Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Scheitelgleichung des Kreises

aber die laufenden Koordinaten des Kreises. Man multipliziere Gleichung (10) aus:

$$r^2 = \xi^2 + h^2 - 2h\xi + \eta^2 + v^2 - 2v\eta$$

$$\xi^2 - 2h\xi + \eta^2 - 2v\eta + h^2 + v^2 - r^2 = 0 \quad . \quad . \quad (10\,a)$$

Aufgabe: Man vergleiche diese Gleichung mit folgender allgemeinen: $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$

und stelle fest, wie sich hieraus die Verschiebungen v und h und der Radius r berechnen läßt. Man erhält:

$$h = -\frac{a}{2} \qquad v = -\frac{b}{2} \qquad r = \sqrt{h^2 + v^2 - c}.$$

Die Gleichung (10) heißt die allgemeine Gleichung des Kreises.

2. Die Scheitelgleichung des Kreises. Bei der Scheitelgleichung des Kreises wird ein Durchmesser als X-Achse gewählt und die zugehörige Achse steht im Endpunkt dieses Durchmessers senkrecht zu ihm (Fig. 27).

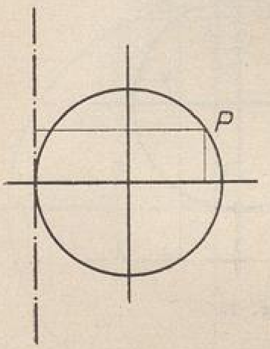

Fig. 27.

Man betrachtet einen beliebigen Punkt P mit den Mittelpunktsordinaten $x\,y$ und den neuen Koordinaten $\xi\,y$. Die Ordinate y bleibt dieselbe; dagegen ist die Abszisse verändert. Die frühere Abszisse x ist auszurechnen und in die Mittelpunkts-Gleichung des Kreises einzusetzen. Es ist: $x = \xi - r$. Eingesetzt gibt:

$$r^2 = (\xi - r)^2 + y^2$$

$$0 = \xi^2 - 2r\xi + y^2$$

Die Scheitelgleichung lautet also:

$$y^2 = 2r\xi - \xi^2 \text{ oder } y^2 = 2rx - x^2 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Übung: 1. Man zeichne die Kurven mit den Gleichungen $x^2 + y^2 - 6x = 0$ und $y^2 + x^2 - 12y + 20x + 111 = 0$. Man überzeuge sich durch Nachmessen, welcher Art diese Kurven sind. Man vergleiche mit der allgemeinen und mit der Scheitelgleichung.

2. Man stelle die Gleichungen für die Linie auf, deren Punkte von dem festen Punkte ($x_1 = 3$, $y_1 = 5$ cm) den Abstand 4 cm haben.

3. In welchen Punkten trifft der Kreis

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 10 = 0$$

die Achsen? Wie groß sind die Verschiebungen?

4. In welchem Punkte hat die Kurve $x^2 + y^2 - 6x = 0$ ein Maximum? Anleitung: Wo ist die Steigung gleich Null?

5. Wie groß sind die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises $x^2 - 10x + y^2 - 12y - 3 = 0$, und wie groß ist sein Halbmesser?

6. Wie groß sind diese Größen beim Kreise

$$x^2 - 20x + y^2 - 12y + 111 = 0?$$

Drehung des Achsenkreuzes.

In dem alten Achsenkreuz XY sei ein beliebiger Punkt P mit den Koordinaten x und y gegeben (Fig. 28.). Das neue Achsenkreuz $\xi\eta$ sei gegen das alte um den Winkel α gedreht, wobei die Drehung links herum als positiv gezählt wird (wie in der Trigonometrie). Die Koordinaten von P im neuen System sind ξ und η. Alsdann kehrt in der Figur bei P zwischen η und y der Winkel α wieder. Die alte Koordinate y besteht aus einer Summe und x aus einer Differenz von Strecken:

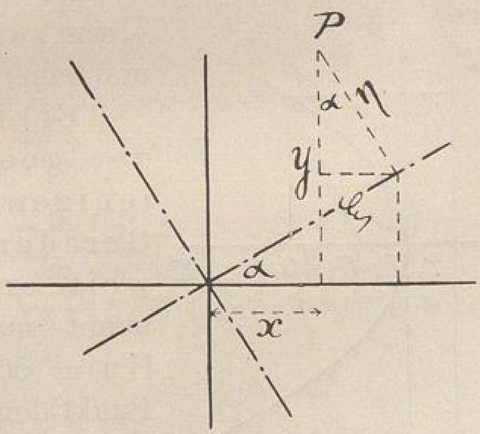

Fig. 28.

$$\left.\begin{aligned} y &= \eta \cos \alpha + \xi \sin \alpha \\ x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Diese Koordinaten setzt man in die auf das alte Achsenkreuz bezügliche Gleichung ein und erhält so eine neue Gleichung, in der die neuen Koordinaten vorkommen.