Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Tangente an den Kreis

Übung: Wie verhält sich der Differentialquotient und der Verlauf des Kreises im dritten und vierten Quadranten?

Die Tangente an den Kreis.

Die Tangente hat, wie wir gesehen haben, dieselbe Richtung und damit dieselbe Steigung wie der Kreis im Berührungspunkt, nämlich gemäß Gleichung (8):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Dies ist die Steigung des Kreises im allgemeinen; sie ändert sich von Punkt zu Punkt. Die Steigung beim Berührungspunkt $(x_1 y_1)$ ist also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1}{y_1}$$

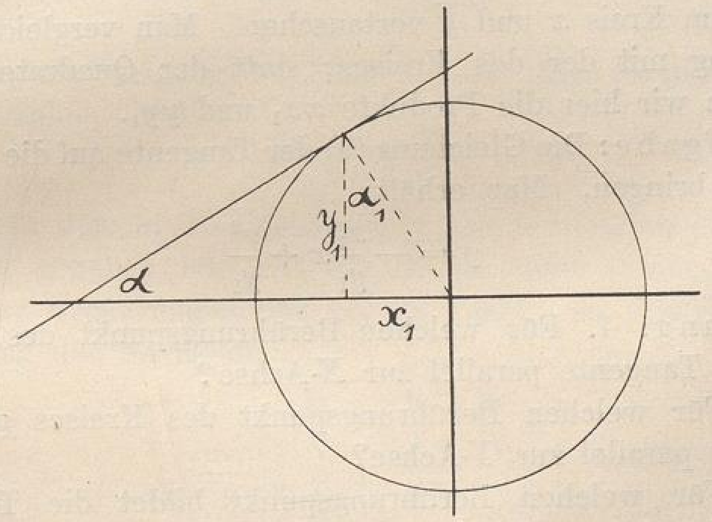

Fig. 22

Diese Steigung ergibt sich auch aus Fig. 22, in welcher

$$M = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{x_1}{y_1}$$

ist. Wir kennen jetzt von der Tangente die Steigung $\left(-\frac{x_1}{y_1}\right)$ und einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt. Die Gleichung einer Geraden, deren Steigung M wir kennen, und die durch den Punkt $(x_1 y_1)$ geht, war nach Gleichung (4):

$$M = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

Wird die Steigung M am Berührungspunkt eingesetzt, so erhält man als Gleichung der Tangente:

$$-\frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

Diese Gleichung kann noch vereinfacht werden:

$$x_1{}^2 - xx_1 = -y_1{}^2 + yy_1$$
$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = xx_1 + yy_1$$
$$r^2 = xx_1 + yy_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

B e m e r k u n g: Jedes Glied dieser Formel ist von der zweiten Dimension. Auch in dieser Formel kann man wie immer am Kreis x und y vertauschen. Man vergleiche diese Gleichung mit der des Kreises; statt der Quadrate x^2 und y^2 haben wir hier die Produkte xx_1 und yy_1.

A u f g a b e: Die Gleichung (9) der Tangente auf die Normalform zu bringen. Man erhält:

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{r^2}{y_1}$$

Ü b u n g: 1. Für welchen Berührungspunkt des Kreises geht die Tangente parallel zur X-Achse?

2. Für welchen Berührungspunkt des Kreises geht die Tangente parallel zur Y-Achse?

3. Für welchen Berührungspunkt bildet die Tangente einen Winkel von 45^0 mit dem positiven Teil der X-Achse?

4. Man suche die Koordinaten der Berührungspunkte der Tangente, die eine Steigung von 30^0 (60^0, 120^0, 135^0, 150^0) hat. Dann stelle man die Gleichung der Tangenten auf. (Man setze zunächst die Steigung der Tangente gleich der des Kreises im Berührungspunkt).

5. Man bestimme die Steigung des Kreises $49 = x^2 + y^2$ in den Punkten mit den Abszissen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. (Man

berechne zuerst die zu den Abscissen gehörigen Ordinaten der Punkte des Kreises.)

6. An welchen Punkten ist die Steigung des Kreises gleich 1?

Die Normale des Kreises.

Errichtet man auf der Tangente einer Kurve im Berührungspunkt ein Lot, so nennt man dies die Normale. Wir wissen zwar aus der Planimetrie, daß dies beim Kreis der Radius ist, doch soll die Gleichung der Normalen zur Übung analytisch abgeleitet werden.

Die Steigung der Tangente war $\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1}{y_1}$. Da die Normale senkrecht zur Tangente steht, so ist ihre Steigung

$$M_2 = -\frac{1}{M_1}$$

wenn M_1 die Steigung der Tangente ist. Also ist die Steigung der Normalen

$$M_2 = +\frac{y_1}{x_1}$$

Setzt man dies in die Gleichung (4) einer Geraden ein, deren Steigung gegeben ist, und die durch einen Punkt, nämlich hier den Berührungspunkt $(x_1\, y_1)$, geht, so erhält man als Gleichung der Normalen:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$y_1 x - y_1 x_1 = y x_1 - y_1 x_1$$

$$y = \frac{y_1}{x_1} x$$

B e m e r k u n g: In dieser Gleichung ist $n = 0$, also geht die Normale durch den Achsenschnittpunkt, d. h. durch den Mittelpunkt des Kreises. Hierdurch wird bestätigt, daß die Normale ein Radius ist; und die Steigung eines Radius ist, wie die Fig. 23 zeigt, gleich $\frac{y_1}{x_1}$.