UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Veränderung des Koordinatensystems.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Visual Library

Veränderung des Koordinatensystems.

Parallele Verschiebung des Systems.

In einem Achsenkreuz xy, das in der Fig. 25 ausgezogen ist, sei ein beliebiger Punkt P mit den Koordinaten x und y gegeben. Ein neues Achsenkreuz $\xi\eta$, das in der Figur gestrichelt ist, liege zu dem obigen, dem alten, parallel, und zwar habe der Achsenschnittpunkt des alten Systems in dem neuen die Koordinaten h und v. Diese Größen entsprechen der horizontalen (h) und der vertikalen Verschiebung (v).

Alsdann ist
$$x = \xi - h$$
$$y = \eta - v.$$

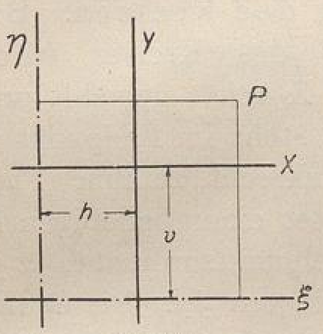

Fig. 25.

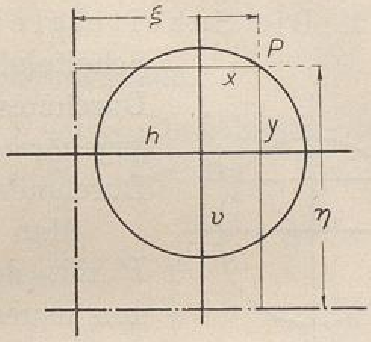

Fig. 26.

B e i s p i e l: 1. D i e a l l g e m e i n e G l e i c h u n g d e s K r e i s e s. Ein Kreis habe im alten System die Gleichung $r^2 = x^2 + y^2$. Soll nun seine Gleichung für das neue System gefunden werden, so müssen wir die a l t e n K o o r d i n a t e n durch die neuen ausdrücken und in die alte Gleichung einsetzen. So erhalten wir eine Gleichung mit neuen Koordinaten. Die Fig. 26 zeigt für einen beliebigen Punkt, daß $x = \xi - h$ und $y = \eta - v$ ist.

Wir erhalten:
$$r^2 = (\xi - h)^2 + (\eta - v)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Die vier Größen der rechten Seite beziehen sich nur auf das neue System, und zwar sind v und h konstant, ξ und η

aber die laufenden Koordinaten des Kreises. Man multipliziere Gleichung (10) aus:

$$r^2 = \xi^2 + h^2 - 2h\xi + \eta^2 + v^2 - 2v\eta$$

$$\xi^2 - 2h\xi + \eta^2 - 2v\eta + h^2 + v^2 - r^2 = 0\ .\quad . \ (10\,a)$$

Aufgabe: Man vergleiche diese Gleichung mit folgender allgemeinen: $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$

und stelle fest, wie sich hieraus die Verschiebungen v und h und der Radius r berechnen läßt. Man erhält:

$$h = -\frac{a}{2} \qquad v = -\frac{b}{2} \qquad r = \sqrt{h^2 + v^2 - c}.$$

Die Gleichung (10) heißt die allgemeine Gleichung des Kreises.

2. Die Scheitelgleichung des Kreises. Bei der Scheitelgleichung des Kreises wird ein Durchmesser als X-Achse gewählt und die zugehörige Achse steht im Endpunkt dieses Durchmessers senkrecht zu ihm (Fig. 27).

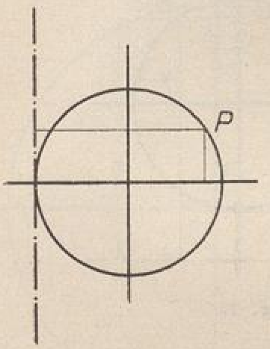

Fig. 27.

Man betrachtet einen beliebigen Punkt P mit den Mittelpunktsordinaten $x\,y$ und den neuen Koordinaten $\xi\,y$. Die Ordinate y bleibt dieselbe; dagegen ist die Abszisse verändert. Die frühere Abszisse x ist auszurechnen und in die Mittelpunkts-Gleichung des Kreises einzusetzen. Es ist: $x = \xi - r$. Eingesetzt gibt:

$$r^2 = (\xi - r)^2 + y^2$$

$$0 = \xi^2 - 2r\xi + y^2$$

Die Scheitelgleichung lautet also:

$$\boldsymbol{y^2 = 2r\xi - \xi^2} \text{ oder } \boldsymbol{y^2 = 2rx - x^2} \quad . \ . \ . \ (11)$$

Übung: 1. Man zeichne die Kurven mit den Gleichungen $x^2 + y^2 - 6x = 0$ und $y^2 + x^2 - 12y + 20x + 111 = 0$. Man überzeuge sich durch Nachmessen, welcher Art diese Kurven sind. Man vergleiche mit der allgemeinen und mit der Scheitelgleichung.

2. Man stelle die Gleichungen für die Linie auf, deren Punkte von dem festen Punkte ($x_1 = 3$, $y_1 = 5$ cm) den Abstand 4 cm haben.

3. In welchen Punkten trifft der Kreis

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 10 = 0$$

die Achsen? Wie groß sind die Verschiebungen?

4. In welchem Punkte hat die Kurve $x^2 + y^2 - 6x = 0$ ein Maximum? Anleitung: Wo ist die Steigung gleich Null?

5. Wie groß sind die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises $x^2 - 10x + y^2 - 12y - 3 = 0$, und wie groß ist sein Halbmesser?

6. Wie groß sind diese Größen beim Kreise

$$x^2 - 20x + y^2 - 12y + 111 = 0?$$

Drehung des Achsenkreuzes.

In dem alten Achsenkreuz XY sei ein beliebiger Punkt P mit den Koordinaten x und y gegeben (Fig. 28.). Das neue Achsenkreuz $\xi\eta$ sei gegen das alte um den Winkel α gedreht, wobei die Drehung links herum als positiv gezählt wird (wie in der Trigonometrie). Die Koordinaten von P im neuen System sind ξ und η. Alsdann kehrt in der Figur bei P zwischen η und y der Winkel α wieder. Die alte Koordinate y besteht aus einer Summe und x aus einer Differenz von Strecken:

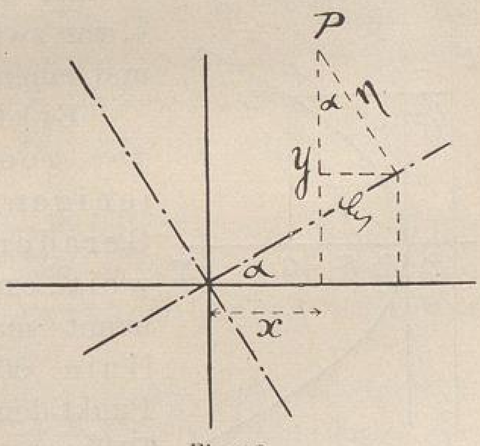

Fig. 28.

$$\left.\begin{aligned} y &= \eta \cos \alpha + \xi \sin \alpha \\ x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Diese Koordinaten setzt man in die auf das alte Achsenkreuz bezügliche Gleichung ein und erhält so eine neue Gleichung, in der die neuen Koordinaten vorkommen.

Beispiele: 1. Für $\alpha = 45^0$ wird

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{ und } x = \frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{2}}$$

2. Für $\alpha = -45^0$ ist die Drehung rechts herum erfolgt:

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{ und } x = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\xi}{\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad (13)$$

Übung: 1. Man drehe das Achsenkreuz, das durch den Mittelpunkt des Kreises geht, und stelle die neue Gleichung des Kreises auf.

2. Man wandle die Gleichung einer Geraden in derselben Weise um.

Parabel.

Die Gleichung der Parabel.

Einleitung: Man suche und zeichne den geometrischen Ort für alle Punkte, die gleich weit entfernt sind: 1. von einem Punkte; 2. von einer Geraden; 3. von zwei Punkten; 4. von zwei Graden; 5. von einer Geraden und einem Punkte.

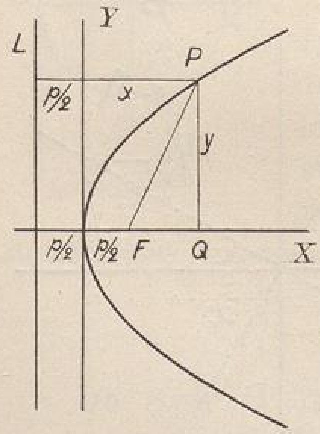

Fig. 29.

Erklärung: Die Parabel ist der geometrische Ort für diejenigen Punkte, die von einer Geraden und einem Punkte gleich weit entfernt sind. Die Gerade nennt man die Leitlinie, Richtlinie oder Direktrix (L) und den Punkt den Brennpunkt (F). (Fig. 29.) Fällt man von F ein Lot auf L, so wollen wir dies Lot mit p und den Schnitt dieses Lotes mit der Parabel als Scheitel der Parabel bezeichnen; p wird durch die Parabel halbiert. Die Verlängerung dieses Lotes ist die X-Achse und senkrecht hierzu durch den Scheitel legen wir die Y-Achse. Dann ist für einen beliebigen Punkt P der Parabel: