Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Schnittpunkte eines Kreises und einer Geraden

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Da $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ ist, so gehören zu jedem x zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von y, d. h. die Peripherie liegt symmetrisch zur X-Achse. Ebenso geht aus der Gleichung für $x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}$ hervor, daß sie symmetrisch zur Y-Achse liegt. — Für ein x, das größer als r ist, wird y imaginär, d. h. dort befinden sich keine Punkte des Kreises mehr. Ebenso gibt es für ein y, das größer als r ist, keine Punkte des Kreises.

In der Formel des Kreises kann man x und y vertauschen, d. h. man kann das Achsenkreuz um 90^0 drehen, ohne daß sich die Gleichung des Kreises ändert.

Übung: 1. Man zeichne die Kurve mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ und überzeuge sich durch Nachmessen von der Art der Kurve.

Der Schnittpunkt eines Kreises und einer Geraden.

Wenn ein Punkt auf zwei Linien liegt, so müssen, wie schon erwähnt, seine Koordinaten die Gleichungen beider Linien erfüllen.

Gegeben ist ein Kreis mit der Gleichung $r^2 = x^2 + y^2$ und eine Gerade $y = Mx + n$. Der Schnittpunkt beider Linien liegt sowohl auf der einen Linie wie auf der anderen. Hat er also die Koordinaten x_1 und y_1, so müssen sie beide Gleichungen erfüllen. Also ist:

$$r^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2$$
$$y_1 = Mx_1 + n$$

Wir erhalten hiermit zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten x_1 und y_1, die wir jetzt berechnen können.

Man quadriert die zweite Gleichung, setzt sie in die erste ein und erhält schließlich zwei Werte:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-Mn \pm \sqrt{r^2(1 + M^2) - n^2}}{1 + M^2}$$

Setzt man x_1 in die zweite Gleichung, nämlich $y_1 = Mx_1 + n$ ein, so erhält man die zugehörige andere Unbekannte y_1; verfährt man ebenso mit x_2, so erhält man den zu x_2 gehörigen Wert von y_2:

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{n \pm M\sqrt{r^2(1+M^2)-n^2}}{1+M^2}$$

Wir haben also zwei Paare von Koordinaten erhalten, d. h. Kreis und Gerade schneiden sich im allgemeinen in zwei Punkten: P_1 mit den Koordinaten $x_1\, y_1$ und P_2 mit den Koordinaten $x_2\, y_2$.

Bemerkung: Hierbei sind drei Fälle möglich:

1. Ist $r^2(1+M^2) > n^2$, so erhält man zwei Werte für x_1, d. h. die Gerade ist eine Sekante.

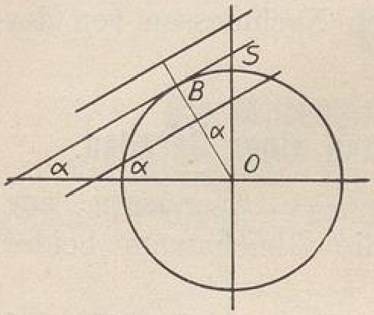

Fig. 20.

2. Ist $r^2(1+M^2) = n^2$, so erhält man einen Wert für x_1, d. h. die Gerade ist eine Tangente.

3. Ist $r^2(1+M^2) < n^2$, so erhält man keinen reellen Wert für x_1, d. h. die Gerade schneidet den Kreis nicht.

Nachweis dieser Fälle an Figur 20: Man beschreibt einen Einheitskreis, d. h. einen Kreis mit dem Radius $R = 1$ Längeneinheit. Errichtet man im Endpunkt eines beliebigen Radius ein Lot, so ist dies eine Tangente. Dann ist $BO = 1$ und $BS = \operatorname{tg}\alpha = M$. Folglich ist bei der Tangente:

$$n^2 = OS^2 = BO^2 + BS^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + M^2.$$

Die Figur zeigt ferner, daß bei einer Sekante der Abschnitt n auf der Y-Achse kleiner und bei einer außerhalb des Kreises liegenden Geraden größer als $OS = \sqrt{1+M^2}$ ist.

Aufgabe: 1. Die Schnittpunkte einer Kurve mit der X-Achse bestimmt man, wenn man in der Gleichung der Kurve $y = 0$ setzt und dann x berechnet. Wie groß sind also beim Kreise die Abschnitte auf den Achsen?

Übung: 1. Die Schnittpunkte des Kreises $36 = x^2 + y^2$ und der Geraden $y = 2x + 4$ zu bestimmen.

2. In dem Kreis $x^2 + y^2 = 16$ lege man durch den Punkt $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ eine Sehne, die um 120^0 gegen den positiven Teil der X-Achse geneigt ist. Man suche die Gleichung dieser Sehne, die Koordinaten ihrer Schnittpunkte und ihre Länge.

Die Steigung einer Kurve.

Eine Sekante möge eine Kurve in zwei Punkten schneiden. Dreht man die Sekante, so rückt der eine Schnittpunkt dem andern immer näher, bis er ihm schließlich unendlich nahe ist; die Sekante ist damit zur Tangente geworden.

Die Verbindung dieser unendlich nahe liegenden Punkte ist eine unendlich kleine Sehne, die mit der Peripherie zusammenfällt. Die Richtung dieser Sehne ist die Richtung der Kurve an dieser Stelle. Die Verlängerung dieser Sehne ist eine Tangente. Letztere hat also dieselbe Steigung wie die Kurve am Berührungspunkt.

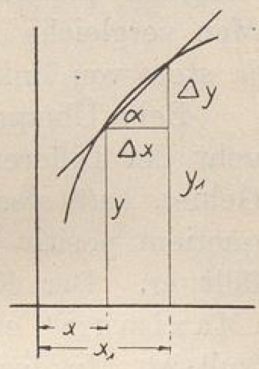

Fig. 21.

Die Schnittpunkte der Sehne mögen die Koordinaten $x\,y$ und $x_1\,y_1$ haben (Fig. 21). Dann ist die Steigung der Sehne

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\triangle\, y}{\triangle\, x}$$

Wird die Sehne zur Tangente, so werden die Stücke $\triangle\, y$ und $\triangle\, x$ unendlich klein; man schreibt sie $d\,y$ und $d\,x$. Die Steigung der Tangente ist gleich derjenigen der Kurve und zwar gleich $\frac{d\,y}{d\,x}$. Diese Größe wird Differentialquotient genannt [1]).

Der Differentialquotient der Gleichung einer Kurve ändert sich ständig mit den Koordinaten des Punktes.

---

[1]) Düsing, Elemente der Differential- und Integralrechnung S. 5. Die Kenntnis der einfachsten Differenzierungen und Integrierungen, namentlich die der Potenz werden vorausgesetzt: $\frac{d\,(x^m)}{d\,y} = m\,x^{m-1}$ und $\int x^m \cdot d\,x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$.