Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die allgemeine Gleichung des Kreises

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Veränderung des Koordinatensystems.

Parallele Verschiebung des Systems.

In einem Achsenkreuz xy, das in der Fig. 25 ausgezogen ist, sei ein beliebiger Punkt P mit den Koordinaten x und y gegeben. Ein neues Achsenkreuz $\xi\eta$, das in der Figur gestrichelt ist, liege zu dem obigen, dem alten, parallel, und zwar habe der Achsenschnittpunkt des alten Systems in dem neuen die Koordinaten h und v. Diese Größen entsprechen der horizontalen (h) und der vertikalen Verschiebung (v).

Alsdann ist

$$x = \xi - h$$
$$y = \eta - v.$$

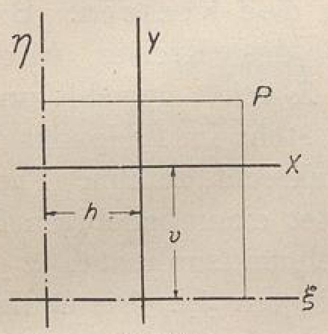

Fig. 25.

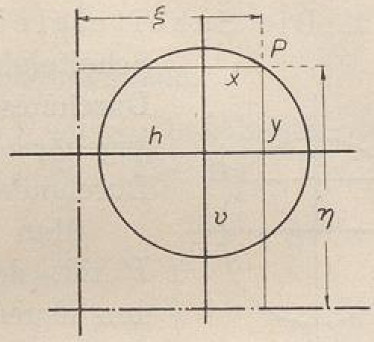

Fig. 26.

Beispiel: 1. Die allgemeine Gleichung des Kreises. Ein Kreis habe im alten System die Gleichung $r^2 = x^2 + y^2$. Soll nun seine Gleichung für das neue System gefunden werden, so müssen wir die alten Koordinaten durch die neuen ausdrücken und in die alte Gleichung einsetzen. So erhalten wir eine Gleichung mit neuen Koordinaten. Die Fig. 26 zeigt für einen beliebigen Punkt, daß $x = \xi - h$ und $y = \eta - v$ ist.

Wir erhalten:

$$\boldsymbol{r}^2 = (\xi - \boldsymbol{h})^2 + (\eta - \boldsymbol{v})^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Die vier Größen der rechten Seite beziehen sich nur auf das neue System, und zwar sind v und h konstant, ξ und η

aber die laufenden Koordinaten des Kreises. Man multipliziere Gleichung (10) aus:

$$r^2 = \xi^2 + h^2 - 2h\xi + \eta^2 + v^2 - 2v\eta$$

$$\xi^2 - 2h\xi + \eta^2 - 2v\eta + h^2 + v^2 - r^2 = 0 \quad . \quad . \quad (10\,a)$$

Aufgabe: Man vergleiche diese Gleichung mit folgender allgemeinen: $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$

und stelle fest, wie sich hieraus die Verschiebungen v und h und der Radius r berechnen läßt. Man erhält:

$$h = -\frac{a}{2} \qquad v = -\frac{b}{2} \qquad r = \sqrt{h^2 + v^2 - c}.$$

Die Gleichung (10) heißt die allgemeine Gleichung des Kreises.

2. Die Scheitelgleichung des Kreises. Bei der Scheitelgleichung des Kreises wird ein Durchmesser als X-Achse gewählt und die zugehörige Achse steht im Endpunkt dieses Durchmessers senkrecht zu ihm (Fig. 27).

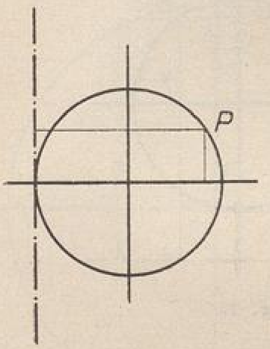

Fig. 27.

Man betrachtet einen beliebigen Punkt P mit den Mittelpunktsordinaten $x\,y$ und den neuen Koordinaten $\xi\,y$. Die Ordinate y bleibt dieselbe; dagegen ist die Abszisse verändert. Die frühere Abszisse x ist auszurechnen und in die Mittelpunkts-Gleichung des Kreises einzusetzen. Es ist: $x = \xi - r$. Eingesetzt gibt:

$$r^2 = (\xi - r)^2 + y^2$$

$$0 = \xi^2 - 2r\xi + y^2$$

Die Scheitelgleichung lautet also:

$$\boldsymbol{y^2 = 2r\xi - \xi^2} \text{ oder } \boldsymbol{y^2 = 2rx - x^2} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Übung: 1. Man zeichne die Kurven mit den Gleichungen $x^2 + y^2 - 6x = 0$ und $y^2 + x^2 - 12y + 20x + 111 = 0$. Man überzeuge sich durch Nachmessen, welcher Art diese Kurven sind. Man vergleiche mit der allgemeinen und mit der Scheitelgleichung.