Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Punkte.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Punkte.

Die Lage eines Punktes.

Ein Punkt hat keinerlei Ausdehnung, keine Länge, keine Breite und keine Tiefe, also auch keine Form und Größe. Er kommt nur durch seine L a g e gegen andere Punkte oder Linien in Betracht. Um diese Lage eines Punktes in einer Ebene zu bestimmen, teilt man diese Ebene durch zwei sich meist senkrecht schneidende Gerade in vier Teile, und zwar zieht man dann gewöhnlich die eine wagerecht und die andere lotrecht. Diese Geraden heißen A c h s e n. Kennt man nun die Längen der senkrechten Entfernungen eines beliebigen Punktes P von diesen Achsen, so ist die Lage dieses Punktes bestimmt.

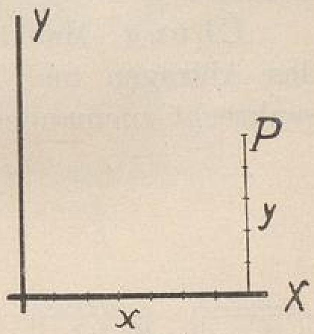

Fig. 1.

Schneidet man in Fig. 1 auf der wagerechten Achse ein Stück von der Größe der wagerechten Entfernung x ab und errichtet nun im Endpunkt ein Lot von der Größe der lotrechten Entfernung y, so gelangt man zum Punkte P. Das auf der wagerechten Achse „abgeschnittene" Stück heißt „A b s z i s s e" und wird gewöhnlich mit x bezeichnet. Das zugehörige oder „zugeordnete" Lot heißt „O r d i n a t e", und seine Länge bekommt den Buchstaben y. Beide jedem Punkte „zugeordnete" Stücke heißen auch „K o o r d i n a t e n".

Mißt man die Koordinaten in irgendeiner Längeneinheit (*cm*, *m*), so kann man ihre Länge in Zahlen angeben. Dabei wird die Abszisse vom Schnittpunkt der Achsen ab nach rechts p o s i t i v, nach links n e g a t i v gerechnet. Ebenso wird die Ordinate nach oben positiv und nach unten negativ genommen. Der Achsenschnittpunkt oder Koordinatenursprung hat also die Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$. Die Koordinaten sind demnach im ersten Quadranten positiv; z. B. hat in Fig. 1 der Punkt P die Abszisse $x = +7$ und die Ordinate $y = +5$ Längeneinheiten.

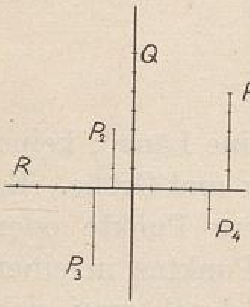

Fig. 2.

In Fig. 2 hat z. B. P_2 die Koordinaten $x_2 = -1$ und $y_2 = +3$, P_3 hat $x_3 = -2$ und $y_3 = -4$, P_4 hat $x_4 = +4$ und $y_4 = -2$, Q hat $x_5 = 0$ und $y_5 = +7$, R hat $x_6 = -6$ und $y_6 = 0$ Längeneinheiten usw.

Bezeichnung: Den Punkt mit den Koordinaten x_1 und y_1 kann man kurz als Punkt $(x_1; y_1)$ oder Punkt $(x_1 y_1)$ bezeichnen. Ist $x_1 = 3$ und $y_1 = -5$ Einheiten, so kann man kurz Punkt $(x_1 = 3; y_1 = -5)$ oder auch Punkt $(3; -5)$ schreiben.

Übung: Man benutze quadriertes Papier, wodurch das Abtragen und Messen erleichtert wird. Zwei passende senkrecht zueinander stehende Gerade macht man zu Achsen.

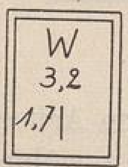

Fig. 3.

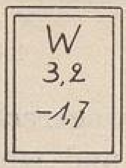

Fig. 4.

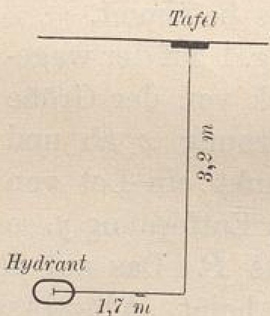

Fig. 5.

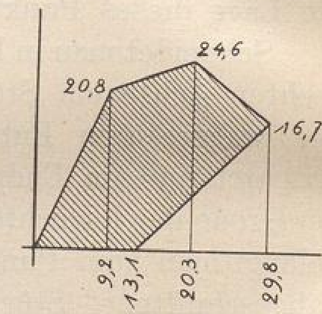

Fig. 6.

1. In diesem Achsensystem nehme man beliebige Punkte an und bestimme durch Messung ihre Koordinaten.

2. Man konstruiere die Punkte, die folgende Koordinaten haben:

a) $x_1 = 3$ und $y_1 = 1$ cm d) $x_4 = +4$ und $y_4 = -3$ cm
b) $x_2 = -2$ und $y_2 = 5$ „ e) $x_5 = -2$ und $y_5 = -3$ „
c) $x_3 = 0$ und $y_3 = 2$ „ f) $x_6 = -4$ und $y_6 = 0$ „ .

Anwendung: Die Lage der Hydranten, der Gasanschlüsse und der Anschlußkasten für elektrische Leitungen ist an den Häusern durch Täfelchen gekennzeichnet. So bedeutet in Fig. 3 oder 4, daß ein Hydrant 3,2 m nach vorn und 1,7 m nach der in Fig. 3 und 5 gezeichneten Seite

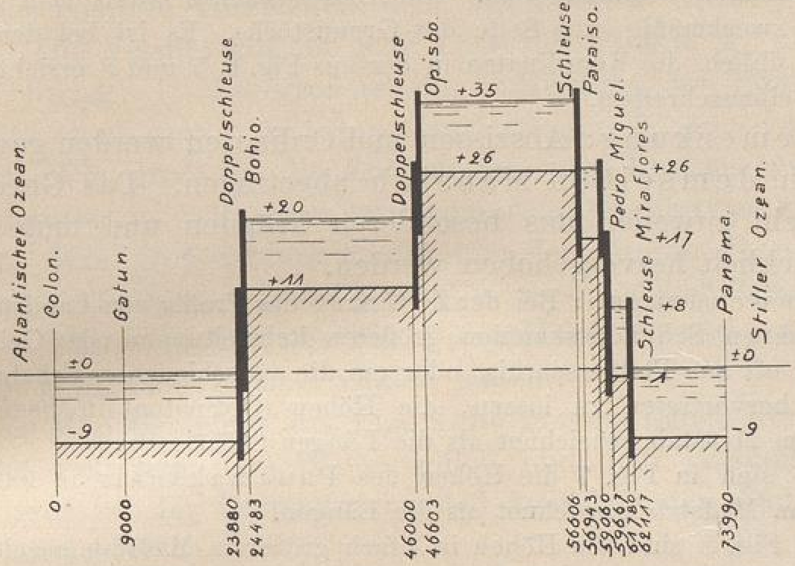

Fig. 7. Längsschnitt des Panamakanals.
Maßstab der Längen 1 : 1 250 000. Maßstab der Höhen 1 : 1250.

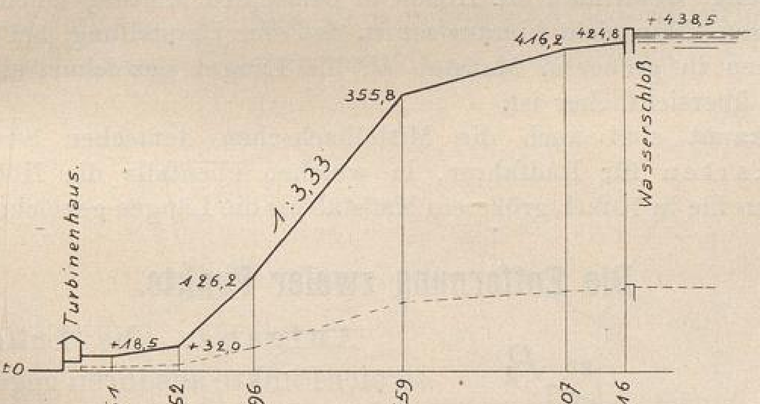

Fig. 8. Längsprofil einer Rohrleitung.
Maßstab der Längen 1 : 50 000. Maßstab der Höhen 1 : 12 500.

liegt. Es ist auf diese Weise dem Feuerwehrmann auch bei schneebedeckter Straße möglich, den Hydranten ohne Probieren sofort aufzufinden. Er braucht nur nach Angabe des Täfelchens gemäß der Skizze Fig. 5 senkrecht von der Tafel weg 3,2 m nach vorn und von dem gefundenen Endpunkt 1,7 nach links zu messen.

Auch bei Vermessungen von Grundstücken wird die Lage aller Punkte durch die Länge ihrer Koordinaten festgelegt. Zum Beispiel zeigt Fig. 6 den Plan eines Grundstückes von der Form eines unregelmäßigen Fünfecks, dessen Eckpunkte durch Angabe der Abszissen und Ordinaten bestimmt sind. Als Abszissenachse wählt man in der Praxis zweckmäßig eine Seite des Grundstücks. Es ist bei den Geometern üblich, die Koordinaten in der aus Fig. 6, 7 und 8 ersichtlichen Weise einzuschreiben.

Bemerkung: Abszissen und Ordinaten werden gewöhnlich in demselben Maßstab abgetragen. Das Gegenteil geschieht zuweilen aus besonderen Gründen und muß dann ausdrücklich hervorgehoben werden.

Anwendungen: Bei der Zeichnung des Profils von Landstraßen, Eisenbahnen, Schiffahrtskanälen, größeren Rohrleitungen oder Gebirgen werden oft aus Platzersparnis, oder um die verschiedenen Erhebungen besser hervortreten zu lassen, die Höhen (Ordinaten) in bedeutend größerem Maßstab gezeichnet als die Längen (Abszissen).

So sind in Fig. 7 die Höhen des Panamakanals in 1000fach größerem Maßstab gezeichnet als die Längen.

In Fig. 8 sind die Höhen in 4fach größerem Maßstab gezeichnet, um die Knickpunkte in der Rohrleitung für ein Kraftwerk besonders deutlich hervortreten zu lassen. Die gestrichelte Linie zeigt dieselbe Rohrleitung, wenn man die Höhen in demselben Maßstab zeichnet wie die Längen. Man sieht hieraus sofort, daß eine Darstellung, bei welcher die Höhen in größerem Maßstab als die Längen gezeichnet sind, bedeutend übersichtlicher ist.

Bekannt sind auch die Mittelbachschen deutschen Straßenprofilkarten für Radfahrer, in welchen ebenfalls die Höhen der Straßenprofile in 10fach größerem Maßstab als die Längen gezeichnet sind.

Die Entfernung zweier Punkte.

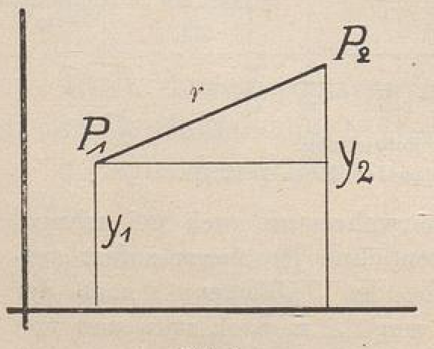

Fig. 9.

Aufgabe: Die Entfernung zweier Punkte aus ihren gegebenen Koordinaten zu berechnen (Fig. 9).

Die Koordinaten des Punktes P_1 seien $x_1\ y_1$, die des Punktes P_2 seien $x_2\ y_2$, und die Entfernung $P_1\ P_2$ heiße r. Zieht man von P_1 aus eine Parallele zur X-Achse, so entsteht ein rechtwinkliges

Dreieck mit den Katheten $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$. Dann ist

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bemerkung: Zieht man, um r zu erhalten, die Wurzel, so ist das Resultat von der ersten Dimension, und zwar gilt nur das positive Vorzeichen, da r als absolute Größe gesucht wird. Die Formel gilt für jede Lage der Punkte P_1 und P_2.

Übung: 1. Wie groß ist die Entfernung der Punkte P_1 und P_2, wenn $x_1 = 5$, $y_1 = -4$ und $x_2 = -3$, $y_2 = 7$ cm ist?

2. Wie groß ist die Entfernung eines Punktes mit den Koordinaten $x_1 = 3$, $y_1 = 4$ m, vom Achsenschnittpunkt?

3. Wie groß ist die Entfernung der Punkte P_1 und P_2, wenn $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ und $y_1 = 3$, $y_2 = -3$ m ist? Zeichnung.

4. Man berechne aus Fig. 7 die Höhen, welche die einzelnen Schleusen zu überwinden haben.

5. Man berechne aus Fig. 8 die genaue Länge der Rohrleitung zwischen dem Wasserschloß und dem Turbinenhaus. Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen den Enden der Rohrleitung?

Berechnung von geradlinig begrenzten Flächen.

Aufgaben: 1. Aus den gegebenen Koordinaten ($x_1\,y_1$ und $x_2\,y_2$) zweier Punkte sind die Koordinaten ($x_3\,y_3$) des

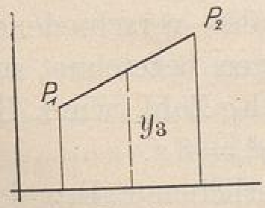

Fig. 10.

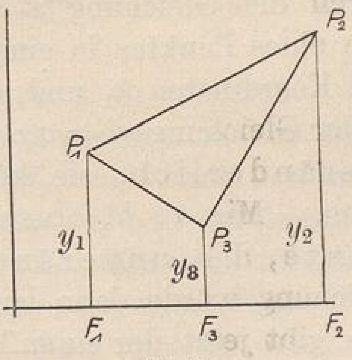

Fig. 11.

Halbierungspunktes ihrer Verbindungslinie zu berechnen. Nach Fig. 10 ist:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

2. Die Fläche eines Dreiecks zu berechnen, wenn die Koordinaten der Endpunkte gegeben sind. Das gesuchte Dreieck ist die Differenz von Trapezen (Fig. 11):

$$P_1 P_2 P_3 = P_1 P_2 F_2 \ F_1 - P_1 P_3 F_3 \ F_1 - P_3 P_2 F_2 \ F_3.$$

Diese Inhalte sind aus den Koordinaten der Punkte zu berechnen. Man erhält schließlich die Formel:

$$F = \frac{1}{2}\Big[x_1 (y_3 - y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_3 (y_2 - y_1)\Big].$$

Bemerkung: Die Formel hat zwei Dimensionen. Die x lassen sich vertauschen, ebenso die y; es ist also gleichgültig, welchen Punkt man als 1, 2 oder 3 bezeichnet. Ferner lassen sich die x gegen die y vertauschen; man kann also das Achsenkreuz um 90^0 drehen, ohne daß sich F ändert.

Übung: 1. Man berechne den Inhalt eines Dreiecks, von dem der eine Eckpunkt die Koordinaten $x_1 = 2$ und $y_1 = 4$, der zweite $x_2 = 8$, $y_2 = 7$ und der dritte $x_3 = 5$, $y_3 = 2$ cm hat.

2. Man berechne den Inhalt des in Fig. 8 gezeichneten Grundstücks. Die Maße der Koordinaten sind in m eingeschrieben.

Zeichnung einer Linie aus einer gegebenen Gleichung.

Durch die Gleichung $x_1 = 3$ und $y_1 = 1$ Einheiten ist die Lage eines Punktes in einem Achsenkreuz bestimmt. Hier sind die Koordinaten x_1 und y_1 als konstante Größen gegeben.

In der Gleichung $y^3 = ax$ dagegen sind x und y variabel d. h. veränderlich; sie können also verschiedene Werte annehmen. Mit a, b, c usw. dagegen bezeichnet man eine konstante, d. h. unveränderliche Zahl, wie z. B. $a = 8$. Die Gleichung würde dann lauten: $y^3 = 8x$.

Man gibt jetzt der einen Veränderlichen z. B. x der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 usw. Dann gehört zu jedem x ein oder mehrere bestimmte Werte von y. Man sagt y ist abhängig von x oder eine Funktion von x, und man schreibt: $y = f(x)$. Ist z. B. $x = 1$, so ergibt obige Gleichung für $a = 8$, daß $y = 2$ ist. Man rechnet nun zu jedem x mit

Hilfe der Gleichung den zugehörigen Wert von y aus und trägt die erhaltenen Werte in eine Tabelle (wie untenstehend) ein, die Werte von x links, die zugehörigen Werte von y rechts daneben.

x	y	x	y	x	y
+ 4	+ 3,175	+ 0,5	+ 1,587	— 0,75	— 1,817
+ 3	+ 2,885	+ 0,25	+ 1,260	— 1,0	— 2,0
+ 2	+ 2,520	± 0	± 0	— 2	+ 2,520
+ 1,0	+ 2,0	— 0,25	— 1,260	— 3	+ 2,885
+ 0,75	+ 1,817	— 0,5	— 1,587	— 4	+ 3,175

Alsdann schneidet man auf der X-Achse die angenommenen Werte von x ab und trägt zu jedem x das zugehörige y senkrecht zur X-Achse auf. Man erhält eine Reihe von Punkten, die man verbindet, so daß eine Kurve entsteht. Diese Zeichnung kann man auch nach links vervollständigen, indem man die Tabelle weiter für negative x berechnet und dann die Werte in die Zeichnung einträgt (Fig. 12).

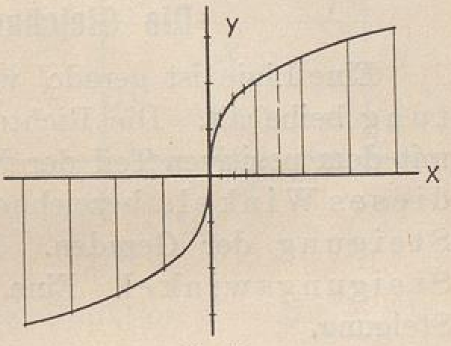

Fig. 12.

Entsteht an einer Stelle ein Zweifel über den Verlauf der Kurve, z. B. zwischen $x = 0$ und $x = 1$, so nimmt man für einige Zwischenwerte von x wie $x = 0,25$; $x = 0,5$; $x = 0,75$ usw., berechnet die hierzu gehörigen Werte von y und trägt auch sie in die Zeichnung ein.

Alle Punkte der erhaltenen Kurve entsprechen der gegebenen Gleichung. Hiervon kann man sich durch Nachmessen überzeugen. Man mißt in der Zeichnung die Ordinate der Abszisse $x = 1,5$ von der X-Achse bis zur Kurve zu 2,3. Wird $x = 1,5$ und $y = 2,3$ in die gegebene Gleichung eingesetzt, so sieht man, daß die Gleichung durch diese Koordinaten erfüllt wird. Dasselbe läßt sich von jedem anderen beliebigen Punkt der Kurve nachweisen.

Die Kurve ist also die Darstellung der Gleichung.

Da man an solchen Kurven die Abhängigkeit der Ordinaten von den Abszissen bequem übersehen kann, so wählt man gerade in der Technik sehr oft die zeichnerische Darstellung und zwar hauptsächlich für verwickelte Gleichungen und Gesetze.

Man zeichne die Kurve der Abhängigkeit des Dampfdruckes p von der Temperatur $t = 0^0$ bis $t = 200^0$:

$$p = \left(\frac{75 + t}{175}\right)^6.$$

Passender Maßstab für t: $1^0 = 1$ mm, für p: 1 kg/qcm = 10 mm.

Die gerade Linie.

Die Gleichung der Geraden.

Eine Linie ist gerade, wenn sie stets dieselbe Richtung beibehält. Die Richtung ist durch den $\sphericalangle\ \alpha$ der Linie mit dem positiven Teil der X-Achse gegeben[1]. Die Tangens dieses Winkels bezeichnen wir mit M und nennen sie die Steigung der Geraden. Den Winkel α nennt man den Steigungswinkel. Eine Gerade hat also überall dieselbe Steigung.

Die Ordinaten und Abszissen müssen im allgemeinen in demselben Maßstab aufgetragen werden, weil sonst die Steigung unrichtig würde. In dem auf Seite 4 erwähnten und in Fig. 7 und 8 gezeichneten Fällen, wo die Höhen in größerem Maßstab aufgezeichnet wurden als die Längen, sind die Steigungen der Linien auf der Zeichnung größer als in Wirklichkeit. Um eine jedesmalige Berechnung der Steigung zu vermeiden, schreibt man dann meistens die Steigungen direkt an die betreffende Linie, z. B. 1 : 200; 1 : 15; 1 : ∞, wie es auch in Fig. 8 an einer Stelle geschehen ist.

---

[1]) Daher sagt man auch wohl statt „Winkel" das Wort „Richtungsunterschied". — Die Drehung erfolgt in demselben Sinne wie in der Trigonometrie beim Einheitskreis.