



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Übungen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78413](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78413)

führt man ebenso mit x_2 , so erhält man den zu x_2 gehörigen Wert von y_2 :

$$y_2 = \frac{n \pm M \sqrt{r^2 (1 + M^2) - n^2}}{1 + M^2}$$

Wir haben also zwei Paare von Koordinaten erhalten, d. h. Kreis und Gerade schneiden sich im allgemeinen in zwei Punkten: P_1 mit den Koordinaten $x_1 y_1$ und P_2 mit den Koordinaten $x_2 y_2$.

Bemerkung: Hierbei sind drei Fälle möglich:

1. Ist $r^2 (1 + M^2) > n^2$, so erhält man zwei Werte für x_1 , d. h. die Gerade ist eine Sekante.

2. Ist $r^2 (1 + M^2) = n^2$, so erhält man einen Wert für x_1 , d. h. die Gerade ist eine Tangente.

3. Ist $r^2 (1 + M^2) < n^2$, so erhält man keinen reellen Wert für x_1 , d. h. die Gerade schneidet den Kreis nicht.

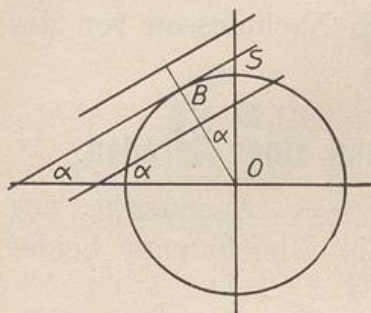


Fig. 20.

Nachweis dieser Fälle an Figur 20:

Man beschreibt einen Einheitskreis, d. h. einen Kreis mit dem Radius $R = 1$ Längeneinheit. Errichtet man im Endpunkt eines beliebigen Radius ein Lot, so ist dies eine Tangente. Dann ist $BO = 1$ und $BS = \operatorname{tg} \alpha = M$. Folglich ist bei der Tangente:

$$n^2 = OS^2 = BO^2 + BS^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + M^2.$$

Die Figur zeigt ferner, daß bei einer Sekante der Abschnitt n auf der Y -Achse kleiner und bei einer außerhalb des Kreises liegenden Geraden größer als $OS = \sqrt{1 + M^2}$ ist.

Aufgabe: 1. Die Schnittpunkte einer Kurve mit der X -Achse bestimmt man, wenn man in der Gleichung der Kurve $y = 0$ setzt und dann x berechnet. Wie groß sind also beim Kreise die Abschnitte auf den Achsen?

Übung: 1. Die Schnittpunkte des Kreises $36 = x^2 + y^2$ und der Geraden $y = 2x + 4$ zu bestimmen.

2. In dem Kreis $x^2 + y^2 = 16$ lege man durch den Punkt $x_1 = 1, y_1 = 0$ eine Sehne, die um 120° gegen den positiven Teil der X-Achse geneigt ist. Man suche die Gleichung dieser Sehne, die Koordinaten ihrer Schnittpunkte und ihre Länge.

Die Steigung einer Kurve.

Eine Sekante möge eine Kurve in zwei Punkten schneiden. Dreht man die Sekante, so rückt der eine Schnittpunkt dem andern immer näher, bis er ihm schließlich unendlich nahe ist; die Sekante ist damit zur Tangente geworden.

Die Verbindung dieser unendlich nahe liegenden Punkte ist eine unendlich kleine Sehne, die mit der Peripherie zusammenfällt. Die Richtung dieser Sehne ist die Richtung der Kurve an dieser Stelle. Die Verlängerung dieser Sehne ist eine Tangente. Letztere hat also dieselbe Steigung wie die Kurve am Berührungspunkt.

Die Schnittpunkte der Sehne mögen die Koordinaten xy und $x_1 y_1$ haben (Fig. 21). Dann ist die Steigung der Sehne

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Wird die Sehne zur Tangente, so werden die Stücke Δy und Δx unendlich klein; man schreibt sie dy und dx . Die Steigung der Tangente ist gleich derjenigen der Kurve und zwar gleich $\frac{dy}{dx}$. Diese Größe wird Differentialquotient genannt¹⁾.

Der Differentialquotient der Gleichung einer Kurve ändert sich ständig mit den Koordinaten des Punktes.

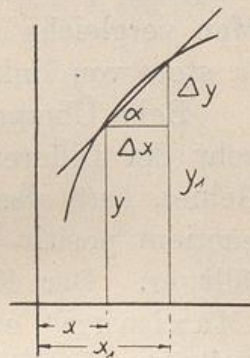


Fig. 21.

¹⁾ Düsing, Elemente der Differential- und Integralrechnung S. 5. Die Kenntnis der einfachsten Differenzierungen und Integrierungen, namentlich die der Potenz werden vorausgesetzt: $\frac{d(x^m)}{dx} = m x^{m-1}$ und $\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$.