Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Der Kreis.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

6. Wie groß ist die Steigung der Geraden, die mit der gegebenen Geraden $y = 2x + 3$ einen Winkel von 45° (30°, 60° usw.) einschließt?

7. Ein Dreieck ist durch die Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben: $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; $x_2 = -2$, $y_2 = 1$; $x_3 = 1$, $y_3 = -4$ m. Wie heißen die Gleichungen der Seiten, wie lang sind die Seiten, und welche Winkel schließen sie ein? Man beachte, daß man nicht die Außenwinkel berechnet.

8. Man berechne die Winkel an dem in Fig. 6 gezeichneten Grundstück.

Der Kreis.

Die Mittelpunktsgleichung des Kreises.

Ein Kreis ist eine Linie, deren Punkte von einem gegebenen Punkte, dem Mittelpunkte, gleiche Entfernung haben.

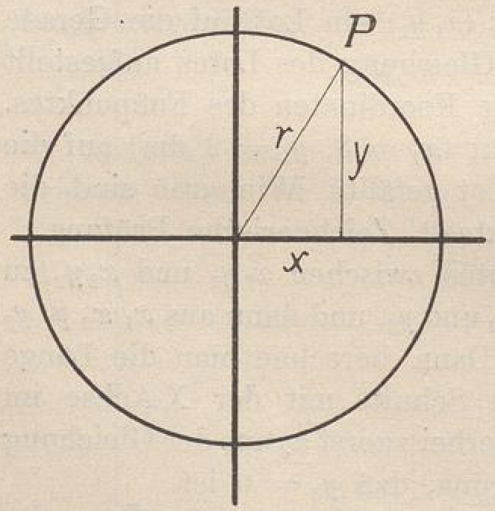

Fig. 19.

Zieht man von einem beliebigen Punkte P seines Umfanges (Fig. 19) den Radius r und die Koordinaten x und y, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad . \; . \; . \; (7)$$

Da diese Gleichung von den Koordinaten eines jeden Punktes der Kreislinie erfüllt wird, so ist dies die Gleichung des Kreises.

Bemerkung: Beide Koordinaten x und y kommen quadratisch vor, die Gleichung eines Kreises ist also vom zweiten Grade. Setzt man in der erhaltenen Gleichung des Kreises $x = 0$, so wird $y = \pm r$. Setzt man $y = 0$, so wird $x = \pm r$. Der Kreis schneidet also die Achsen viermal in der Entfernung r.

Da $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ ist, so gehören zu jedem x zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von y, d. h. die Peripherie liegt symmetrisch zur X-Achse. Ebenso geht aus der Gleichung für $x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}$ hervor, daß sie symmetrisch zur Y-Achse liegt. — Für ein x, das größer als r ist, wird y imaginär, d. h. dort befinden sich keine Punkte des Kreises mehr. Ebenso gibt es für ein y, das größer als r ist, keine Punkte des Kreises.

In der Formel des Kreises kann man x und y vertauschen, d. h. man kann das Achsenkreuz um 90^0 drehen, ohne daß sich die Gleichung des Kreises ändert.

Übung: 1. Man zeichne die Kurve mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ und überzeuge sich durch Nachmessen von der Art der Kurve.

Der Schnittpunkt eines Kreises und einer Geraden.

Wenn ein Punkt auf zwei Linien liegt, so müssen, wie schon erwähnt, seine Koordinaten die Gleichungen beider Linien erfüllen.

Gegeben ist ein Kreis mit der Gleichung $r^2 = x^2 + y^2$ und eine Gerade $y = Mx + n$. Der Schnittpunkt beider Linien liegt sowohl auf der einen Linie wie auf der anderen. Hat er also die Koordinaten x_1 und y_1, so müssen sie beide Gleichungen erfüllen. Also ist:

$$r^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2$$
$$y_1 = Mx_1 + n$$

Wir erhalten hiermit zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten x_1 und y_1, die wir jetzt berechnen können.

Man quadriert die zweite Gleichung, setzt sie in die erste ein und erhält schließlich zwei Werte:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-Mn \pm \sqrt{r^2(1 + M^2) - n^2}}{1 + M^2}$$

Setzt man x_1 in die zweite Gleichung, nämlich $y_1 = Mx_1 + n$ ein, so erhält man die zugehörige andere Unbekannte y_1; verfährt man ebenso mit x_2, so erhält man den zu x_2 gehörigen Wert von y_2:

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{n \pm M\sqrt{r^2(1+M^2) - n^2}}{1+M^2}$$

Wir haben also zwei Paare von Koordinaten erhalten, d. h. Kreis und Gerade schneiden sich im allgemeinen in zwei Punkten: P_1 mit den Koordinaten $x_1\, y_1$ und P_2 mit den Koordinaten $x_2\, y_2$.

Bemerkung: Hierbei sind drei Fälle möglich:

1. Ist $r^2(1+M^2) > n^2$, so erhält man zwei Werte für x_1, d. h. die Gerade ist eine Sekante.

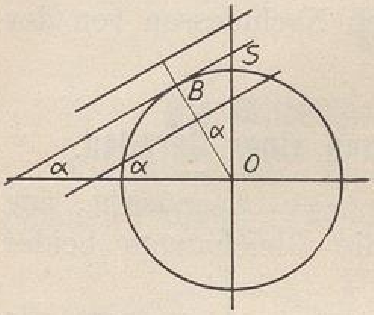

Fig. 20.

2. Ist $r^2(1+M^2) = n^2$, so erhält man einen Wert für x_1, d. h. die Gerade ist eine Tangente.

3. Ist $r^2(1+M^2) < n^2$, so erhält man keinen reellen Wert für x_1, d. h. die Gerade schneidet den Kreis nicht.

Nachweis dieser Fälle an Figur 20: Man beschreibt einen Einheitskreis, d. h. einen Kreis mit dem Radius $R = 1$ Längeneinheit. Errichtet man im Endpunkt eines beliebigen Radius ein Lot, so ist dies eine Tangente. Dann ist $BO = 1$ und $BS = \operatorname{tg}\alpha = M$. Folglich ist bei der Tangente:

$$n^2 = OS^2 = BO^2 + BS^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + M^2.$$

Die Figur zeigt ferner, daß bei einer Sekante der Abschnitt n auf der Y-Achse kleiner und bei einer außerhalb des Kreises liegenden Geraden größer als $OS = \sqrt{1+M^2}$ ist.

Aufgabe: 1. Die Schnittpunkte einer Kurve mit der X-Achse bestimmt man, wenn man in der Gleichung der Kurve $y = 0$ setzt und dann x berechnet. Wie groß sind also beim Kreise die Abschnitte auf den Achsen?

Übung: 1. Die Schnittpunkte des Kreises $36 = x^2 + y^2$ und der Geraden $y = 2x + 4$ zu bestimmen.

2. In dem Kreis $x^2 + y^2 = 16$ lege man durch den Punkt $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ eine Sehne, die um 120^0 gegen den positiven Teil der X-Achse geneigt ist. Man suche die Gleichung dieser Sehne, die Koordinaten ihrer Schnittpunkte und ihre Länge.

Die Steigung einer Kurve.

Eine Sekante möge eine Kurve in zwei Punkten schneiden. Dreht man die Sekante, so rückt der eine Schnittpunkt dem andern immer näher, bis er ihm schließlich unendlich nahe ist; die Sekante ist damit zur Tangente geworden.

Die Verbindung dieser unendlich nahe liegenden Punkte ist eine unendlich kleine Sehne, die mit der Peripherie zusammenfällt. Die Richtung dieser Sehne ist die Richtung der Kurve an dieser Stelle. Die Verlängerung dieser Sehne ist eine Tangente. Letztere hat also dieselbe Steigung wie die Kurve am Berührungspunkt.

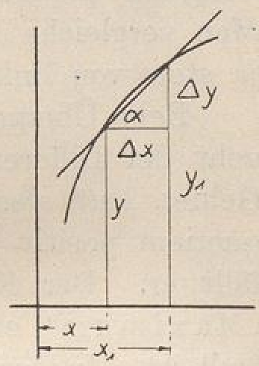

Fig. 21.

Die Schnittpunkte der Sehne mögen die Koordinaten $x\,y$ und $x_1\,y_1$ haben (Fig. 21). Dann ist die Steigung der Sehne

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\triangle\, y}{\triangle\, x}$$

Wird die Sehne zur Tangente, so werden die Stücke $\triangle\, y$ und $\triangle\, x$ unendlich klein; man schreibt sie $d\,y$ und $d\,x$. Die Steigung der Tangente ist gleich derjenigen der Kurve und zwar gleich $\frac{d\,y}{d\,x}$. Diese Größe wird Differentialquotient genannt[1]).

Der Differentialquotient der Gleichung einer Kurve ändert sich ständig mit den Koordinaten des Punktes.

[1]) Düsing, Elemente der Differential- und Integralrechnung S. 5. Die Kenntnis der einfachsten Differenzierungen und Integrierungen, namentlich die der Potenz werden vorausgesetzt: $\frac{d\,(x^m)}{d\,y} = m\,x^{m-1}$ und $\int x^m \cdot d\,x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$.

Die Steigung des Kreises.

Der Differentialquotient der Gleichung des Kreises ergibt sich wie folgt:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Im ersten Quadranten sind x und y positiv, der Differentialquotient ist also negativ. In der Tat ist die Steigung hier negativ, denn die Kreislinie fällt.

Im zweiten Quadranten ist x negativ und y positiv. Setzt man dies ein, so wird der Differentialquotient, d. h. die Steigung, positiv, der Kreis steigt von links nach rechts. Man vergleiche Fig. 22. Den Verlauf einer Linie haben wir ja stets von links nach rechts gerechnet.

Beim Übergang aus dem zweiten in den ersten Quadranten geht der Differentialquotient aus dem positiven ins negative Gebiet, muß also durch Null gehen. Solange der Differentialquotient positiv ist, steigt der Kreis; sobald er negativ wird, fällt er. Der Kreis hat also seinen höchsten Punkt, sein „Maximum“ erreicht, wenn der Differentialquotient gleich Null ist. In der Tat ist hier die Steigung gleich Null, denn die Tangente geht parallel zur X-Achse.

Wie stark der Kreis steigt oder fällt, ersieht man aus dem absoluten Werte des Differentialquotienten. Je größer der absolute Wert von x und je kleiner also der von y ist, desto stärker steigt oder fällt der Kreis.

Für $y = o$ wird der Differentialquotient, also auch die Steigung, unendlich groß, d, h. die Tangente geht zur Y-Achse parallel.

Das Vorzeichen des Differentialquotienten gibt uns also die Art des Verlaufs des Kreises und auch jeder Kurve an, d. h. ob sie steigt oder fällt. Die absolute Größe des Differentialquotienten gibt uns die Stärke der Änderung, also der Steigung oder des Gefälles an.

Übung: Wie verhält sich der Differentialquotient und der Verlauf des Kreises im dritten und vierten Quadranten?

Die Tangente an den Kreis.

Die Tangente hat, wie wir gesehen haben, dieselbe Richtung und damit dieselbe Steigung wie der Kreis im Berührungspunkt, nämlich gemäß Gleichung (8):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Dies ist die Steigung des Kreises im allgemeinen; sie ändert sich von Punkt zu Punkt. Die Steigung beim Berührungspunkt $(x_1 y_1)$ ist also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1}{y_1}$$

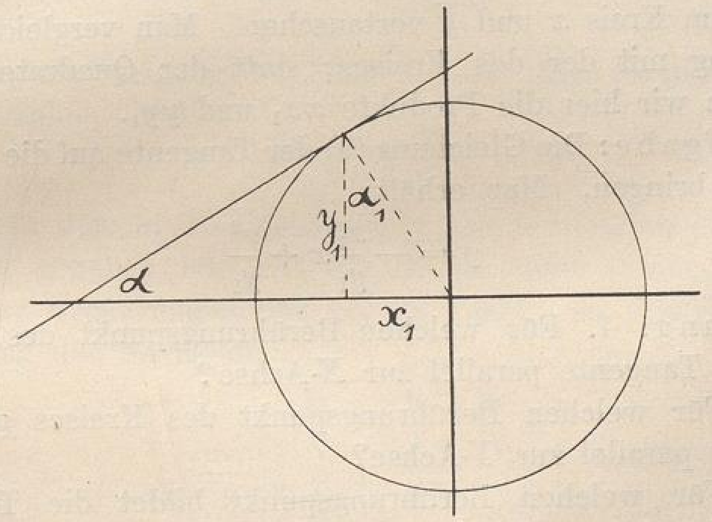

Fig. 22

Diese Steigung ergibt sich auch aus Fig. 22, in welcher

$$M = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{x_1}{y_1}$$

ist. Wir kennen jetzt von der Tangente die Steigung $\left(-\frac{x_1}{y_1}\right)$ und einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt. Die Gleichung einer Geraden, deren Steigung M wir kennen, und die durch den Punkt $(x_1 y_1)$ geht, war nach Gleichung (4):

$$M = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

Wird die Steigung M am Berührungspunkt eingesetzt, so erhält man als Gleichung der Tangente:

$$-\frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

Diese Gleichung kann noch vereinfacht werden:

$$x_1^2 - xx_1 = -y_1^2 + yy_1$$
$$x_1^2 + y_1^2 = xx_1 + yy_1$$
$$r^2 = xx_1 + yy_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Bemerkung: Jedes Glied dieser Formel ist von der zweiten Dimension. Auch in dieser Formel kann man wie immer am Kreis x und y vertauschen. Man vergleiche diese Gleichung mit der des Kreises; statt der Quadrate x^2 und y^2 haben wir hier die Produkte xx_1 und yy_1.

Aufgabe: Die Gleichung (9) der Tangente auf die Normalform zu bringen. Man erhält:

$$y = -\frac{x_1}{y_1} x + \frac{r^2}{y_1}$$

Übung: 1. Für welchen Berührungspunkt des Kreises geht die Tangente parallel zur X-Achse?

2. Für welchen Berührungspunkt des Kreises geht die Tangente parallel zur Y-Achse?

3. Für welchen Berührungspunkt bildet die Tangente einen Winkel von 45^0 mit dem positiven Teil der X-Achse?

4. Man suche die Koordinaten der Berührungspunkte der Tangente, die eine Steigung von 30^0 (60^0, 120^0, 135^0, 150^0) hat. Dann stelle man die Gleichung der Tangenten auf. (Man setze zunächst die Steigung der Tangente gleich der des Kreises im Berührungspunkt).

5. Man bestimme die Steigung des Kreises $49 = x^2 + y^2$ in den Punkten mit den Abszissen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. (Man

berechne zuerst die zu den Abscissen gehörigen Ordinaten der Punkte des Kreises.)

6. An welchen Punkten ist die Steigung des Kreises gleich 1?

Die Normale des Kreises.

Errichtet man auf der Tangente einer Kurve im Berührungspunkt ein Lot, so nennt man dies die Normale. Wir wissen zwar aus der Planimetrie, daß dies beim Kreis der Radius ist, doch soll die Gleichung der Normalen zur Übung analytisch abgeleitet werden.

Die Steigung der Tangente war $\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1}{y_1}$. Da die Normale senkrecht zur Tangente steht, so ist ihre Steigung

$$M_2 = -\frac{1}{M_1}$$

wenn M_1 die Steigung der Tangente ist. Also ist die Steigung der Normalen

$$M_2 = +\frac{y_1}{x_1}$$

Setzt man dies in die Gleichung (4) einer Geraden ein, deren Steigung gegeben ist, und die durch einen Punkt, nämlich hier den Berührungspunkt $(x_1 y_1)$, geht, so erhält man als Gleichung der Normalen:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$y_1 x - y_1 x_1 = y x_1 - y_1 x_1$$

$$y = \frac{y_1}{x_1} x$$

Bemerkung: In dieser Gleichung ist $n = 0$, also geht die Normale durch den Achsenschnittpunkt, d. h. durch den Mittelpunkt des Kreises. Hierdurch wird bestätigt, daß die Normale ein Radius ist; und die Steigung eines Radius ist, wie die Fig. 23 zeigt, gleich $\frac{y_1}{x_1}$.

Die Berührungsgrößen.

Unter der Subnormalen OF (Fig. 23) versteht man die Projektion der Normalen auf die X-Achse, und unter der Subtangente FS versteht man die Projektion der Tangente auf die X-Achse. Die Länge der Tangente PS und die der Normalen OP mißt man vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der X-Achse.

Die Längen dieser vier Strecken sollen berechnet werden.

1. Auf planimetrischem Wege.

Die Subnormale ist nach Fig. 23 offenbar x_1.

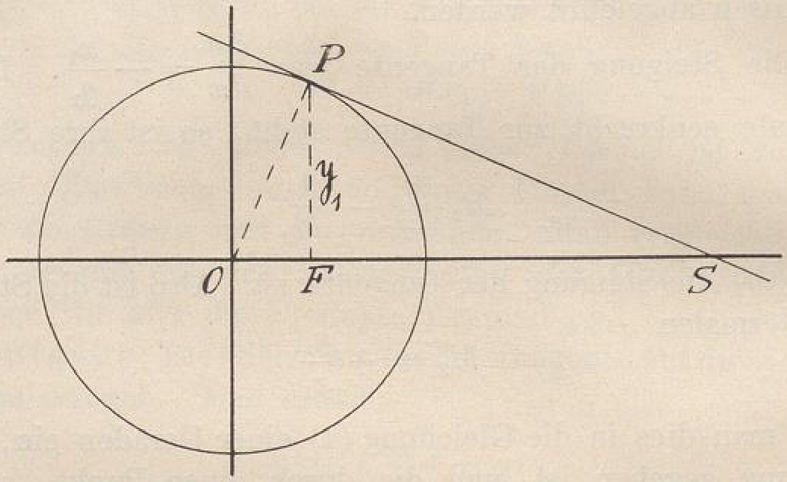

Fig. 23.

Die Ordinate y_1 ist die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und x_1. Also ist

$$\text{die Subtangente} = \frac{y_1^2}{x_1} = \frac{r^2 - x_1^2}{x_1}$$

$$\text{die Normale} = r.$$

Die Tangente t ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OPS und OPF $\frac{t}{y_1} = \frac{r}{x_1}$ oder $t = \frac{r y_1}{x_1}$

2. Auf analytischem Wege.

Die Subnormale und Normale ergeben sich sofort wie oben.

Die Länge der Subtangente und der Tangente kann aber zur Übung auch analytisch abgeleitet werden:

In der Gleichung der Tangente $r^2 = xx_1 + yy_1$ möge der Schnittpunkt der Tangente mit der X-Achse S heißen und die Koordinaten x_2 und y_2 haben. Dann lautet die Gleichung für diesen Schnittpunkt $r^2 = x_2 x_1 + y_2 y_1$. Da nun $y_2 = 0$ ist, so ist $x_2 = \frac{r^2}{x_1}$. Zieht man x_1 von dem soeben erhaltenen x_2 ab, so bleibt:

$$\text{die Subtangente} = \frac{r^2}{x_1} - x_1 = \frac{r^2 - {x_1}^2}{x_1} \text{ wie oben.}$$

Um die Länge der Tangente zu erhalten, kann man die Koordinaten von P und S in die Gleichung (1) für die Entfernung zweier Punkte einsetzen:

$$t^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2$$

$$t^2 = (y_1 - 0)^2 + \left(x_1 - \frac{r^2}{x_1}\right)^2$$

$$= {y_1}^2 + {x_1}^2 - 2r^2 + \frac{r^4}{{x_1}^2}$$

$$= -r^2 + \frac{r^4}{{x_1}^2}$$

$$= \frac{r^2}{{x_1}^2}(-{x_1}^2 + r^2)$$

$$= \frac{r^2\, {y_1}^2}{{x_1}^2}$$

$$\text{Also ist die Tangente} = \frac{r\, y_1}{x_1} \text{ wie oben.}$$

Übung: 1. Man lege eine Tangente unter 30° Steigung an den Kreis, stelle ihre Gleichung auf und bestimme die Abschnitte dieser Tangente auf den beiden Achsen. (Siehe Seite 24 Übung 4. Man setze in der Gleichung einmal x und einmal y gleich Null.)

2. Man bestimme ebenso die Abschnitte der Tangenten unter 45° (60°, 120°, 135°, 150°) Steigung.

3. An den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ lege man im Punkte ($x_1 = 2$) des Kreises eine Tangente an und bestimme die Berührungsgrößen.

Die Ähnlichkeit der Kreise.

Die Gleichungen aller Kreise, bezogen auf den Mittelpunkt, unterscheiden sich nur durch die Größe der Konstanten r; alle Kreise müssen also einander ähnlich und entsprechende Strecken in ihnen proportional sein.

In Fig. 24 ist ein Kreis mit r und einer mit $2\,r$ als Radius geschlagen. Für den kleinen Kreis ist:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ und } y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Für den großen Kreis ist:

$$\xi^2 + \eta^2 = (2\,r)^2 \text{ und } \eta = \sqrt{(2\,r)^2 - \xi^2}$$

Nimmt man nun in dem doppelt so großen Kreis eine doppelt so große Abscisse ($\xi = 2\,x$), so erhält man eine doppelt so große Ordinate $\eta = \sqrt{(2\,r)^2 - (2\,x)^2} = 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\,y$. Dies ist in Fig. 24 für 45^0 gezeichnet.

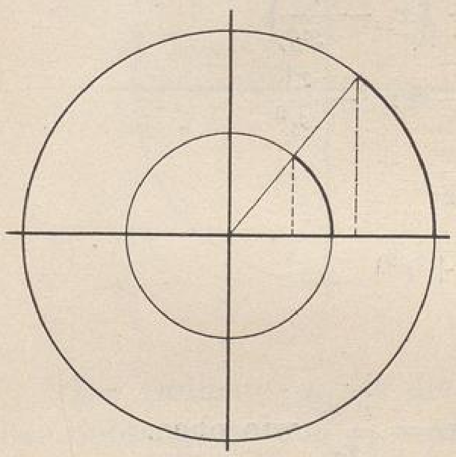

Fig. 24.

Auch entsprechende Bogen sind einander ähnlich, z. B. die Bogenstücke, die in Fig. 24 hervorgehoben sind. Das größere flachere Stück entsteht aus dem kleineren durch Zeichnung in einem größeren Maßstab.

Da sich die Flächen ähnlicher Figuren wie die Quadrate entsprechender Strecken verhalten, so verhalten sich die Flächen der Kreise oder entsprechender Sektoren oder Segmente wie die Quadrate der Radien oder entsprechender Strecken.

Verbindet man bei zwei ähnlichen Figuren entsprechende Punkte, so gehen diese Geraden durch einen Punkt, den Ähnlichkeitspunkt. Legt man z. B. die Kreise konzentrisch aufeinander, so ist der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Ähnlichkeitspunkt, und die gemeinsamen Radien verbinden entsprechende Punkte.