Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Ähnlichkeit der Parabeln

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Aufgabe: Die Koordinaten der Schnittpunkte einer Geraden $y = Mx + n$ und der Parabel $y^2 = 2px$ zu finden. Man erhält schließlich:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{p - Mn \pm \sqrt{p\,(p - 2\,Mn)}}{M^2}$$

und

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{p \pm \sqrt{p\,(p - 2\,Mn)}}{M}.$$

Die Parabel hat mit einer Geraden also im allgemeinen zwei Schnittpunkte.

Übung: 1. Die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 10\,x$ und der Geraden $y = 2\,x - 4$ zu bestimmen.

2. Die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ und des mit p als Radius um die Mitte der Leitlinie beschriebenen Kreises zu finden.

3. In der Parabel $y^2 = 4\,x$ sei eine Gerade gezogen, die mit dem positiven Teil der X-Achse einen Winkel von 60^0 einschließt und durch den Brennpunkt geht. Die Schnittpunkte und die Länge der Geraden zu bestimmen.

4. Man bestimme die Endpunkte der gemeinsamen Sehne des Kreises $x^2 + y^2 = 25$ und der Parabel $y^2 = 8\,x$.

Ähnlichkeit der Parabeln.

Vergleicht man verschiedene Parabeln mit einander, z. B. $y^2 = 4\,x$ und $y^2 = 6\,x$, so unterscheiden sich diese Gleichungen nur durch den Faktor $p = 2$ und $p = 3$.

Angenommen, in einer Parabel sei der Parameter n mal so groß wie in einer kleineren Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2\,p\,x$, so wäre die Gleichung der größeren $y^2 = 2\,(n\,p)\,x$. Nimmt man nun in der kleineren Parabel eine beliebige Abszisse x_1 und in der größeren Parabel eine n mal so große, also $n\,x_1$, so erhält man als zugehörige Ordinate in der kleineren Parabel $\sqrt{2\,p\,x_1}$ und in der größeren

$$\sqrt{2\,(n\,p)\,(n\,x_1)} = n\sqrt{2\,p\,x_1}.$$

Zu einer n mal so großen Abszisse gehört also auch eine n mal so große Ordinate. Diese Stücke der Parabeln entsprechen einander. Man sagt, die eine Parabel ist n mal so groß als die andere. Alle Parabeln sind einander ähnlich.

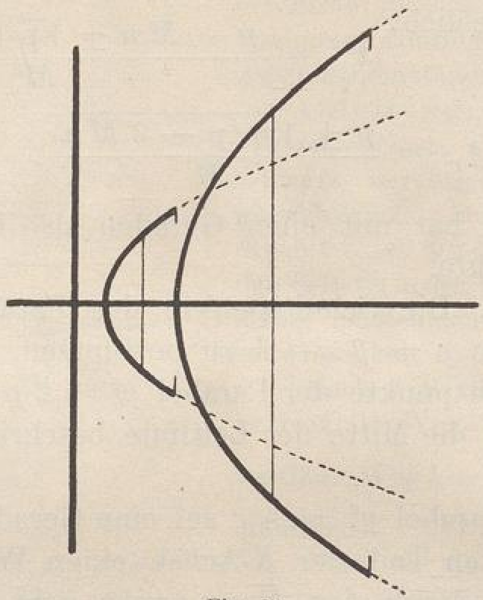

Fig. 35.

Fig. 35 zeigt zwei Parabeln mit gemeinsamer Leitlinie. In der größeren ist p dreimal so groß als in der kleineren. Die dick gezeichneten Stücke entsprechen einander.

Die Steigung der Parabel.

Die Steigung einer Kurve erhält man bekanntlich durch Differenzieren ihrer Gleichung:

$$y = \sqrt{2\,p\,x} = \sqrt{2\,p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\sqrt{2\,p}}{2\,x^{\frac{1}{2}}} = \frac{p}{\sqrt{2\,p\,x}} = \frac{p}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Besprechung: Der Wert $\frac{p}{y}$ des Differentialquotienten der Gleichung der Parabel ist für positive y positiv; die Kurve steigt also. Sie steigt bei kleinem y stark; je mehr die Ordinaten wachsen, desto weniger. Bei negativem y fällt sie, und zwar anfangs stärker, später schwächer. Auch aus den Figuren der Parabel ist dies leicht ersichtlich.