Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Der Parameter

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Anwendung: Aus einem Gefäße, Fig. 33, strömt horizontal ein Wasserstrahl heraus. Man bestimme die Gleichung der Kurve, welche der Strahl beschreibt unter Vernachlässigung sämtlicher Reibungs- und Ausflußwiderstände.

Anleitung: Jedes ausfließende Wasserteilchen, z. B. das in Fig. 33 schwarz hervorgehobene, hat eine gleichbleibende horizontale Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2\,g\,H}$ und eine nach den Gesetzen des freien Falles gleichmäßig zunehmende, vertikale Geschwindigkeit v_2.

Nach t Sekunden ist also der horizontale Weg $s = v_1 \cdot t$ und der vertikale Weg $h = \frac{v_2}{2} \cdot t = \frac{g \cdot t^2}{2}$. Man eliminiere t. Die Gleichung der Kurve erhält man zu $s^2 = 4 \cdot H \cdot h$. Was für eine Kurve beschreibt also der Strahl? Man zeichne die Kurve maßstäblich für $H = 1{,}20$ m. Man bestimme rechnerisch und zeichnerisch die Entfernung s_1, in welcher ein 0,75 m unter der Ausflußöffnung des Gefäßes liegender Wasserspiegel vom Strahl getroffen wird.

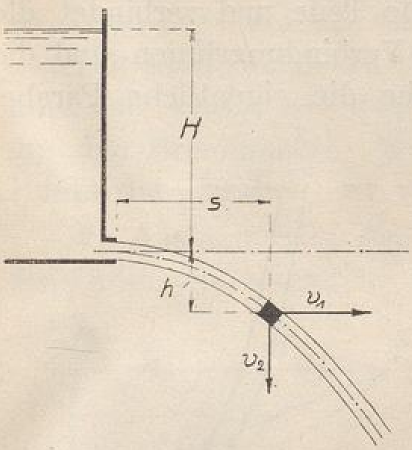

Fig. 33.

Der Parameter.

Errichtet man die Ordinate im Brennpunkt, so ist diese nach der Erklärung der Parabel gleich dem Abstand des Berührungspunktes von der Leitlinie, also ist in diesem Falle $P_1 F = P_1 L = p$ (Fig. 34).

Verlängert man diese Ordinate um sich selbst, so erhält man $2\,p$ und nennt diese Länge den Parameter. Zieht man also durch den Brennpunkt eine Sehne senkrecht zur Achse, so ist diese gleich dem Parameter.

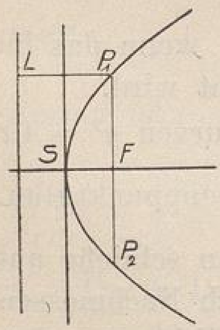

Fig. 34.

Man kann demnach sehr einfach freihändig eine der Parabel nahe kommende Kurve zeichnen, wenn der Scheitel S und der Brennpunkt F gegeben sind. Man trägt senkrecht zur Achse die Strecken $F P_1 = F P_2 = 2 F S$ auf und verbindet die Punkte P_1, S und P_2 durch eine Kurve, welche die Achse $F S$ in S rechtwinklig schneidet.

Aufgabe: Die Koordinaten der Schnittpunkte einer Geraden $y = Mx + n$ und der Parabel $y^2 = 2px$ zu finden. Man erhält schließlich:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{p - Mn \pm \sqrt{p(p - 2Mn)}}{M^2}$$

und

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{p \pm \sqrt{p(p - 2Mn)}}{M}.$$

Die Parabel hat mit einer Geraden also im allgemeinen zwei Schnittpunkte.

Übung: 1. Die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 10x$ und der Geraden $y = 2x - 4$ zu bestimmen.

2. Die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 2px$ und des mit p als Radius um die Mitte der Leitlinie beschriebenen Kreises zu finden.

3. In der Parabel $y^2 = 4x$ sei eine Gerade gezogen, die mit dem positiven Teil der X-Achse einen Winkel von 60^0 einschließt und durch den Brennpunkt geht. Die Schnittpunkte und die Länge der Geraden zu bestimmen.

4. Man bestimme die Endpunkte der gemeinsamen Sehne des Kreises $x^2 + y^2 = 25$ und der Parabel $y^2 = 8x$.

Ähnlichkeit der Parabeln.

Vergleicht man verschiedene Parabeln mit einander, z. B. $y^2 = 4x$ und $y^2 = 6x$, so unterscheiden sich diese Gleichungen nur durch den Faktor $p = 2$ und $p = 3$.

Angenommen, in einer Parabel sei der Parameter n mal so groß wie in einer kleineren Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$, so wäre die Gleichung der größeren $y^2 = 2(np)x$. Nimmt man nun in der kleineren Parabel eine beliebige Abszisse x_1 und in der größeren Parabel eine n mal so große, also nx_1, so erhält man als zugehörige Ordinate in der kleineren Parabel $\sqrt{2px_1}$ und in der größeren

$$\sqrt{2(np)(nx_1)} = n\sqrt{2px_1}.$$

Zu einer n mal so großen Abszisse gehört also auch eine n mal so große Ordinate. Diese Stücke der Parabeln entsprechen