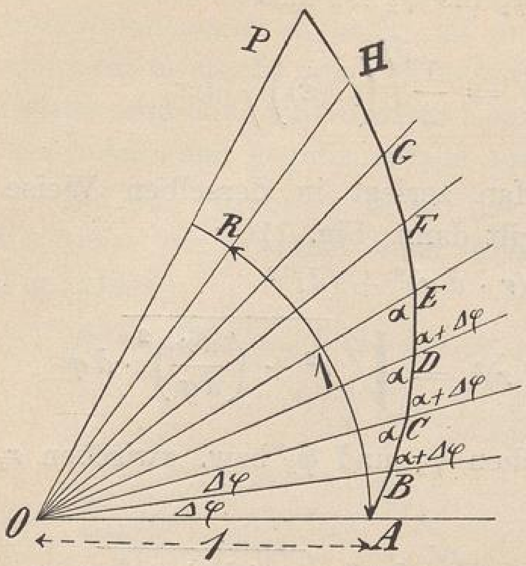


Fig. 117.

und trifft den Schenkel des Einheitswinkels $A\,O\,R$ in H und den Schenkel des beliebigen Winkels $A\,O\,P$ in P.

Die Teilwinkel haben alle die Größe:

$$\varDelta\,\varphi = \frac{1}{n}$$

Besteht der beliebige Winkel $A\,O\,P = \varphi$ aus p-Teilen, so beträgt er:

$$\varphi = \frac{p}{n}$$

Es soll untersucht werden, in welcher Weise die Strahlen r im Vergleich zu den Bogenlängen der Winkel φ wachsen [1]).

Die aufeinanderfolgenden Strahlen verhalten sich wie:

$$\frac{O\,B}{1} = \frac{O\,C}{O\,B} = \frac{O\,D}{O\,C} = \frac{O\,E}{O\,D} \,.\,. = \frac{\sin(\alpha + \varDelta\,\varphi)}{\sin\alpha} = c$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= O\,A = 1 \\
r_2 &= O\,B = 1 \cdot \frac{\sin(\alpha + \varDelta\,\varphi)}{\sin\alpha} = c \\
r_3 &= O\,C = O\,B \cdot c = c^2 \\
r_4 &= O\,D = O\,C \cdot c = c^3 \\
&\;\,.\,. \qquad\quad .\,. \qquad\quad .\,. \\
r_n &= O\,H \qquad\qquad = c^n \\
&\;\,.\,. \qquad\quad .\,. \qquad\quad .\,. \\
r &= O\,P \qquad\qquad = c^p
\end{aligned}$$

Setzt man nun den Strahl des Einheitswinkels:

$$O\,H = a$$

und demnach $\qquad a = c^n$

und $\qquad c = a^{\frac{1}{n}}$

[1]) Eine weitergehende Untersuchung findet sich: „Elemente der Differential- und Integralrechnung“ von Düsing, S. 67—71.

so erhält man: $\quad r = OP = a^{\frac{\;}{n}}$

d. h. $\quad \underline{r = a^{\varphi}}$

oder $\quad \underline{\underline{\varphi = \log_a r}}$

Dies ist die Gleichung der logarithmischen Spirale in Polarkoordinaten, denn für $n = \infty$ wird die bisher betrachtete gebrochene Linie zur Kurve. Die Bogen φ auf dem Einheitskreis sind die Logarithmen zur Basis a der zugehörigen Strahlen r.

Für $\varphi = 0$ wird $r = 1$.

Für $\varphi = -\infty$ wird $r = 0$. Also nähert sich die Kurve dem Punkte O immer mehr, ohne ihn zu erreichen, d. h. O ist ein asymptotischer Punkt.

Anwendung: Man gibt den Zähnen von Fräsern die Form einer logarithmischen Spirale, damit auch nach dem Schleifen des stumpf gewordenen Fräsers der Winkel zwischen Radius und Rücken der Schneide derselbe bleibt wie vorher. Bei Scheren mit bogenförmig geführtem Scherblatt macht man das feststehende Blatt geradlinig und krümmt das andere nach einer logarithmischen Spirale. Man erreicht hierdurch, daß der Winkel zwischen den schneidenden Kanten bei jeder Stellung derselbe ist; dieser Winkel muß kleiner gemacht werden als der Reibungswinkel, damit das unter der Schere befindliche Werkstück nicht von den Schneiden herausgeschoben wird.

Verzeichnis der Resultate.

Seite 5 Übung 1: 17 *cm*.

„ 5 „ 2: 5 *cm*.

„ 5 „ 3: 9,1 *cm*.

„ 5 „ 4: 20 *m*, 15 *m*, 9 *m*, 18 *m*, 8 *m*.

„ 5 „ 5: 2860 *m*, 406,3 *m*.

„ 5 Aufgabe 1: $\frac{x_1 + x_2}{2}$ und $\frac{y_1 + y_2}{2}$.

„ 5 „ 2: $\frac{1}{2}\left[(y_2 + y_1)(x_2 - x_1) - (y_3 + y_1)(x_3 - x_1) - (y_2 + y_3)(x_2 - x_3)\right]$. Multiplizieren und vereinigen.

„ 6 Übung 1: 21 *qcm*.

„ 6 „ 2: 404,3 *qm*.

„ 10 „ 1: $\alpha = 71^0$, $n = 5$; $\alpha = 116^0$, $n = -5$; $\alpha = 27^0$, $n = o$; $\alpha = 45^0$, $n = o$.

„ 10 Übung 2: $y = x + 3$.

„ 11 „ 3: $y = \sqrt{3}\,x + 5$.

„ 11 „ 4: Parallele zur X-Achse im Abstand von 8 *cm*.

„ 11 „ 5: a) Parallele zur X-Achse im Abstand von 7 *cm*. b) X-Achse; c) Y-Achse.

„ 11 „ 6: 45^0, 60^0, 30^0.

„ 11 „ 7: $\alpha = 124^0$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$; $n = b = 3$.

„ 11 „ 8: 1 : 6,7; 1 : 6,6; 1 : 3,3; 1 : 14; 1 : 36.

„ 11 „ 9: Gerade; $n = 30{,}6$; $M = 76{,}5 = 30$.

„ 13 „ 1: $\frac{5+3}{3-4} = \frac{3-y}{5-x}$.

„ 13 „ 2: $r^2 = (2+3)^2 + (-4-2)^2$; $r = 7{,}8$ *cm*; $M = -\frac{5}{6}$; $\alpha = 99^0 25'$.

Seite 14 Übung 1: $x_1 = -\frac{5}{2}$ und $y_1 = \frac{1}{3}$.

„ 14 „ 2: $x_2 = 3$; $y_3 = 2$; $x_4 = 2\frac{1}{4}$; $y_5 = -3$.

„ 14 Aufgabe: $y = Mx - Mx_1 + y_1$.

„ 15 Übung 1: $\frac{-2-y}{3-x} = \frac{2}{3}$ oder $y = \frac{2}{3}$.

„ 15 „ 2: a) $1 = \frac{y-4}{x-2}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y-4}{x+2}$;

c) $\sqrt{3} = \frac{y-4}{x+2}$.

„ 15 Anwendung: Gerade mit den Steigerungen 0,095 und 0,06. Blechstärke 6—7 *mm*. Siehe Fig. 16.

„ 17 Übung 1: $y = -\frac{x}{M} + \frac{x_1}{M} + y_1$.

„ 17 „ 2: Für den Fußpunkt ist $y_1 = \sqrt{3}\,x + 2$

Gleichung des Lotes: $\frac{y - \sqrt{3} - 2}{x-1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

oder $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{3}\sqrt{3} + 2$.

„ 17 Übung 3a: Gleichung des Lotes: $-\frac{1}{M} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$

$x_2 = \frac{x_1 + My_1 - Mn}{1 + M^2}$; $y_2 = \frac{Mx_1 + M^2 y_1 + n}{1 + M^2}$.

„ 17 Übung 3b: $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2-y}{3-x}$; $x_2 = 0{,}05$; $y_2 = 4{,}07$.

„ 17 „ 4a: $r = \frac{y_1 - (Mx_1 + n)}{\sqrt{1 + M^2}}$.

„ 17 „ 4b: $r = \frac{2 - (\sqrt{2} \cdot 3 + 4)}{\sqrt{1+2}} =$

„ 17 „ 5: $x_1 = 2$; $y_1 = 3$; $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\frac{1}{2} - 1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

$\alpha - \beta = 161\frac{1}{2}{}^0$.

„ 18 Übung 6a: $\operatorname{tg} 45^0 = \frac{2 - M}{1 + 2M}$ also $M = \frac{1}{3}$ usw.

Seite 18 Übung 7: $\frac{2-1}{3+2}=\frac{2-y}{3-x}$; $\frac{1+4}{-2-1}=\frac{1-y}{-2-x}$;

$\frac{-4-2}{1-3}=\frac{-4-y}{1-x}$; 5,10; 5,83; 6,32 *cm*. $80^0 45'$; $49^0 15'$; $50^0 0'$.

„ 18 Übung 8: 135^0; 85^0; $121^0 30'$; $132^0 20'$; $66^0 10$.

„ 19 „ 1: Kreis mit $r=5$ um den Achsenschnittpunkt.

„ 20 Aufgabe 1: r.

„ 20 Übung 1: $x_1 = 0{,}96, \quad x_2 = -4{,}16$
$y_1 = 5{,}92, \quad y_2 = -4{,}32$.

„ 20 „ 2: Gleichung der Sehne: $\frac{y-0}{x-1} = -\sqrt{3}$.

$x_1 = +2{,}70$; $y_1 = -2{,}94$ Länge der Sehne ist
$x_2 = -1{,}20$; $y_2 = +3{,}82$ $\sqrt{60{,}9} = 7{,}8$.

„ 24 Aufgabe: $y = -\frac{x_1}{y_1}; x + \frac{r^2}{y_1}$.

„ 24 Übung 1: $x_1 = 0; \quad y_1 = \pm r$.

„ 24 „ 2: $x_1 = \pm r; \; y_1 = 0$.

„ 24 „ 3: $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,r; \; y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,r$.

„ 24 „ 4: Aus $\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{x_1}{y_1}$ und der Gleichung des Kreises findet man $y_1 = 0{,}8\,r$. Dann ist $x_1 = -\frac{r}{2}$ und die Gleichung der Tangente: $-\frac{x}{2} + 0{,}8\,y = r$.

„ 24 Übung 5: $y_1 = 6{,}92, \quad y_2 = 6{,}71, \quad y_3 = 6{,}34$,
$y_4 = 5{,}75, \quad y_5 = -4{,}90, \quad y_6 = 3{,}61, \quad y_7 = 0$.
$M_1 = -0{,}145, \quad M_2 = -0{,}322, \quad M_3 = -0{,}476$,
$M_4 = -0{,}696, \quad M_5 = -1{,}02, \quad M_6 = -1{,}66$,
$M_7 = \infty$.

„ 25 Übung 6: $\alpha = 45^0 \quad x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

„ 27 „ 1: $y_2 = +\frac{2}{\sqrt{3}}\,r$ und $x_2 = -2\,r$.

Seite 27 Übung 2: $x_2 = \sqrt{2}\,r$; $y_2 = \sqrt{2}\,r$; $y = x + \sqrt{2}\,r$.
„ 27 „ 3: $y_1 = 4{,}58$; $\operatorname{tg} \alpha = -0{,}438$; $n = 5$; $n' = 2$; $t' = 10{,}50$; $t = 11{,}45$.
„ 30 Übung 1: Kreis mit dem Radius 3; Kreis mit dem Radius 5, der vertikalen Verschiebung nach oben = 36 und der horizontalen Verschiebung nach links = 10.
„ 31 Übung 2: $(y-5)^2 + (x-3)^2 = 16$ oder $y^2 + 10\,y + x^2 - 6\,x + 18 = 0$.
„ 31 Übung 3: $v = 1$ $\quad x_1 = +1{,}7$ $\quad y_1 = -2{,}3$
$h = -2$ $\quad x_2 = -5{,}7$ $\quad y_2 = +4{,}3$
$r = 3{,}87$.
„ 31 „ 4: $x_1 = +3$; $y_1 = +3$.
„ 31 „ 5: $v = 6$; $h = 5$; $r = 8$.
„ 31 „ 6: $v = 6$; $h = 10$; $r = 5$.
„ 32 „ 1: Man erhält dieselbe Gleichung wieder.
„ 32 „ 2: $y\,(M \sin \alpha + \cos \alpha) = x\,(M \cos \alpha - \sin \alpha) + n$.
„ 35 „ 1: $y^2 = 2\,p\left(x - \frac{p}{2}\right) = 2\,p\,x - p^2$.
„ 35 „ 2: $y^2 = 2\,p\,x + p^2$.
„ 35 „ 3: Parabeln mit $p = 2$ und $p = \frac{1}{8}$.
„ 35 „ 4: $x_1 = 2$ und $y_1 = 6$.
„ 36 Anwendung: $s_1 = 1{,}90\ m$.
„ 37 Übung 1: $x_1 = 5{,}70$; $x_2 = 0{,}80$; $y_1 = 7{,}40$; $y_2 = -2{,}40$.
„ 37 „ 2: $x_1 = 0{,}23\,p$; $x_2 = -3{,}23\,p$; $y_1 = \pm\,0{,}68\,p$; y_2 imaginär.
„ 37 Übung 3: $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{3}$; $y_1 = 3{,}46$; $y_2 = -1{,}16$; $L = 5{,}37 = 1{,}37 + 4{,}00$.
„ 37 Übung 4: $x_1 = 2{,}4$; $x_2 = -10{,}4$; $y_1 = \pm\,4{,}37$; y_2 imaginär; $L = 8{,}74$.
„ 39 Übung 1: $x_1 = 1$; $y_1 = 2$; $M_1 = 1$; $x_2 = 2$; $y_2 = 2{,}83$; $M_2 = 0{,}71$; $x_3 = 3$; $y_3 = 3{,}46$; $M_3 = 0{,}58$; $x_4 = 4$; $y_4 = 4{,}00$; $M_4 = 0{,}50$.
„ 39 Übung 2: Für $y_1 = p$ und $x_1 = \frac{p}{2}$, also über dem Brennpunkt.
„ 39 Übung 3: $\alpha = 38{,}4^0$.

Seite 40 Übung 1: $y = \frac{x}{4} + 4$.

„ 40 „ 2: $x_1 = \infty$; $x_2 = 0$.

„ 40 „ 3a: $x_1 = \frac{3}{2}p$; $y_1 = p\sqrt{3}$; $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}p$; $n = \frac{\sqrt{3}}{2}p$; $x_2 = -\frac{3}{2}p$.

„ 40 Übung 4: $y = x + \frac{p}{2}$.

„ 41 Aufgabe: $y = -\frac{y_1}{p}x + \frac{y_1 x_1}{p} + y_1$.

„ 42 „ 1: In der Gleichung der Normalen setzt man $x = x_2$ und $y = y_2 = 0$. Die Längen erhält man aus den Koordinaten der Endpunkte nach Gleichung (1).

„ 42 Aufgabe 2: Brennstrahl $= \frac{p}{2} + x_1$; Subtangente $= 2x_1$; Subnormale $= p$.

„ 46 Aufgabe 1: $v = \frac{1}{5}\pi x_1^2 y_1$.

„ 46 „ 2: $v = \frac{4}{5}\pi x_1^2 y_1$.

„ 46 „ 3: $v = \frac{1}{2}\pi y_1^2 x_1$.

„ 48 Anwendung 1: $s_1 = 0$ und $s_2 = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot v^2 : g$ $s_{max} = 41\,000\ m$; $h_{max} = 3570\ m$.

„ 48 Anwendung 2: $M_b = Qx$; $M_b = \frac{Q}{l}x\frac{x}{2}$; obere Ast der Parabel, die um 90^0 gedreht ist; Tangente an die Parabel.

„ 48 Anwendung 3: 3,5; 5,9; 7,4.

„ 52 Aufgabe 1: $x = a$; $y = b$.

„ 52 „ 2: $x_{\frac{1}{2}} = \frac{-Mna^2 \pm ab\sqrt{b^2 - n^2 + M^2a^2}}{b^2 + M^2a^2}$

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{nb^2 \pm Mab\sqrt{b^2 - n^2 + M^2a^2}}{b^2 + M^2a^2}.$$

Seite 52 Aufgabe 3: Man schlägt mit a um den Endpunkt von b einen Kreis (siehe Fig. 45).

„ 52 Aufgabe 4: Ellipse mit $a = 4$ und $b = 5$.

„ 52 „ 5: $x_1 = \pm 3{,}67$ *cm*.

„ 52 „ 6: $y_1 = 4{,}32$; $y_2 = 3{,}3$; $r = 1{,}4$ *cm*.

„ 52 „ 7: $9x^2 + 25y^2 = 225$.

„ 52 „ 8: $y_1 = 3{,}90$; $r_1 = 6{,}7$; $r_2 = 3{,}9$ *cm*.

„ 54 „ 1: Der Verlauf ist ähnlich wie beim Kreise.

„ 54 „ 2: $y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}x + \frac{b^2}{y_1}$.

„ 55 „ $y = \frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}x - \frac{a^2}{b^2}y_1 + y_1$.

„ 56 Übung 1: $72x + 57y = 576$.

„ 56 „ 2: $\alpha = 38^0$.

„ 56 „ 3: $x_1 = 0$; $x_1 = a$.

„ 56 „ 4: $x_1 = 3{,}9$; $y_1 = 3{,}0$; $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{16}{3}$; $x_2 = 16\sqrt{3}$; $n = \frac{16}{3}$.

„ 56 Übung 5: $x_1 = \pm 3{,}3$; $y = 0{,}705x + 5{,}325$.

„ 57 „ 6: 0; 0,17; 0,19 usw.

„ 57 „ 7: $x_1 = a^2 : e$.

„ 57 Aufgabe 1: $(x - e)^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$.

„ 57 „ 2: $x^2 b^2 + (y - b)^2 a^2 = a^2 b^2$.

„ 57 „ 3: Ellipse mit $a = 10$, $b = 100\sqrt{2}$.

„ 58 „ 4: $x_1 = 1$.

„ 62 „ 1: Gang der Rechnung wie bei der Ellipse.

„ 62 „ 2: $(x + e)^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2$.

„ 62 „ 3: $a = 4$; $b = 3$; $e = \sqrt{7}$.

„ 62 „ 4: $y = \frac{9}{4}$.

„ 63 „ 5: $y_1 = 2{,}7$; y_2 imaginär.

„ 63 „ 1: Für keinen; für Punkt mit $x = a$.

„ 63 „ 2: $16x \cdot 6{,}3 - 25y \cdot 3 = 400$.

„ 64 „ 3: $4x\sqrt{13} - 9y \cdot \frac{4}{3} = 36$.

„ 64 „ 4: $M = \frac{6 \cdot 16}{2{,}8 \cdot 25}$.

Seite 64 Aufgabe 5: $x_1 = \frac{5}{3} \cdot 5$.

" 65 " —: Gang der Ableitung wie bei der Ellipse (S. 56 Nr. 4).

" 66 Aufgabe 1: $a\sqrt{2}$.

" 66 " 2: a.

" 67 " —: $a = 4$; $s = 2{,}9$.

" 68 " 1: $y x_1 + x y_1 = a^2$.

" 68 " 2: $xy + (x + y)\frac{a}{\sqrt{2}} = 0$.

" 85 Übung: $y^3 = 27 \cdot x$; $F = 36\ qcm$; $36\,y = 9\,x + 145$; $n = 4$; $-y\frac{3}{2} = 1{,}8\,x$; $F = 28{,}8$; $2{,}45\,y = 1{,}2\,x + 4{,}8$; $n = 1{,}96\ cm$.

" 106 Beispiel: Arbeit $= 22\,500\ mkg$.

" 118 Übung 1: Subtangente $= -x_1$.

" 118 " 2: Man trägt x_1 zweimal ab und verbindet mit dem Berührungspunkt.

" 118 Übung 3: Subtangente $= r\,y_1^r : q = r\,x_1$.

" 130 Aufgabe 1: $r = 8{,}9\ cm$.

" 130 " 2: $y = 0{,}70\,p$; $y_1 = 0{,}66\,p$.

" 130 " 3 und 4: Die Kegelschnitte haben keine Wendepunkte.

" 130 Aufgabe 5: Min bei $x_1 = o$, $y_1 = o$; Max bei $x_2 = +\sqrt{2}$ und $x_3 = -\sqrt{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$ und $y_3 = \frac{1}{2}$; Wendepunkte bei $x = \pm 1$; $r_1 = 1$; $r_2 = r_3 = 1$; $a_1 = o$, $b_1 = 1$; $a_2 = +\sqrt{2}$, $a_3 = -\sqrt{2}$, $b_2 = b_3 = -0{,}5$.

" 130 Aufgabe 6: Min bei $x_1 = -\frac{2}{3}$, $y_1 = -\frac{1}{27}$; Max bei $x_2 = -1$, $y_2 = 0$; Wendepunkt bei $x_3 = -\frac{5}{6}$; $r_1 = \frac{1}{2}$; $r_2 = \frac{1}{2}$; $a_1 = -0{,}67$, $b_1 = 0{,}46$; $a_2 = -1$, $b_2 = -0{,}5$.

Piererschen Hofbuchdruckerei Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

Dr. Max Jänecke, Verlagsbuchhandlung, Hannover

Elemente der Differential- und Integralrechnung für höhere technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von Professor Dr. **K. Düsing.** Mit zahlreichen Beispielen aus der technischen Mechanik von Dipl.-Ing. E. Preger. 2. Auflage. Geb. M. 1.90.

Die erste Auflage dieses Werkes hat einen raschen Absatz gefunden, ein Beweis, daß die Methode des Verfassers gerade in technischen Kreisen guten Anklang gefunden hat. Der Verfasser führt die Ableitung auf geometrischem Wege an der Hand von Figuren durch, was anschaulicher, leichter und interessanter ist als die früher übliche algebraische Art, und den weiteren Vorteil hat, daß sich an den Figuren das Resultat oft direkt ablesen läßt. Das Buch ist auch zum Selbstunterricht vorzüglich geeignet.

Festigkeitslehre in elementarer Darstellung mit zahlreichen, der Praxis entnommenen Beispielen. Zum Gebrauch für Lehrer und Studierende an technischen Mittelschulen, sowie für die Praxis. Von **Hugo Ahlberg.** Geb. M. 3.—.

Die leichtfaßlichen, in gedrängter Kürze entwickelten theoretischen Grundsätze, sowie die durch Skizzen erläuterten Beispiele lassen sofort erkennen, daß man es hier mit einem durchwegs praktischen Pädagogen zu tun hat. So ist es dem Herausgeber gelungen, reges Interesse beim Studieren zu erwecken und das Verständnis des Werkes durch die vielen, ausgearbeiteten Rechenexempel wesentlich zu erleichtern.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von **Karl Vetters.** Mit 251 Abbildungen. Geb. M. 5.60.

Dieses Lehrbuch der darstellenden Geometrie zeichnet sich durch die Reichhaltigkeit seines Inhaltes aus, indem trotz des geringen Umfanges von 285 Seiten im ersten Teile nicht nur die Projektion in einer Tafel, das Grund- und Aufriß-Verfahren, die Darstellung ebenflächiger Körper und einfacher krummer Linien und Flächen, sondern auch die Beleuchtung und die Schattenkonstruktion ebenflächiger Körper und Rotationsflächen behandelt werden, woran sich im zweiten Teile noch eine kurze Erörterung der rechtwinkeligen Axonometrie, der schiefen Projektion und der Linearperspektive schließt. Zahlreiche gutgewählte Aufgaben sind den einzelnen Abschnitten beigegeben. Das Werk eignet sich ausgezeichnet zum Studium der darstellenden Geometrie, es ist klar und leichtverständlich geschrieben und namentlich höheren technischen Lehranstalten zu empfehlen.

Die Mechanik fester Körper. Lehrbuch in elementarer Darstellung für höhere technische Fachschulen und zum Selbstunterricht nebst einer Sammlung von 250 aufgelösten Beispielen. Von **Ernst Blau.** Mit 210 Abbildungen. Brosch. M. 6.—, geb. M. 6.60.

Das vorliegende Lehrbuch, dessen Inhalt durch den Titel hinlänglich gekennzeichnet ist, unterscheidet sich von den in letzter Zeit, man ist versucht zu sagen, massenhaft erschienenen Werken seinesgleichen durch besonders einfachen und klaren Aufbau, durch wohl abgewogene Übersichtlichkeit und durch eine Fülle praktisch gewählter und aufgelöster Beispiele. Namentlich diese Beispiele sind geeignet, dem Lernenden als nützliche Wegweiser zu dienen.

(Zeitschr. d. österr. Ingenieur- u. Architekten-Vereins, Wien.)

Anwendung der Graphostatik im Maschinenbau mit besonderer Berücksichtigung der statisch bestimmten
Ac … nische Unter-
ric … in der Praxis
bea … Abbildungen.
Br …

… sowie als Nach-
sch … n werden, zumal
auc … ger zu nennen ist.
… durch die gute
Aus…

Pierersche Hofbuchdruckerei Stephan Geibel & Co. in Altenburg, S.-A.