Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Konstruktionen der Parabel

Konstruktionen der Parabel.

1. Aus der Erklärung ergibt sich eine einfache Konstruktion der Parabel, wenn Leitlinie und Brennpunkt gegeben sind. Man zieht eine beliebige Parallele zur Leitlinie und schlägt mit dem Abstand beider Linien einen Kreis um den Brennpunkt. Wo dieser die Parallele trifft, ist ein Punkt der Parabel. So verfährt man beliebig oft.

2. Aus dem Satz, daß sich die Abszissen wie die Quadrate der Ordinaten verhalten, ergibt sich die Konstruktion, wenn Scheitel S, Scheiteltangente SO und ein beliebiger Punkt P gegeben sind (Fig. 30).

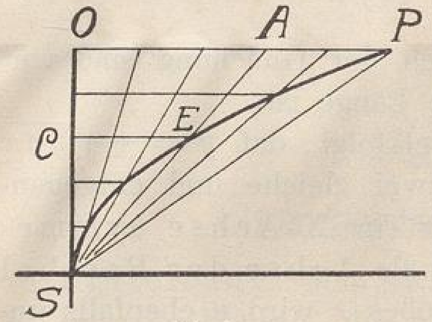

Fig. 30.

Man fällt von P ein Lot auf SO, teilt OP und SO in gleich viel Teile. Durch die Teile von OS zieht man Parallelen zu OP und verbindet die Teile von OP mit S, dann sind die in Fig. 30 hervorgehobenen Punkte Parabelpunkte.

Beweis: Punkt P habe die Koordinaten $x_1 y_1$ und Punkt C sei ein laufender Punkt mit den Koordinaten x und y. Dann ist:

$$CE = \frac{3}{5} OA = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5} OP\right)$$

oder

$$x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 x_1$$

Ferner ist:

$$SC = \frac{3}{5} SO$$

oder

$$y = \frac{3}{5} y_1 \text{ und } y^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 y_1^2$$

Durch Division erhält man:

$$\frac{x}{y^2} = \frac{x_1}{y_1^2} \text{ oder } \frac{x}{x_1} = \frac{y^2}{y_1^2}$$

Also verhalten sich die Abszissen wie die Quadrate der Ordinaten und der Punkt E gehört ebenso wie die andern konstruierten Punkte einer Parabel an.

3. Sind von der Parabel zwei Punkte P_1 und P_2 und die Tangenten $O\,P_1$ und $O\,P_2$ in diesen Punkten gegeben, so teilt man $O\,P_1$ und $O\,P_2$ in gleich viele Teile und verbindet die Teilpunkte, wie Fig. 31 zeigt. Die Verbindungslinien sind die umhüllenden Tangenten, in welche die eigentliche Parabel leicht eingezeichnet werden kann.

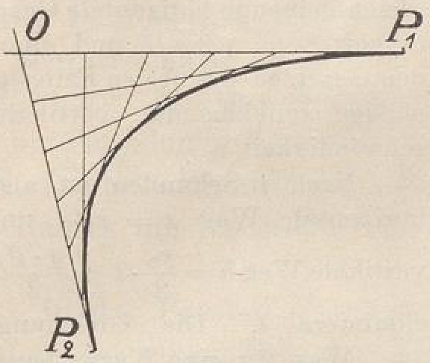

Fig. 31.

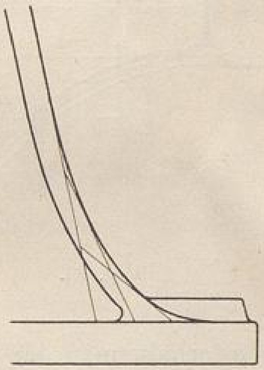

Fig. 32.

Anwendung: Letztere Konstruktion wird im Maschinenbau häufig angewendet, um Übergangskurven zwischen zwei rechtwinklig oder schief zueinander stehenden geraden Begrenzungslinien zu zeichnen. Die Parabel ergibt in solchen Fällen eine dem Auge besonders gefällige Form, z. B. Fig. 32.

Übung: 1. Die Gleichung der Parabel zu suchen, wenn die Leitlinie zur Y-Achse gemacht wird.

2. Die Gleichung der Parabel zu suchen, wenn das im Brennpunkt errichtete Lot zur Y-Achse gemacht wird.

3. Man zeichne in ein Achsenkreuz die Kurven $y^2 = 4\,x$ und $y^2 = \frac{1}{4}\,x$ und gebe die Leitlinien und Brennpunkte an. Man wähle hierzu einen großen Maßstab. Man schließe auf die Art der Kurven und überzeuge sich durch Nachmessen davon, daß beliebige Punkte der Kurve der Erklärung der Parabel genügen.

4. In der Parabel $y^2 = 18\,x$ soll der Punkt bestimmt werden, für den die Ordinate dreimal so groß ist wie die Abszisse.

Anwendung: Aus einem Gefäße, Fig. 33, strömt horizontal ein Wasserstrahl heraus. Man bestimme die Gleichung der Kurve, welche der Strahl beschreibt unter Vernachlässigung sämtlicher Reibungs- und Ausflußwiderstände.

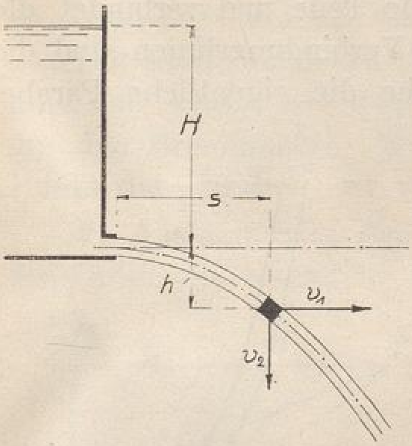

Fig. 33.

Anleitung: Jedes ausfließende Wasserteilchen, z. B. das in Fig. 33 schwarz hervorgehobene, hat eine gleichbleibende horizontale Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2\,g\,H}$ und eine nach den Gesetzen des freien Falles gleichmäßig zunehmende, vertikale Geschwindigkeit v_2.

Nach t Sekunden ist also der horizontale Weg $s = v_1 \cdot t$ und der vertikale Weg $h = \frac{v_2}{2} \cdot t = \frac{g \cdot t^2}{2}$. Man eliminiere t. Die Gleichung der Kurve erhält man zu $s^2 = 4 \cdot H \cdot h$. Was für eine Kurve beschreibt also der Strahl? Man zeichne die Kurve maßstäblich für $H = 1{,}20$ m. Man bestimme rechnerisch und zeichnerisch die Entfernung s_1, in welcher ein 0,75 m unter der Ausflußöffnung des Gefäßes liegender Wasserspiegel vom Strahl getroffen wird.

Der Parameter.

Errichtet man die Ordinate im Brennpunkt, so ist diese nach der Erklärung der Parabel gleich dem Abstand des Berührungspunktes von der Leitlinie, also ist in diesem Falle $P_1 F = P_1 L = p$ (Fig. 34).

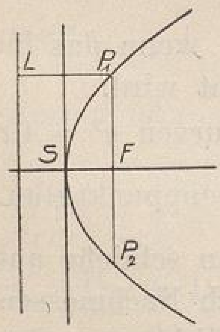

Fig. 34.

Verlängert man diese Ordinate um sich selbst, so erhält man $2\,p$ und nennt diese Länge den Parameter. Zieht man also durch den Brennpunkt eine Sehne senkrecht zur Achse, so ist diese gleich dem Parameter.

Man kann demnach sehr einfach freihändig eine der Parabel nahe kommende Kurve zeichnen, wenn der Scheitel S und der Brennpunkt F gegeben sind. Man trägt senkrecht zur Achse die Strecken $F P_1 = F P_2 = 2\,F S$ auf und verbindet die Punkte P_1, S und P_2 durch eine Kurve, welche die Achse $F S$ in S rechtwinklig schneidet.