Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Tangente an die Parabel

Der Differentialquotient wird für keinen endlichen Wert von y zu Null, also ist kein „Extremwert", d. h. kein Maximum und kein Minimum vorhanden. Für $y = 0$ wird $\frac{p}{y}$ unendlich; der Steigungswinkel im Scheitel der Kurve ist also 90^0.

Übung: 1. Wie groß ist die Steigung der Parabel $y^2 = 4x$ an den Punkten mit den Abszissen 1, 2, 3, 4 usw.?

2. In welchen Punkten ist die Steigung gleich 1?

3. Unter welchem Winkel trifft der in Fig. 33 berechnete Wasserstrahl den 0,75 m unter der Ausflußöffnung des Gefäßes liegenden Wasserspiegel?

Die Tangente der Parabel.

Im Berührungspunkt hat die Parabel dieselbe Steigung wie die Tangente. Die Steigung der Parabel war durch Differenzierung ihrer Gleichung gefunden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

Dies ist die allgemeine Größe der Steigung. Die Steigung der Parabel im Berührungspunkt (x_1, y_1) ist also $\frac{p}{y_1}$. Von der Tangente kennen wir jetzt die Steigung und einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt.

Die Gleichung einer Geraden, die durch einen Punkt geht, und deren Steigung gleich M ist, war nach Gleichung (4):

$$M = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Setzt man hierin die berechnete Steigung ein, so erhält man:

$$\frac{p}{y_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Dies ist die Gleichung der Tangente. Sie läßt sich noch vereinfachen:

$$y y_1 - y_1^2 = px - px_1$$
$$y y_1 - 2px_1 = px - px_1$$
$$y y_1 = p(x + x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Bemerkung: Diese Gleichung der Tangente unterscheidet sich von derjenigen der Parabel dadurch, daß man statt des Quadrates y^2 das Produkt yy_1 und statt $2x$ die Summe $(x + x_1)$ hat. Die Gleichung ist von der zweiten Dimension, da p eine Länge ist.

Der Abschnitt der Tangente auf der Y-Achse.

Die Gleichung der Tangente ist $y y_1 = p(x + x_1)$. Für den Schnitt mit der Y-Achse ist $x = 0$. Setzt man dies ein, so erhält man

$$y = p \frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1^2}{2 y_1} = \frac{1}{2} y_1$$

Der Abschnitt der Tangente auf der Y-Achse ist also halb so groß wie die Ordinate des Berührungspunktes.

Bemerkung: Aus dieser Tatsache ergibt sich eine sehr einfache Konstruktion der Tangente. Man halbiert die Ordinate des Berührungspunktes, trägt die erhaltene Hälfte vom Scheitel auf der Y-Achse nach oben bezw. unten ab und zieht durch den erhaltenen Punkt und den Berührungspunkt eine Gerade. Dies ist die Tangente.

Übung: 1. An die Parabel $y^2 = 4x$ in einem ihrer Punkte mit der Ordinate $y_1 = 8$ cm eine Tangente zu legen. Wie heißt die Gleichung der Tangente in der Normalform? Maßstäbliche Zeichnung.

2. Für welchen Berührungspunkt der Parabel würde die Tangente parallel zur X-Achse gehen? Für welchen parallel zur Y-Achse?

3. Man stelle die Gleichungen der Tangenten auf, die eine Steigung von 30^0, 45^0, 60^0, 120^0, 135^0, 150^0 haben. Man bestimme die Koordinaten ihrer Berührungspunkte und die Größe ihrer Abschnitte auf den Achsen. Maßstäbliche Zeichnung für $p = 2$ cm.

4. Die Gleichung der Tangente aufzustellen, deren Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt. Wie groß ist ihr Steigungswinkel? Maßstäbliche Zeichnung für $p = 4$ cm.