Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Berührungsgrößen

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Die Berührungsgrößen.

Unter der Subnormalen OF (Fig. 23) versteht man die Projektion der Normalen auf die X-Achse, und unter der Subtangente FS versteht man die Projektion der Tangente auf die X-Achse. Die Länge der Tangente PS und die der Normalen OP mißt man vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der X-Achse.

Die Längen dieser vier Strecken sollen berechnet werden.

1. Auf planimetrischem Wege.

Die Subnormale ist nach Fig. 23 offenbar x_1.

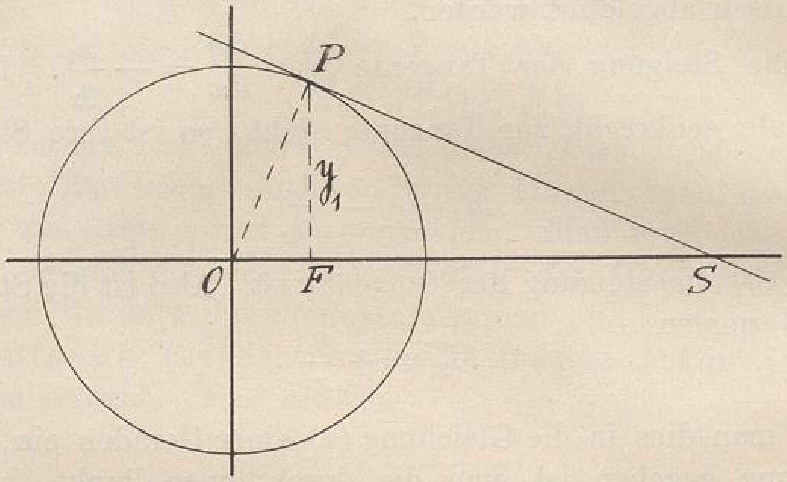

Fig. 23.

Die Ordinate y_1 ist die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und x_1. Also ist

$$\text{die Subtangente} = \frac{{y_1}^2}{x_1} = \frac{r^2 - {x_1}^2}{x_1}$$

$$\text{die Normale} = r.$$

Die Tangente t ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OPS und OPF $\frac{t}{y_1} = \frac{r}{x_1}$ oder $t = \frac{r\,y_1}{x_1}$

2. Auf analytischem Wege.

Die Subnormale und Normale ergeben sich sofort wie oben.

Die Länge der Subtangente und der Tangente kann aber zur Übung auch analytisch abgeleitet werden:

In der Gleichung der Tangente $r^2 = x x_1 + y y_1$ möge der Schnittpunkt der Tangente mit der X-Achse S heißen und die Koordinaten x_2 und y_2 haben. Dann lautet die Gleichung für diesen Schnittpunkt $r^2 = x_2 x_1 + y_2 y_1$. Da nun $y_2 = 0$ ist, so ist $x_2 = \frac{r^2}{x_1}$. Zieht man x_1 von dem soeben erhaltenen x_2 ab, so bleibt:

$$\text{die Subtangente} = \frac{r^2}{x_1} - x_1 = \frac{r^2 - {x_1}^2}{x_1} \text{ wie oben.}$$

Um die Länge der Tangente zu erhalten, kann man die Koordinaten von P und S in die Gleichung (1) für die Entfernung zweier Punkte einsetzen:

$$t^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2$$

$$t^2 = (y_1 - 0)^2 + \left(x_1 - \frac{r^2}{x_1}\right)^2$$

$$= {y_1}^2 + {x_1}^2 - 2r^2 + \frac{r^4}{{x_1}^2}$$

$$= -r^2 + \frac{r^4}{{x_1}^2}$$

$$= \frac{r^2}{{x_1}^2}(-{x_1}^2 + r^2)$$

$$= \frac{r^2 {y_1}^2}{{x_1}^2}$$

$$\text{Also ist die Tangente} = \frac{r\, y_1}{x_1} \text{ wie oben.}$$

Übung: 1. Man lege eine Tangente unter 30° Steigung an den Kreis, stelle ihre Gleichung auf und bestimme die Abschnitte dieser Tangente auf den beiden Achsen. (Siehe Seite 24 Übung 4. Man setze in der Gleichung einmal x und einmal y gleich Null.)

2. Man bestimme ebenso die Abschnitte der Tangenten unter 45° (60°, 120°, 135°, 150°) Steigung.

3. An den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ lege man im Punkte ($x_1 = 2$) des Kreises eine Tangente an und bestimme die Berührungsgrößen.