Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Parabel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Beispiele: 1. Für $\alpha = 45^0$ wird

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{ und } x = \frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{2}}$$

2. Für $\alpha = -45^0$ ist die Drehung rechts herum erfolgt:

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{ und } x = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\xi}{\sqrt{2}} \quad . \; . \; (13)$$

Übung: 1. Man drehe das Achsenkreuz, das durch den Mittelpunkt des Kreises geht, und stelle die neue Gleichung des Kreises auf.

2. Man wandle die Gleichung einer Geraden in derselben Weise um.

Parabel.

Die Gleichung der Parabel.

Einleitung: Man suche und zeichne den geometrischen Ort für alle Punkte, die gleich weit entfernt sind: 1. von einem Punkte; 2. von einer Geraden; 3. von zwei Punkten; 4. von zwei Graden; 5. von einer Geraden und einem Punkte.

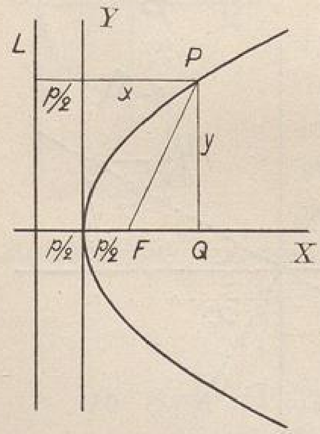

Fig. 29.

Erklärung: Die Parabel ist der geometrische Ort für diejenigen Punkte, die von einer Geraden und einem Punkte gleich weit entfernt sind. Die Gerade nennt man die Leitlinie, Richtlinie oder Direktrix (L) und den Punkt den Brennpunkt (F). (Fig. 29.) Fällt man von F ein Lot auf L, so wollen wir dies Lot mit p und den Schnitt dieses Lotes mit der Parabel als Scheitel der Parabel bezeichnen; p wird durch die Parabel halbiert. Die Verlängerung dieses Lotes ist die X-Achse und senkrecht hierzu durch den Scheitel legen wir die Y-Achse. Dann ist für einen beliebigen Punkt P der Parabel:

$$LP = PF$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{y^2 + FQ^2}$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = y^2 + x^2 - xp + \frac{p^2}{4}$$

$$\boldsymbol{y^2 = 2px} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Dies ist also die Gleichung der Parabel, und zwar ist es die Scheitelgleichung, weil wir beide Achsen durch den Scheitel gelegt haben.

Besprechung: Beide Seiten der Gleichung sind von der zweiten Dimension, da p eine Länge ist.

Aus der Gleichung der Parabel folgt, daß $y = \pm\sqrt{2px}$ ist. Also gehören zu jedem x zwei gleiche und entgegengesetzte y; die Kurve ist demnach zur X-Achse symmetrisch. Diese wird daher auch als Achse der Parabel bezeichnet. Für ein unendlich großes x wird y ebenfalls unendlich groß, und für ein negatives x wird y imaginär, d. h. die Parabel liegt nur auf der rechten Seite der Y-Achse und erstreckt sich in zwei Zügen, sogenannten Ästen bis ins Unendliche. Die Y-Achse ist keine Symmetrieachse. Ferner wird für $x = o$ auch $y = o$. Die Parabel geht durch den Scheitel.

Stellt man die Gleichung für zwei Punkte auf: $y_1{}^2 = 2px_1$ und $y_2{}^2 = 2px_2$, so ergibt sich $y_1{}^2 : y_2{}^2 = x_1 : x_2$. Die Abszissen einer Parabel verhalten sich also wie die Quadrate der Ordinaten.

Ist die Parabel um 90° links herum gedreht, so steht sie gleichsam auf dem Kopf und hat als tiefsten Punkt den Scheitelpunkt; jetzt lautet ihre Gleichung $x^2 = 2py$, und die Ordinaten verhalten sich wie die Quadrate der Abszissen. Allgemein kann man also sagen: Stellt man bei einer Parabel die Scheitelgleichung auf, so verhalten sich die einen Koordinaten wie die Quadrate der anderen.

Konstruktionen der Parabel.

1. Aus der Erklärung ergibt sich eine einfache Konstruktion der Parabel, wenn Leitlinie und Brennpunkt gegeben sind. Man zieht eine beliebige Parallele zur Leitlinie und schlägt mit dem Abstand beider Linien einen Kreis um den Brennpunkt. Wo dieser die Parallele trifft, ist ein Punkt der Parabel. So verfährt man beliebig oft.

2. Aus dem Satz, daß sich die Abszissen wie die Quadrate der Ordinaten verhalten, ergibt sich die Konstruktion, wenn Scheitel S, Scheiteltangente SO und ein beliebiger Punkt P gegeben sind (Fig. 30).

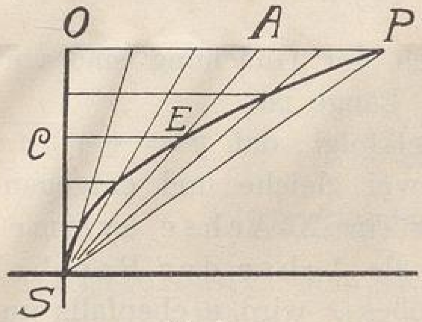

Fig. 30.

Man fällt von P ein Lot auf SO, teilt OP und SO in gleich viel Teile. Durch die Teile von OS zieht man Parallelen zu OP und verbindet die Teile von OP mit S, dann sind die in Fig. 30 hervorgehobenen Punkte Parabelpunkte.

Beweis: Punkt P habe die Koordinaten $x_1 y_1$ und Punkt C sei ein laufender Punkt mit den Koordinaten x und y. Dann ist:

$$CE = \frac{3}{5} OA = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5} OP\right)$$

oder

$$x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 x_1$$

Ferner ist:

$$SC = \frac{3}{5} SO$$

oder

$$y = \frac{3}{5} y_1 \text{ und } y^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 y_1{}^2$$

Durch Division erhält man:

$$\frac{x}{y^2} = \frac{x_1}{y_1{}^2} \text{ oder } \frac{x}{x_1} = \frac{y^2}{y_1{}^2}$$

Also verhalten sich die Abszissen wie die Quadrate der Ordinaten und der Punkt E gehört ebenso wie die andern konstruierten Punkte einer Parabel an.

3. Sind von der Parabel zwei Punkte P_1 und P_2 und die Tangenten $O P_1$ und $O P_2$ in diesen Punkten gegeben, so teilt man $O P_1$ und $O P_2$ in gleich viele Teile und verbindet die Teilpunkte, wie Fig. 31 zeigt. Die Verbindungslinien sind die umhüllenden Tangenten, in welche die eigentliche Parabel leicht eingezeichnet werden kann.

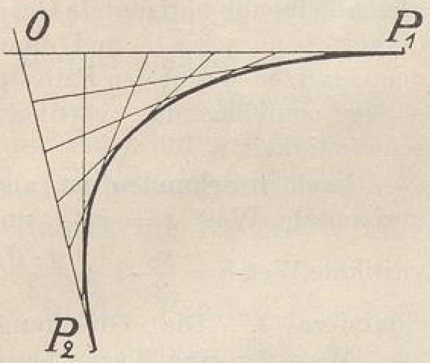

Fig. 31.

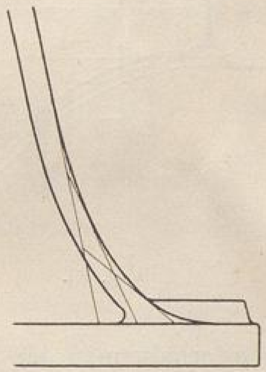

Fig. 32.

Anwendung: Letztere Konstruktion wird im Maschinenbau häufig angewendet, um Übergangskurven zwischen zwei rechtwinklig oder schief zueinander stehenden geraden Begrenzungslinien zu zeichnen. Die Parabel ergibt in solchen Fällen eine dem Auge besonders gefällige Form, z. B. Fig. 32.

Übung: 1. Die Gleichung der Parabel zu suchen, wenn die Leitlinie zur Y-Achse gemacht wird.

2. Die Gleichung der Parabel zu suchen, wenn das im Brennpunkt errichtete Lot zur Y-Achse gemacht wird.

3. Man zeichne in ein Achsenkreuz die Kurven $y^2 = 4x$ und $y^2 = \frac{1}{4} x$ und gebe die Leitlinien und Brennpunkte an. Man wähle hierzu einen großen Maßstab. Man schließe auf die Art der Kurven und überzeuge sich durch Nachmessen davon, daß beliebige Punkte der Kurve der Erklärung der Parabel genügen.

4. In der Parabel $y^2 = 18x$ soll der Punkt bestimmt werden, für den die Ordinate dreimal so groß ist wie die Abszisse.

3*

Anwendung: Aus einem Gefäße, Fig. 33, strömt horizontal ein Wasserstrahl heraus. Man bestimme die Gleichung der Kurve, welche der Strahl beschreibt unter Vernachlässigung sämtlicher Reibungs- und Ausflußwiderstände.

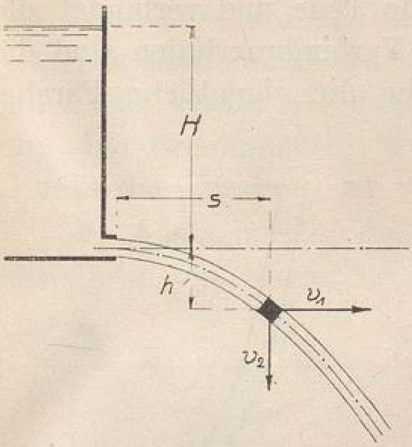

Fig. 33.

Anleitung: Jedes ausfließende Wasserteilchen, z. B. das in Fig. 33 schwarz hervorgehobene, hat eine gleichbleibende horizontale Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2\,g\,H}$ und eine nach den Gesetzen des freien Falles gleichmäßig zunehmende, vertikale Geschwindigkeit v_2.

Nach t Sekunden ist also der horizontale Weg $s = v_1 \cdot t$ und der vertikale Weg $h = \frac{v_2}{2} \cdot t = \frac{g \cdot t^2}{2}$. Man eliminiere t. Die Gleichung der Kurve erhält man zu $s^2 = 4 \cdot H \cdot h$. Was für eine Kurve beschreibt also der Strahl? Man zeichne die Kurve maßstäblich für $H = 1{,}20$ m. Man bestimme rechnerisch und zeichnerisch die Entfernung s_1, in welcher ein 0,75 m unter der Ausflußöffnung des Gefäßes liegender Wasserspiegel vom Strahl getroffen wird.

Der Parameter.

Errichtet man die Ordinate im Brennpunkt, so ist diese nach der Erklärung der Parabel gleich dem Abstand des Berührungspunktes von der Leitlinie, also ist in diesem Falle $P_1 F = P_1 L = p$ (Fig. 34).

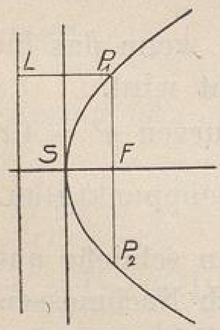

Fig. 34.

Verlängert man diese Ordinate um sich selbst, so erhält man $2\,p$ und nennt diese Länge den Parameter. Zieht man also **durch den Brennpunkt eine Sehne senkrecht zur Achse, so ist diese gleich dem Parameter.**

Man kann demnach sehr einfach **freihändig** eine der Parabel nahe kommende Kurve **zeichnen**, wenn der Scheitel S und der Brennpunkt F gegeben sind. Man trägt senkrecht zur Achse die Strecken $F P_1 = F P_2 = 2 F S$ auf und verbindet die Punkte P_1, S und P_2 durch eine Kurve, welche die Achse $F S$ in S rechtwinklig schneidet.

Aufgabe: Die Koordinaten der Schnittpunkte einer Geraden $y = Mx + n$ und der Parabel $y^2 = 2px$ zu finden. Man erhält schließlich:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{p - Mn \pm \sqrt{p\,(p - 2\,Mn)}}{M^2}$$

und

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{p \pm \sqrt{p\,(p - 2\,Mn)}}{M}.$$

Die Parabel hat mit einer Geraden also im allgemeinen zwei Schnittpunkte.

Übung: 1. Die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 10\,x$ und der Geraden $y = 2\,x - 4$ zu bestimmen.

2. Die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ und des mit p als Radius um die Mitte der Leitlinie beschriebenen Kreises zu finden.

3. In der Parabel $y^2 = 4\,x$ sei eine Gerade gezogen, die mit dem positiven Teil der X-Achse einen Winkel von 60^0 einschließt und durch den Brennpunkt geht. Die Schnittpunkte und die Länge der Geraden zu bestimmen.

4. Man bestimme die Endpunkte der gemeinsamen Sehne des Kreises $x^2 + y^2 = 25$ und der Parabel $y^2 = 8\,x$.

Ähnlichkeit der Parabeln.

Vergleicht man verschiedene Parabeln mit einander, z. B. $y^2 = 4\,x$ und $y^2 = 6\,x$, so unterscheiden sich diese Gleichungen nur durch den Faktor $p = 2$ und $p = 3$.

Angenommen, in einer Parabel sei der Parameter n mal so groß wie in einer kleineren Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2\,p\,x$, so wäre die Gleichung der größeren $y^2 = 2\,(n\,p)\,x$. Nimmt man nun in der kleineren Parabel eine beliebige Abszisse x_1 und in der größeren Parabel eine n mal so große, also $n\,x_1$, so erhält man als zugehörige Ordinate in der kleineren Parabel $\sqrt{2\,p\,x_1}$ und in der größeren

$$\sqrt{2\,(n\,p)\,(n\,x_1)} = n\,\sqrt{2\,p\,x_1}.$$

Zu einer n mal so großen Abszisse gehört also auch eine n mal so große Ordinate. Diese Stücke der Parabeln entsprechen einander. Man sagt, die eine Parabel ist n mal so groß als die andere. Alle Parabeln sind einander ähnlich.

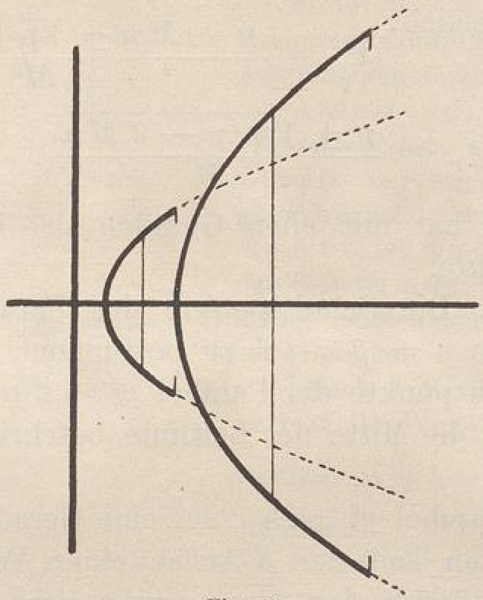

Fig. 35.

Fig. 35 zeigt zwei Parabeln mit gemeinsamer Leitlinie. In der größeren ist p dreimal so groß als in der kleineren. Die dick gezeichneten Stücke entsprechen einander.

Die Steigung der Parabel.

Die Steigung einer Kurve erhält man bekanntlich durch Differenzieren ihrer Gleichung:

$$y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2p}}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Besprechung: Der Wert $\frac{p}{y}$ des Differentialquotienten der Gleichung der Parabel ist für positive y positiv; die Kurve steigt also. Sie steigt bei kleinem y stark; je mehr die Ordinaten wachsen, desto weniger. Bei negativem y fällt sie, und zwar anfangs stärker, später schwächer. Auch aus den Figuren der Parabel ist dies leicht ersichtlich.

Der Differentialquotient wird für keinen endlichen Wert von y zu Null, also ist kein „Extremwert", d. h. kein Maximum und kein Minimum vorhanden. Für $y = 0$ wird $\frac{p}{y}$ unendlich; der Steigungswinkel im Scheitel der Kurve ist also 90^0.

Übung: 1. Wie groß ist die Steigung der Parabel $y^2 = 4x$ an den Punkten mit den Abszissen 1, 2, 3, 4 usw.?

2. In welchen Punkten ist die Steigung gleich 1?

3. Unter welchem Winkel trifft der in Fig. 33 berechnete Wasserstrahl den 0,75 m unter der Ausflußöffnung des Gefäßes liegenden Wasserspiegel?

Die Tangente der Parabel.

Im Berührungspunkt hat die Parabel dieselbe Steigung wie die Tangente. Die Steigung der Parabel war durch Differenzierung ihrer Gleichung gefunden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

Dies ist die allgemeine Größe der Steigung. Die Steigung der Parabel im Berührungspunkt (x_1, y_1) ist also $\frac{p}{y_1}$. Von der Tangente kennen wir jetzt die Steigung und einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt.

Die Gleichung einer Geraden, die durch einen Punkt geht, und deren Steigung gleich M ist, war nach Gleichung (4):

$$M = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Setzt man hierin die berechnete Steigung ein, so erhält man:

$$\frac{p}{y_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Dies ist die Gleichung der Tangente. Sie läßt sich noch vereinfachen:

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1$$
$$yy_1 - 2px_1 = px - px_1$$
$$yy_1 = p(x + x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Bemerkung: Diese Gleichung der Tangente unterscheidet sich von derjenigen der Parabel dadurch, daß man statt des Quadrates y^2 das Produkt yy_1 und statt $2\,x$ die Summe $(x + x_1)$ hat. Die Gleichung ist von der zweiten Dimension, da p eine Länge ist.

Der Abschnitt der Tangente auf der Y-Achse.

Die Gleichung der Tangente ist $y\,y_1 = p\,(x + x_1)$. Für den Schnitt mit der Y-Achse ist $x = 0$. Setzt man dies ein, so erhält man

$$y = p\,\frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1^2}{2\,y_1} = \frac{1}{2}\,y_1$$

Der Abschnitt der Tangente auf der Y-Achse ist also halb so groß wie die Ordinate des Berührungspunktes.

Bemerkung: Aus dieser Tatsache ergibt sich eine sehr einfache Konstruktion der Tangente. Man halbiert die Ordinate des Berührungspunktes, trägt die erhaltene Hälfte vom Scheitel auf der Y-Achse nach oben bezw. unten ab und zieht durch den erhaltenen Punkt und den Berührungspunkt eine Gerade. Dies ist die Tangente.

Übung: 1. An die Parabel $y^2 = 4\,x$ in einem ihrer Punkte mit der Ordinate $y_1 = 8$ cm eine Tangente zu legen. Wie heißt die Gleichung der Tangente in der Normalform? Maßstäbliche Zeichnung.

2. Für welchen Berührungspunkt der Parabel würde die Tangente parallel zur X-Achse gehen? Für welchen parallel zur Y-Achse?

3. Man stelle die Gleichungen der Tangenten auf, die eine Steigung von 30^0, 45^0, 60^0, 120^0, 135^0, 150^0 haben. Man bestimme die Koordinaten ihrer Berührungspunkte und die Größe ihrer Abschnitte auf den Achsen. Maßstäbliche Zeichnung für $p = 2$ cm.

4. Die Gleichung der Tangente aufzustellen, deren Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt. Wie groß ist ihr Steigungswinkel? Maßstäbliche Zeichnung für $p = 4$ cm.

Die Normale.

Errichtet man auf der Tangente in ihrem Berührungspunkt ein Lot, so heißt dies die Normale. Ihre Gleichung soll aufgestellt werden. Die Steigung eines Lotes war nach Gleichung (5)

$$M_1 = -\frac{1}{M}$$

wenn M die Steigung der Geraden ist, auf der das Lot senkrecht steht.

Da nun die Steigung der Tangente $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y_1}$ war, so ist die der Normalen $\frac{dy}{dx} = -\frac{y_1}{p}$

Dies wird wie bei der Tangente in die Gleichung (4) einer Geraden eingesetzt, die durch einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt $x_1 y_1$, geht und eine gegebene Steigung hat:

$$-\frac{y_1}{p} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Aufgabe: Diese Gleichung ist auf die Normalform zu bringen und n zu bestimmen.

Die Berührungsgrößen.

Beim Kreise konnte man alle vier Berührungsgrößen planimetrisch bestimmen. Bei der Parabel berechnen wir eine dieser Größen analytisch und leiten aus ihr die anderen planimetrisch ab (Fig. 36).

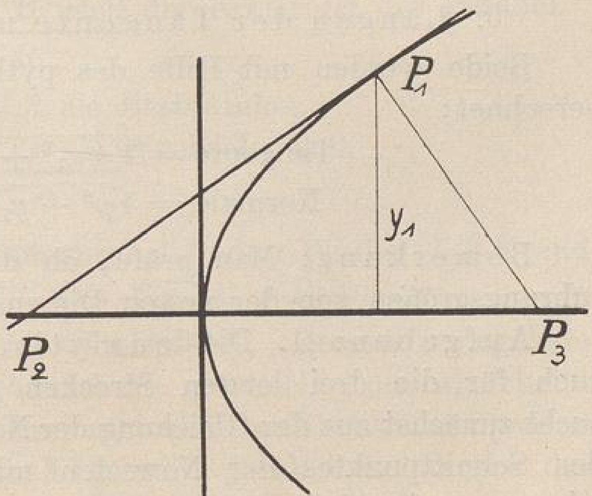

Fig. 36.

1. Länge der Subtangente.

Die Tangente $yy_1 = p(x + x_1)$ schneidet die X-Achse im Punkte P_2. Die Koordinaten dieses Schnittpunktes erfüllen die Gleichung $y_2 y_1 = p(x_2 + x_1)$. Für P_2 ist aber $y_2 = 0$. Also ist

$$0 = p(x_2 + x_1)$$
$$x_2 = -x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,a)$$

Demnach ist die Subtangente $= 2\,x_1$, also doppelt so groß als die Abszisse des Berührungspunktes; sie wird demnach im Scheitel der Parabel halbiert.

Bemerkung: Hieraus folgt eine weitere einfache Konstruktion der Tangente, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, durch Abtragen von x_1 (siehe auch Seite 40).

2. Länge der Subnormalen.

Hat man die Subtangente auf diesem analytischen Wege gefunden, so lassen sich die übrigen Größen sehr leicht planimetrisch bestimmen.

Die Ordinate des Berührungspunktes ist die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und Subnormalen

$$y_1^2 = \text{Subtangente} \times \text{Subnormale}$$

$$\text{Subnormale} = \frac{y_1^2}{2\,x_1} = \frac{2\,p\,x_1}{2\,x_1} = p \quad . \quad . \quad . \quad (17\,b)$$

Die Subnormale ist also für jeden Punkt der Parabel konstant, nämlich gleich dem halben Parameter.

3. Längen der Tangente und Normalen.

Beide werden mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes berechnet:

$$\text{Tangente} = \sqrt{4\,x_1^2 + 2\,p\,x_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,c)$$
$$\text{Normale} = \sqrt{p^2 + y_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,d)$$

Bemerkung: Man prüfe, ob die Formeln für die Berührungsgrößen von der ersten Dimension sind.

Aufgaben: 1. Die analytische Ableitung soll auch für die drei letzten Strecken gesucht werden. Man sucht zunächst aus der Gleichung der Normalen die Koordinaten des Schnittpunktes der Normalen mit der X-Achse zu gewinnen und erhält dann die Länge der Subnormalen als

Differenz zweier Abszissen. — Die Länge der Tangente und die der Normalen ergibt sich dann als Abstand ihrer Endpunkte P_1 und P_2 bzw. P_1 und P_3.

2. Man beweise, daß Subtangente und Subnormale zusammen gleich dem doppelten Brennstrahl $FB = LB$ (Fig. 37) sind.

Benennungen: Die Verbindung eines Punktes der Parabel mit dem Brennpunkt nennen wir Brennlinie oder Brennstrahl (Radius vector). Zieht man durch einen Punkt der Parabel eine Parallele zur X-Achse, so nennen wir diese Linie „Durchmesser„.

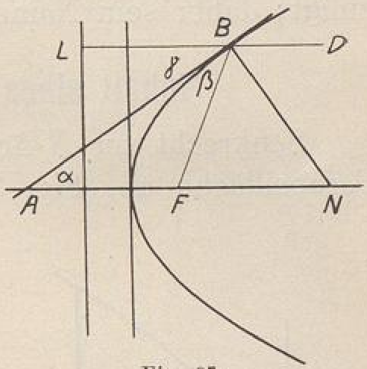

Fig. 37.

Lehrsatz: Die Tangente der Parabel halbiert den Winkel zwischen der Brennlinie und der Verlängerung des Durchmessers, die Normale den zugehörigen Nebenwinkel.

Beweis: $AF = x_1 + \frac{p}{2}$ (Fig. 37.),

$LB = x_1 + \frac{p}{2}$ (Fig. 37),

$\underline{LB = FB}$ nach der Erklärung der Parabel,

also ist $AF = FB$.

Daher $\sphericalangle\, \alpha = \sphericalangle\, \beta$ als Basiswinkel,

$\underline{\sphericalangle\, \alpha = \sphericalangle\, \gamma}$ als Wechselwinkel,

demnach $\sphericalangle\, \beta = \sphericalangle\, \gamma$.

Also halbiert die Tangente AB den Winkel LBF und demnach die Normale PN den Winkel FBD.

Anwendung: Ein Hohlspiegel, dessen spiegelnde Fläche ein Rotations-Paraboloid ist (siehe unten), heißt parabolisch. Ein vom Brennpunkt eines parabolischen Spiegels ausgehender Lichtstrahl (FB) wird parallel zur Achse der Parabel zurückgeworfen (BD). Ebenso alle anderen von F

ausgehenden Lichtstrahlen. Die Spiegel der Scheinwerfer sind deshalb parabolisch. Das Licht ist dem Spiegel meist etwas näher gerückt, damit die Strahlen ein wenig divergieren.

Umgekehrt werden alle parallel zur Achse eintretenden Lichtstrahlen im Brennpunkt vereinigt. Richtet man die Achse eines solchen Spiegels gegen die Sonne, so werden die Sonnenstrahlen vom Spiegel zurückgeworfen und im Brennpunkt vereinigt; daher sein Name.

Inhalt eines Abschnittes der Parabel.

Senkrecht zur X-Achse schneiden wir ein Stück von der Parabelfläche ab (Fig. 38). Wir berechnen den Inhalt des oberen Teiles dieses Abschnittes, indem wir ihn in senkrechte schmale Streifen von der Höhe y und der Breite $\triangle x$ zerlegen. Wenn jeder Streifen unendlich schmal ist, so kann er als Rechteck aufgefaßt werden, und sein Inhalt ist $y \cdot d\,x$. Die ganze Fläche wäre also:

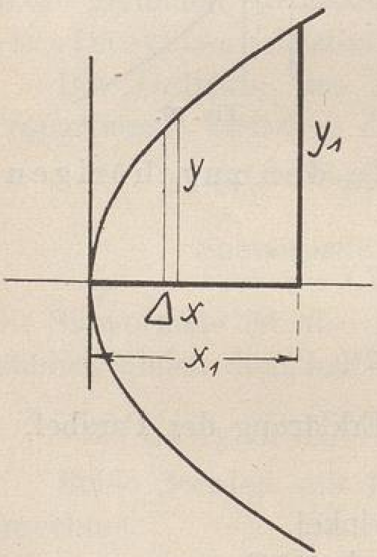

Fig. 38.

$$F = \int y \cdot d\,x = \int \sqrt{2\,p\,x} \cdot d\,x$$

Die Fläche bis zum Ende der Abszisse x_1 ist:

$$F = \int_{x=0}^{x=x_1} \sqrt{2\,p\,x} \cdot d\,x =$$

$$= \sqrt{2\,p} \int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}} \cdot d\,x$$

Integriert man diesen Ausdruck, so erhält man: $\left[\sqrt{2\,p}\,\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{x_1}$

Setzt man hierin die Grenzen ein, so wird:

$$F = \sqrt{2\,p}\,\frac{x_1^{3/2}}{3/2} - 0 = \frac{2}{3} x_1 \sqrt{2\,p\,x_1} = \frac{2}{3} x_1 y_1 \,.\,. (18)$$

Besprechung: Diese Formel ist von der zweiten Dimension. Die Fläche ist $^2/_3$ des umschließenden Rechtecks, was auch dem Augenmaß entspricht. In der Formel kann man x und y vertauschen, d. h. man erhält denselben Inhalt, wenn man die Parabel um 90^0 dreht und den Abschnitt bis y_1 rechnet.

Rotations-Paraboloid.

1. Berechnung nach dem Prinzip von Cavalieri.

Nach diesem Prinzip sind alle Körper inhaltsgleich, die in gleicher Höhe gleichen Querschnitt haben.

Läßt man eine Parabel um die X-Achse rotieren, so entsteht ein Rotations-Paraboloid, das wir uns aufrechtstehend

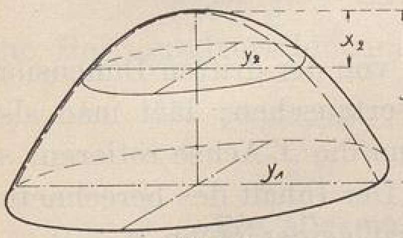

Fig. 39 a.

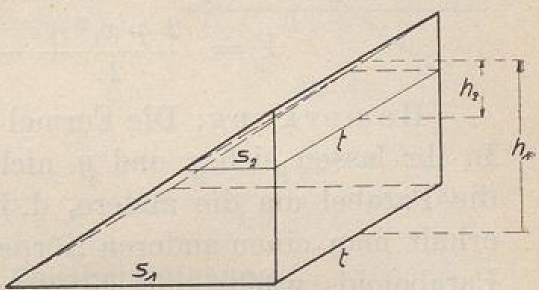

Fig. 39 b.

denken (Fig. 39a). Da in einer Parabel sich die Abszissen x wie die Quadrate der Ordinaten y verhalten, so ist:

$$x_1 : x_2 = y_1^2 : y_2^2$$

$$\text{also auch } x_1 : x_2 = y_1^2 \pi : y_2^2 \pi.$$

Diese horizontalen Querschnitte durch das Paraboloid verhalten sich also wie die Höhen x. Dies ist auch bei dem daneben gezeichneten Dachkörper der Fall. Denn $h_1 : h_2 = s_1 : s_2 = s_1 t : s_2 t$. Beide Körper haben in gleicher Höhe gleiche Querschnitte, sind also inhaltsgleich. Ihre Grundflächen sind $s_1 t = y_1^2 \pi$.

Der Dachkörper ist aber die Hälfte des zugehörigen Prismas und sein Inhalt demnach $\frac{1}{2} G \cdot h$. Diese Formel gilt also auch für das Paraboloid und sein Inhalt bis zu den Koordinaten x_1 und y_1 ist

$$V = \frac{1}{2} G \cdot h = \frac{1}{2} y_1^2 \pi \cdot x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

2. Berechnung durch Integration.

Denken wir uns wie in Fig. 38 die Parabel in unendlich dünne Streifen zerlegt und lassen wir sie jetzt um die X-Achse rotieren, so entstehen unendliche dünne Scheiben von der Grundfläche $y^2 \pi$, der Dicke dx und dem Inhalt $y^2 \pi \cdot dx$. Der Gesamtinhalt ist also

$$V = \int_{x=0}^{x=x_1} y^2 \pi \, dx = \int_0^{x_1} 2 p x \pi \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{2 p x^2 \pi}{2} \right]_0^{x_1}$$

Setzt man die Grenzen $x = x_1$ und $x = 0$ ein, so erhält man denselben Wert wie vorher.

$$V = \frac{2 \, p \, x_1^2 \, \pi}{2} - 0 = \frac{y_1^2 \, x_1 \, \pi}{2}.$$

Bemerkung: Die Formel ist von der dritten Dimension. In ihr lassen sich x und y nicht vertauschen; läßt man also die Parabel um die andere, d. h. um die Y-Achse rotieren, so erhält man einen anderen Körper. Der Inhalt des berechneten Paraboloids wächst mit dem Quadrat seiner Höhe x.

Aufgabe: 1. Wenn man eine Parabel um die Y-Achse rotieren läßt, so soll der entstehende trichterförmige Körper durch eine ähnliche Integration gewonnen werden.

2. Bei dieser Rotation um die Y-Achse beschreibt die Parabel einen ringförmigen Körper, der den vorigen zu einem Zylinder ergänzt. Man berechne ihn als Differenz oder durch Integration aus einer Summe von Hohlzylindern.

3. Bei der Rotation der Parabel um die X-Achse bleibt ein haubenartiger Außenkörper übrig. Man berechne ihn durch Integration aus einer Summe von Hohlzylindern. Der Körper ergänzt das Paraboloid zu einem Zylinder, kann also auch als Differenz gewonnen werden.

Verschiebung der Parabel.

Eine Parabel habe die Scheitelgleichung $\eta^2 = 2 p \xi$ und gegen ein neues Achsenkreuz die horizontale Verschiebung h und die vertikale Verschiebung v (Fig. 40).

Ein beliebiger Punkt der Parabel hat also jetzt die Gleichung:

$$(y - v)^2 = 2\,p\,(x - h)$$

$$y^2 - 2\,v\,y + v^2 = 2\,p\,x - 2\,p\,h$$

oder: $y^2 - 2\,v\,y - 2\,p\,x + v^2 + 2\,p\,h = 0.$

Es sei nun folgende Gleichung einer allgemeinen Parabel gegeben:

$$y^2 + a\,y + b\,x + c = 0.$$

So ist hierin:

der Parameter

$$p = -\frac{b}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,a)$$

die Vertikalverschiebung

$$v = -\frac{a}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,b)$$

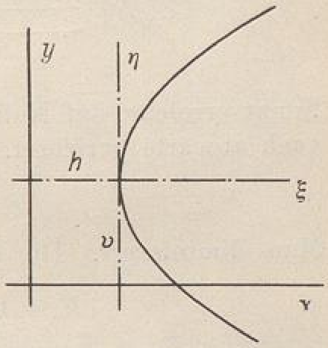

Fig. 40.

die Horizontalverschiebung

$$h = \frac{c - v^2}{2\,p} = \frac{c - \frac{a^2}{4}}{-b} = \frac{a^2 - 4\,c}{4\,b} \quad . \quad . \quad (20\,c)$$

Die allgemeine Parabelgleichung.

Eine Gleichung zweiten Grades ist dann eine Parabelgleichung, wenn die eine Koordinate nur in der ersten Potenz, die andere Koordinate in der zweiten oder in der ersten und zweiten Potenz und außerdem kein Produkt beider Koordinaten vorkommt.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$y^2 + a\,y + b\,x^2 + c\,x + d\,y\,x + e = 0$$

stellt also dann eine Parabel vor, wenn $b = 0$ und $d = 0$ ist.

Diese Gleichung stellt dagegen einen Kreis dar, wenn $d = 0$ und $b = 1$ ist. Siehe Gleichung (10).

Anwendungen: 1. Ein Geschoß verläßt das Geschützrohr, welches um den Winkel α gegen die Horizontale geneigt ist, mit der Geschwindigkeit v, Fig. 41. Man soll die Gleichung der Geschoßbahn bestimmen, wenn der Luftwiderstand nicht berücksichtigt wird.

Anleitung: Das Geschoß behält die horizontale Geschwindigkeit $v_1 = v \cdot \cos \alpha$ während der ganzen Flugzeit bei, so daß es nach t Sekunden einen horizontalen Weg $s = v_1 \cdot t$ zurückgelegt hat. Die vertikale Geschwindigkeit v_2 des Geschosses ändert sich nach den Gesetzen des freien Falles. Sie ist beim Verlassen des Geschützrohres $v_2 = v \cdot \sin \alpha$, vermindert sich bis zum Augenblick, wo das Geschoß seinen höchsten

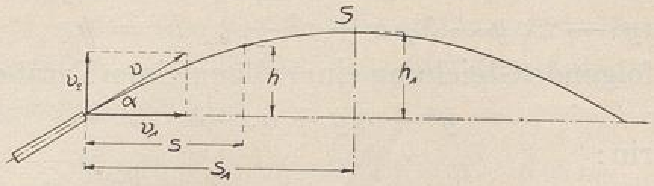

Fig. 41.

Punkt erreicht, auf Null und wächst dann ins Negative, d. h. ist dann nach abwärts gerichtet. Die Flughöhe h ist nach t Sekunden

$$h = v_2 \cdot t - \frac{g\,t^2}{2}.$$

Man eliminiere t. Die Gleichung der Kurve erhält man zu

$$h = \operatorname{tg} \alpha \cdot s - \frac{g}{2} \cdot \frac{s^2}{v^2 \cdot \cos^2 \alpha}.$$

Welcher Art ist die Kurve? Welches sind die Koordinaten s_1 und h_1 des höchsten Punktes der Kurve? Man bestimme Tragweite s_2 und höchste Erhebung h_1 für ein Infanteriegeschoß mit $v = 800$ m/sec und $\alpha = 20^0$.

2. Ein Freiträger trägt an seinem nicht eingespannten Ende eine Einzellast Q. Wie groß ist in jedem Querschnitt das Biegungsmoment M_b? (Bezeichnungen nach Fig. 42.) Wie groß werden die Biegungsmomente bei gleichmäßig verteilter Last Q? Welche Kurven entstehen,

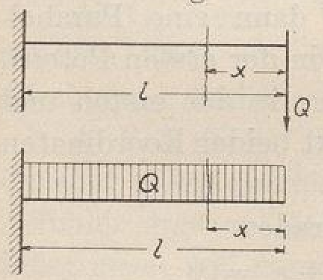

Fig. 42.

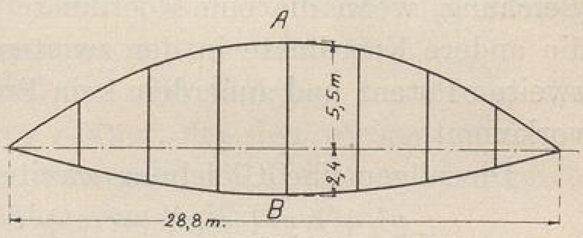

Fig. 43.

wenn man in jedem Trägerquerschnitt das Biegungsmoment für Einzellast und für verteilte Last aufträgt? In welcher Beziehung stehen die beiden Kurven zueinander? Zeichne beide Kurven für $Q = 1000$ kg und $l = 1$ m. Maßstab für die Längen 1 : 10, für M_b 1 mm = 2000 cmkg

3. Die obere und die untere Gurtung des in Fig. 43 gezeichneten Brückenträgers sollen die Form einer Parabel mit dem Scheitel in A bezw. B haben. Die eingeschriebenen Maße des mittleren Stabes sind gegeben. Man bestimme rechnerisch die Länge der übrigen sechs senkrechten Stäbe, welche gleiche Entfernung voneinander haben.