Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die gerade Linie.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Die Kurve ist also die Darstellung der Gleichung.

Da man an solchen Kurven die Abhängigkeit der Ordinaten von den Abszissen bequem übersehen kann, so wählt man gerade in der Technik sehr oft die zeichnerische Darstellung und zwar hauptsächlich für verwickelte Gleichungen und Gesetze.

Man zeichne die Kurve der Abhängigkeit des Dampfdruckes p von der Temperatur $t = 0^{0}$ bis $t = 200^{0}$:

$$p = \left(\frac{75 + t}{175}\right)^{6}.$$

Passender Maßstab für t: $1^{0} = 1$ mm, für p: 1 kg/qcm $= 10$ mm.

Die gerade Linie.

Die Gleichung der Geraden.

Eine Linie ist gerade, wenn sie stets dieselbe Richtung beibehält. Die Richtung ist durch den $\sphericalangle\ \alpha$ der Linie mit dem positiven Teil der X-Achse gegeben[1]. Die Tangens dieses Winkels bezeichnen wir mit M und nennen sie die Steigung der Geraden. Den Winkel α nennt man den Steigungswinkel. Eine Gerade hat also überall dieselbe Steigung.

Die Ordinaten und Abszissen müssen im allgemeinen in demselben Maßstab aufgetragen werden, weil sonst die Steigung unrichtig würde. In dem auf Seite 4 erwähnten und in Fig. 7 und 8 gezeichneten Fällen, wo die Höhen in größerem Maßstab aufgezeichnet wurden als die Längen, sind die Steigungen der Linien auf der Zeichnung größer als in Wirklichkeit. Um eine jedesmalige Berechnung der Steigung zu vermeiden, schreibt man dann meistens die Steigungen direkt an die betreffende Linie, z. B. 1 : 200; 1 : 15; 1 : ∞, wie es auch in Fig. 8 an einer Stelle geschehen ist.

[1]) Daher sagt man auch wohl statt „Winkel“ das Wort „Richtungsunterschied“. — Die Drehung erfolgt in demselben Sinne wie in der Trigonometrie beim Einheitskreis.

In der Fig. 13 ist nun eine beliebige Gerade gezeichnet und auf ihr ein beliebiger Punkt P angenommen, dessen Koordinaten x und y seien. Wie die Figur zeigt, ist $\operatorname{tg} \alpha = M = \frac{y - n}{x}$. Wenn die Linie nun eine Gerade sein soll, so muß dieser Wert für alle Punkte der Linie gleich bleiben. Dann ist für alle Punkte der Geraden:

$$y = Mx + n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden.

Bemerkung: In der Gleichung $y = Mx + n$ sind alle Glieder von der ersten Dimension, da M nur ein Verhältnis, also eine unbenannte Zahl ist. Auch x und y sind ersten Grades; die Gleichung einer geraden Linie ist also ersten Grades. Die Steigung M der Geraden, also die Tangens des Steigungswinkels α ist zugleich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der Funktion $y = Mx + n$[1]).

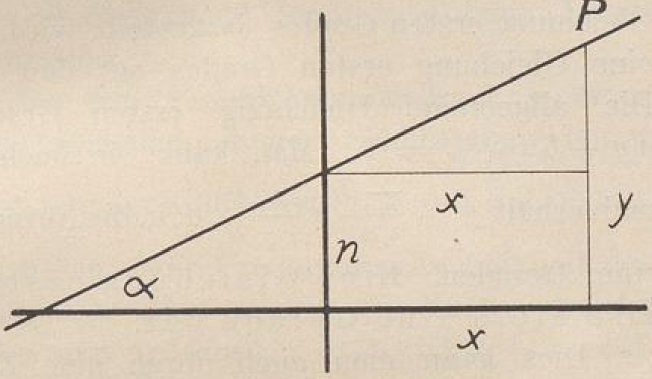

Fig. 13.

Ist die Steigung, also Tangens α positiv, so steigt die Gerade von links nach rechts. Ist die Steigung negativ, so fällt die Gerade nach rechts; die negative Steigung ist ein Gefälle. Den Verlauf einer Linie betrachten wir stets von links nach rechts.

Setzt man $x = 0$, so erhält man $y = n$. Letzteres ist also das Stück, das die Gerade auf dem positiven Teil der Y-Achse abschneidet. Trifft die Gerade die Y-Achse unterhalb des Schnittpunktes der Achsen, so ist n negativ. Für eine Gerade, die durch den Achsenschnittpunkt geht, ist $n = 0$, sie hat also die Gleichung $y = Mx$.

---

1) Siehe Elemente der Differential- und Integralrechnung von K. Düsing. Mit Beispielen aus der technischen Mechanik von E. Preger. 2. Auflage.

In der Gleichung der Geraden sind x und y die Variablen, die also für jeden Punkt der Geraden andere Werte haben. Dagegen sind M und n die Konstanten, die für alle Punkte gleich bleiben; sie sind die Bestimmungsgrößen der Geraden, und zwar wird durch M die Richtung und durch n die Lage bestimmt.

Die Gleichung ersten Grades.

Wir waren zu dem Resultat gekommen, daß die Gleichung einer Geraden vom ersten Grade ist. Umgekehrt kann man auch fragen, welche Art von Linien durch eine beliebige Gleichung ersten Grades dargestellt wird. Man nehme irgendeine Gleichung ersten Grades mit den Variablen x und y. Die allgemeine Gleichung ersten Grades würde lauten: $ay + bx + c = 0$. Man kann sie leicht nach y entwickeln und erhält $y = \frac{-b}{a} x - \frac{c}{a}$, d. h. die Normalform der Gleichung einer Geraden. Eine Gleichung ersten Grades stellt also stets eine Gerade dar.

Dies kann man auch durch eine Zeichnung erläutern: Man gibt a, b und c feste Werte, z. B. 4, 5, 6, ferner der Abszisse der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 usw. und rechnet zu jedem x mit Hilfe der gegebenen Gleichung die Werte von y aus. Diese Werte kann man zunächst, wie auf Seite 7 geschehen ist, in eine Tabelle eintragen. Alsdann schneidet man die einzelnen x auf der Abszissenachse ab und errichtet im Endpunkt von jedem x ein Lot von der Länge des zugehörigen y. Verbindet man jetzt die erhaltenen Endpunkte der Ordinaten, so ergibt sich eine Gerade. Bei ihr ist $M = -\frac{b}{a}$ und $n = -\frac{c}{a}$.

Übung: 1. Man zeichne die Geraden: a) $y = 3x + 5$, b) $y = -2x - 5$, c) $y = \frac{1}{2} x$ und d) $y = x$.

2. Welche Gleichung hat die Gerade, wenn ihr Steigungswinkel $= 45^0$ und $n = 3$ cm ist? Man zeichne diese Linie.

3. Welche Gleichung hat die Gerade, wenn ihr Steigungswinkel $= 60^0$ $(30^0, 120^0, 150^0)$ und $n = 5$ cm ist? Man zeichne sie.

4. Welche Linie hat die Gleichung $y = 8$ cm oder ausführlicher geschrieben $y = 0\,x + 8$? Zeichnung.

5. Welche Linie hat die Gleichung a) $y = 7$ cm, ferner b) $y = 0$ und c) $x = 0$?

6. Welche Winkel bilden die Geraden $y = x + 2$, $y = \sqrt{3}x + 5$, $\sqrt{3}y + x - 2 = 0$ mit dem positiven Teil der X-Achse?

7. Man zeichne die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ für $a = 2$, $b = 3$ cm.

8. Man berechne die Steigungen der Rohrleitungen Fig. 8 in den einzelnen Strängen.

9. Die Formel für den Beschleunigungsdruck p eines Kolbengestänges bei unendlich langer Schubstange lautet $p = \left(1 - \frac{x}{r}\right)\frac{v^2}{r}$. Dabei ist x der Kolbenweg ($x_{min} = 0$, $x_{max} = 2\,r$), r der Kurbelradius $= 0{,}4$ m, v die Umfangsgeschwindigkeit des Kurbelzapfens $= 3{,}5$ m/sec. Man zeichne die Kurve, welche dieser Gleichung entspricht zwischen $x = 0$ und $x = 2\,r$ auf.

Die Lage eines Punktes zu einer Geraden.

Die Koordinaten eines bestimmten Punktes haben wir mit $x_1\,y_1$ oder $x_2\,y_2$ usw. bezeichnet, die Koordinaten eines beliebigen Punktes einer Geraden aber allgemein mit x und y. Den beliebigen Punkt einer Geraden nennt man auch wohl den „laufenden“ Punkt.

Liegt der Punkt mit den Koordinaten $x_1\,y_1$ oder kurz ausgedrückt der Punkt $(x_1\,y_1)$ auf der Geraden $y = Mx + n$, so erfüllen auch seine Koordinaten diese Gleichung der Geraden, also ist $y_1 = M\,x_1 + n$.

Erfüllen seine Koordinaten die Gleichung nicht, so liegt er nicht auf der Geraden. Wäre z. B. $y_1 > M\,x_1 + n$, so würde der Punkt über der Geraden $y = Mx + n$ liegen. Wäre $y_1 < M\,x_1 + n$, so würde der Punkt unterhalb dieser Geraden liegen.

Die Gleichung einer Geraden, die durch zwei gegebene Punkte geht.

Da eine Gerade stets dieselbe Richtung beibehält, so bildet sie, wie wir gesehen haben, mit dem positiven Teil der X-Achse überall denselben Richtungsunterschied, also denselben Winkel, sie hat überall dieselbe Steigung. Legt man z. B. (Fig. 14) durch zwei Punkte P_1 und P_2 eine Gerade, so ist zwischen ihnen die Steigung

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

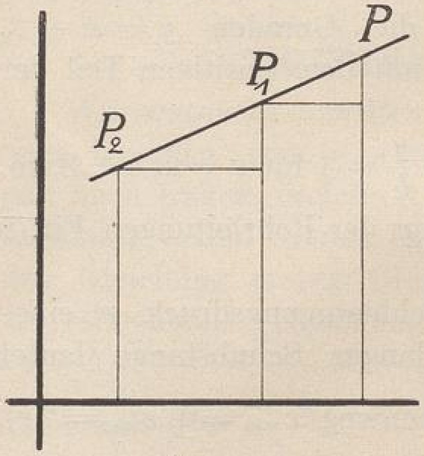

Fig. 14.

Die Steigung von P_1 bis zu einem beliebigen Punkt P ist

$$\frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Diese Steigungen müssen für jeden Punkt gleich groß sein, wenn die Linie gerade sein soll. Also ist die Gleichung der Geraden, die durch zwei gegebene Punkte geht:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Bemerkung: Die Punkte P_1, P_2 und P kann man in ihrer Lage vertauschen; man kann also die linke Seite auch $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ und die rechte auch $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ oder $\frac{y_2 - y}{x_2 - x}$ oder $\frac{y - y_2}{x - x_2}$ schreiben.

Aufgabe: 1. Diese Gleichung (3) auf die Normalform zu bringen.

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

$$y = \underbrace{\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}_{M} x \underbrace{- \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 + y_1}_{n}$$

2. Die Richtigkeit dieser Gleichung ist an Fig. 15 nachzuweisen.

Übung: 1. Gegeben sei Punkt ($x_1 = 3$; $y_1 = 5$ cm) und Punkt ($x_1 = 4$; $y_1 = -3$ cm). Wie heißt die Gleichung der Geraden, die durch diese Punkte geht?

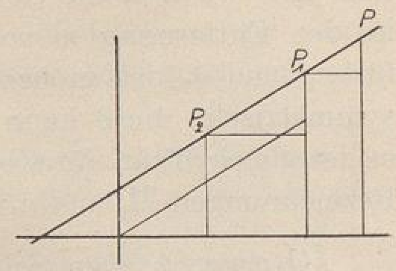

Fig. 15.

2. Die Koordinaten der Endpunkte einer Strecke sind $x_1 = 2$, $y_1 = -3$ und $x_2 = -4$, $y_2 = 2$ cm. Wie lang ist die Strecke, und wie groß ist ihre Steigung und ihr Steigungswinkel?

Aufgabe: **Den Schnittpunkt zweier Geraden zu finden.**

Die Gleichung der einen Geraden sei:

$$y = M_1 x + n_1$$

und die der anderen

$$y = M_2 x + n_2$$

Wenn ein Punkt zugleich auf zwei Linien liegt, so müssen seine Koordinaten die Gleichungen beider Linien erfüllen. Hat der Schnittpunkt also die Koordinaten x_1 und y_1, so ist

$$y_1 = M_1 x_1 + n_1$$

und

$$y_1 = M_2 x_1 + n_2$$

Diese zwei Gleichungen haben die zwei Unbekannten x_1 und y_1, die sich demnach berechnen lassen:

$$M_1 x_1 + n_1 = M_2 x_1 + n_2$$

$$x_1 (M_1 - M_2) = n_2 - n_1$$

$$x_1 = \frac{n_2 - n_1}{M_1 - M_2}$$

$$y_1 = M_1 \frac{n_2 - n_1}{M_1 - M_2} + n_1 = \frac{M_1 n_2 - M_1 n_1 + M_1 n_1 - M_2 n_1}{M_1 - M_2}$$

$$y_1 = \frac{M_1 n_2 - M_2 n_1}{M_1 - M_2}$$

Bemerkung: Die Gleichungen der Geraden sind vom ersten Grade, wir erhalten aus ihnen nur ein x und ein y, und diese entsprechen nur **einem** Schnittpunkt; durch die Rechnung wird also bestätigt, daß zwei Gerade sich nur in **einem** Punkte schneiden. — Ist $n_1 = n_2$, so wird $x_1 = 0$ und $y_1 = n$, d. h. die Geraden schneiden sich auf der Y-Achse in der Entfernung n vom Achsenschnitt. — Der Ausdruck für x_1 und y_1 ist in bezug auf M_1 und M_2 sowie n_1 und n_2 symmetrisch; diese kann man also zugleich vertauschen, d. h. es ist gleichgültig, für welche von den beiden Geraden man die Bezeichnungen M_1 und n_1 und für welche man M_2 und n_2 wählt.

Übung: 1. Den Schnittpunkt der Geraden $y = \frac{2}{3}x + 2$ und $y = -\frac{4}{3}x - 3$ zu berechnen. Die Richtigkeit prüft man durch Einsetzen und durch eine maßstäbliche Zeichnung.

2. Die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit den Achsen zu bestimmen.

Parallele Gerade.

Parallele Gerade haben dieselbe Steigung, also dasselbe M. Hierdurch wird in obigen Gleichungen für die Koordinaten (x_1 und y_1) der Schnittpunkte der Nenner gleich Null; diese Koordinaten werden also unendlich groß, d. h. der Treffpunkt von Parallelen liegt im Unendlichen.

Die Gleichung einer Geraden, deren Steigung bekannt ist, und die durch einen gegebenen Punkt geht.

Die gegebene Steigung sei M. Wenn nun der Punkt, durch den die Gerade gehen soll, die Koordinaten x_1 und y_1 hat und wie immer x und y die Koordinaten eines beliebigen Punktes sind, so ist die Steigung $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$. Demnach lautet die Gleichung der gesuchten Geraden

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = M \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Aufgabe: Man bringe diese Gleichung auf die Normalform.

Übung: 1. Die Gleichung einer Geraden aufzustellen, die der Geraden $y = \frac{2}{3}x + 5$ parallel ist und durch den Punkt ($x_1 = 3$, $y_1 = -2$ Einheiten) geht.

2. Die Gleichung einer Geraden aufzustellen, die durch den Punkt ($x_1 = -2$, $y_1 = 4$ Einheiten) geht und den Steigungswinkel 45^0 (30^0, 60^0) hat.

Anwendung: Die Selbstkosten K in Mark eines Meters Schweißnaht bei s mm Blechstärke können näherungsweise nach folgenden Formeln berechnet werden (Fig. 16):

$K = 0{,}15 + 0{,}095\, s$ bei Azetylen-Sauerstoffschweißung,

$K = 0{,}4 \;\; + 0{,}06\, s$ bei Wassergasschweißung.

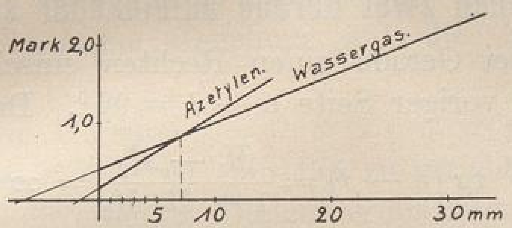

Fig. 16.

Man stelle die Formeln zeichnerisch dar. Welche Art Linien ergibt sich für die Gleichungen? Von welcher Blechstärke an ist Wassergasschweißung billiger als Azetylen-Sauerstoffschweißung?

Anleitung: Die gesuchte Blechstärke ergibt sich als Abszisse des Schnittpunktes der Azetylen-Sauerstofflinie mit der Wassergaslinie (Fig. 16).

Der Winkel zweier Geraden.

Die Geraden seien $y = M_1 x + n_1$ und $y = M_2 x + n_2$. Man zieht durch den Schnittpunkt der Achsen Parallele zu den Geraden (Fig. 17). Diese schließen mit der X-Achse dieselben Steigungswinkel α bzw. β ein wie die gegebenen Geraden. Der Winkel zwischen den Geraden ebenso wie derjenige zwischen den Parallelen ist $\alpha - \beta$.

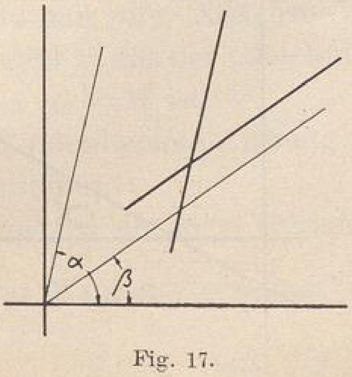

Fig. 17.

Aus der Trigonometrie ist nun bekannt, daß

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

ist. Also ist

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{M_1 - M_2}{1 + M_1 M_2}$$

Damit ist der Winkel zweier Geraden bestimmt.

Bemerkung: Die Formel zeigt, daß die Tangens des Winkels zweier Geraden desto größer wird, je mehr die Steigungen der Geraden verschieden sind. Bei stumpfen Winkeln ist auf das Vorzeichen zu achten.

Wann stehen zwei Gerade aufeinander senkrecht?

Wenn zwei Gerade einen Rechten einschließen, so ist in Fig. 17 auf voriger Seite $\alpha - \beta = 90^0$. Demnach wird

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{M_1 - M_2}{1 + M_1 M_2} = \infty$$

Dies tritt ein, wenn der Nenner $1 + M_1 M_2 = 0$ ist. Aus letzterem folgt:

$$M_1 = -\frac{1}{M_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Die Steigung der einen Geraden ist also der negative und reziproke Wert der Steigung der anderen.

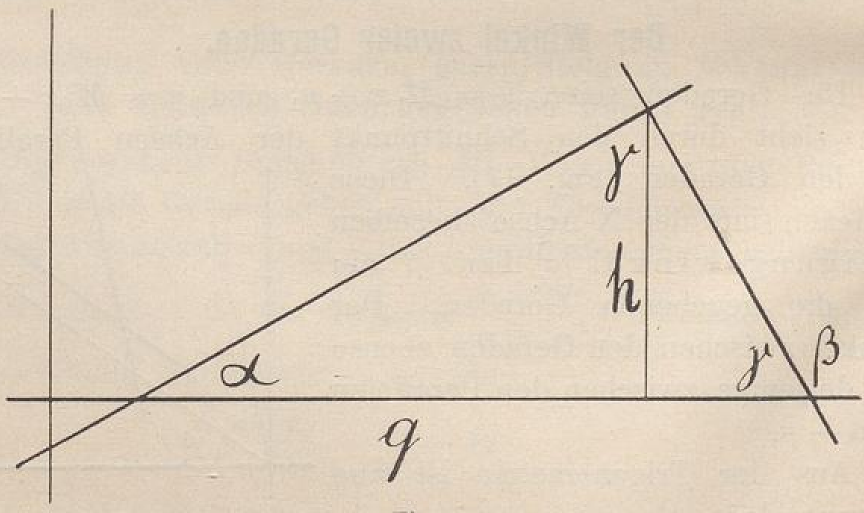

Fig. 18.

Bemerkung: Daß $M_1 \cdot M_2 = -1$ ist, läßt sich auch aus nebenstehender Fig. 18 ableiten.

$M_1 = \operatorname{tg} \alpha = h : q$. $M_2 = \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \gamma = -(q : h)$

Die Gleichung des Lotes.

Errichtet man ein Lot auf der Geraden $y = Mx + n$, so ist seine Steigung gleich $-\frac{1}{M}$. Geht das Lot nun durch den Punkt $x_1 y_1$, so lautet gemäß Gleichung (4) seine Gleichung

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{1}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Übung: 1. Diese Gleichung auf die Normalform zu bringen.

2. Auf der Geraden $y = \sqrt{3} \cdot x + 2$ in dem Fußpunkt, dessen Abszisse $x_1 = 1$ ist, ein Lot zu errichten.

Man bringe die erhaltene Gleichung des Lotes auf die Normalform und prüfe M und n an einer maßstäblichen Zeichnung.

3a. Man fällt vom Punkt $(x_1 y_1)$ ein Lot auf die Gerade $y = Mx + n$ und es soll die Gleichung des Lotes aufgestellt werden. Ferner suche man die Koordinaten des Fußpunktes.

b. Es sei z. B. vom Punkt ($x_1 = 3$, $y_1 = 2$ dm) auf die Gerade $y = \sqrt{2} \cdot x + 4$ ein Lot gefällt. Wie groß sind die Koordinaten $x_2 y_2$ des Fußpunktes? Zeichnerische Prüfung.

4a. Die Länge dieses Lotes zwischen $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ zu finden. Man berechnet zuerst x_2 und y_2, und dann aus x_1 x_2 y_1 y_2 nach Gleichung (1) das Lot, Dann berechne man die Länge des Lotes von $x_1 y_1$ bis zum Schnitt mit der X-Achse im Punkte $x_3 y_3$. Man berechnet hierbei zuerst x_3 aus der Gleichung des Lotes und aus der Bedingung, daß $y_3 = 0$ ist.

b. Man berechne r für das vorige Zahlenbeispiel (Übung 3) und prüfe das Ergebnis an einer Zeichnung.

5. Die Koordinaten des Schnittpunktes der zwei Geraden $y = \frac{1}{2} x + 2$ und $y = x + 1$ und den Winkel derselben zu bestimmen.

6. Wie groß ist die Steigung der Geraden, die mit der gegebenen Geraden $y = 2x + 3$ einen Winkel von 45° (30°, 60° usw.) einschließt?

7. Ein Dreieck ist durch die Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben: $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; $x_2 = -2$, $y_2 = 1$; $x_3 = 1$, $y_3 = -4$ m. Wie heißen die Gleichungen der Seiten, wie lang sind die Seiten, und welche Winkel schließen sie ein? Man beachte, daß man nicht die Außenwinkel berechnet.

8. Man berechne die Winkel an dem in Fig. 6 gezeichneten Grundstück.

Der Kreis.

Die Mittelpunktsgleichung des Kreises.

Ein Kreis ist eine Linie, deren Punkte von einem gegebenen Punkte, dem Mittelpunkte, gleiche Entfernung haben. Zieht man von einem beliebigen Punkte P seines Umfanges (Fig. 19) den Radius r und die Koordinaten x und y, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad . \; . \; . \; (7)$$

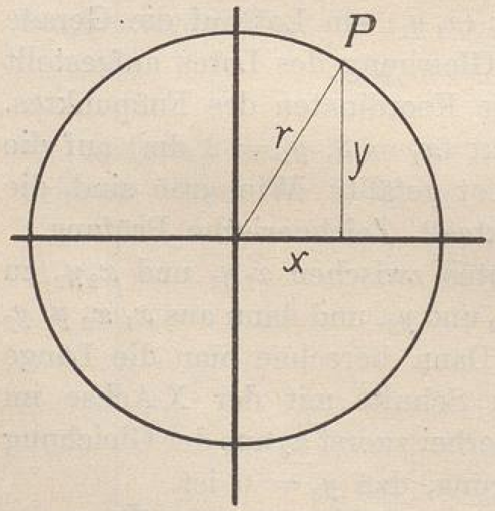

Fig. 19.

Da diese Gleichung von den Koordinaten eines jeden Punktes der Kreislinie erfüllt wird, so ist dies die Gleichung des Kreises.

Bemerkung: Beide Koordinaten x und y kommen quadratisch vor, die Gleichung eines Kreises ist also vom zweiten Grade. Setzt man in der erhaltenen Gleichung des Kreises $x = 0$, so wird $y = \pm r$. Setzt man $y = 0$, so wird $x = \pm r$. Der Kreis schneidet also die Achsen viermal in der Entfernung r.