# Leitfaden der Kurvenlehre

**Düsing, Karl**

**Hannover, 1911**

Die Berührungsgrößen

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

## Die Normale.

Errichtet man auf der Tangente in ihrem Berührungspunkt ein Lot, so heißt dies die Normale. Ihre Gleichung soll aufgestellt werden. Die Steigung eines Lotes war nach Gleichung (5)

$$M_1 = -\frac{1}{M}$$

wenn $M$ die Steigung der Geraden ist, auf der das Lot senkrecht steht.

Da nun die Steigung der Tangente $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y_1}$ war, so ist die der Normalen $\frac{dy}{dx} = -\frac{y_1}{p}$

Dies wird wie bei der Tangente in die Gleichung (4) einer Geraden eingesetzt, die durch einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt $x_1 y_1$, geht und eine gegebene Steigung hat:

$$-\frac{y_1}{p} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Aufgabe: Diese Gleichung ist auf die Normalform zu bringen und $n$ zu bestimmen.

## Die Berührungsgrößen.

Beim Kreise konnte man alle vier Berührungsgrößen planimetrisch bestimmen. Bei der Parabel berechnen wir eine dieser Größen analytisch und leiten aus ihr die anderen planimetrisch ab (Fig. 36).

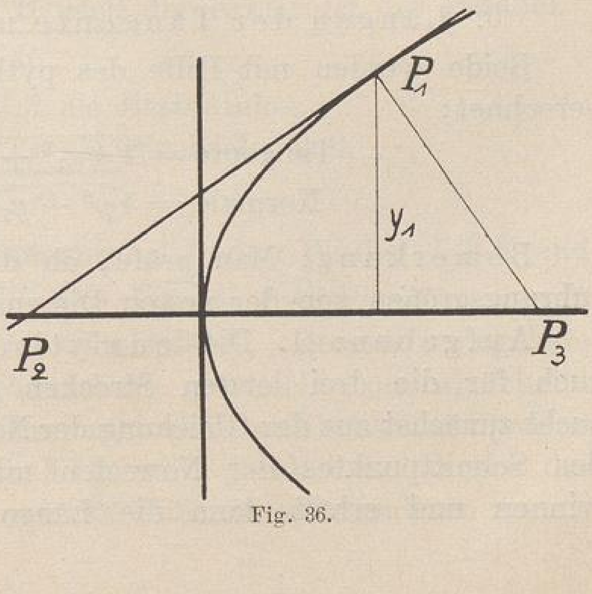

Fig. 36.

1. Länge der Subtangente.

Die Tangente $yy_1 = p(x + x_1)$ schneidet die $X$-Achse im Punkte $P_2$. Die Koordinaten dieses Schnittpunktes erfüllen die Gleichung $y_2 y_1 = p(x_2 + x_1)$. Für $P_2$ ist aber $y_2 = 0$. Also ist

$$0 = p(x_2 + x_1)$$
$$x_2 = -x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,a)$$

Demnach ist die Subtangente $= 2x_1$, also doppelt so groß als die Abszisse des Berührungspunktes; sie wird demnach im Scheitel der Parabel halbiert.

Bemerkung: Hieraus folgt eine weitere einfache Konstruktion der Tangente, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, durch Abtragen von $x_1$ (siehe auch Seite 40).

2. Länge der Subnormalen.

Hat man die Subtangente auf diesem analytischen Wege gefunden, so lassen sich die übrigen Größen sehr leicht planimetrisch bestimmen.

Die Ordinate des Berührungspunktes ist die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und Subnormalen

$$y_1^2 = \text{Subtangente} \times \text{Subnormale}$$

$$\text{Subnormale} = \frac{y_1^2}{2\,x_1} = \frac{2\,p\,x_1}{2\,x_1} = p \quad . \quad . \quad . \quad (17\,b)$$

Die Subnormale ist also für jeden Punkt der Parabel konstant, nämlich gleich dem halben Parameter.

3. Längen der Tangente und Normalen.

Beide werden mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes berechnet:

$$\text{Tangente} = \sqrt{4\,x_1^2 + 2\,p\,x_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,c)$$
$$\text{Normale} = \sqrt{p^2 + y_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,d)$$

Bemerkung: Man prüfe, ob die Formeln für die Berührungsgrößen von der ersten Dimension sind.

Aufgaben: 1. Die analytische Ableitung soll auch für die drei letzten Strecken gesucht werden. Man sucht zunächst aus der Gleichung der Normalen die Koordinaten des Schnittpunktes der Normalen mit der $X$-Achse zu gewinnen und erhält dann die Länge der Subnormalen als

Differenz zweier Abszissen. — Die Länge der Tangente und die der Normalen ergibt sich dann als Abstand ihrer Endpunkte $P_1$ und $P_2$ bzw. $P_1$ und $P_3$.

2. Man beweise, daß Subtangente und Subnormale zusammen gleich dem doppelten Brennstrahl $FB = LB$ (Fig. 37) sind.

Benennungen: Die Verbindung eines Punktes der Parabel mit dem Brennpunkt nennen wir Brennlinie oder Brennstrahl (Radius vector). Zieht man durch einen Punkt der Parabel eine Parallele zur $X$-Achse, so nennen wir diese Linie „Durchmesser„.

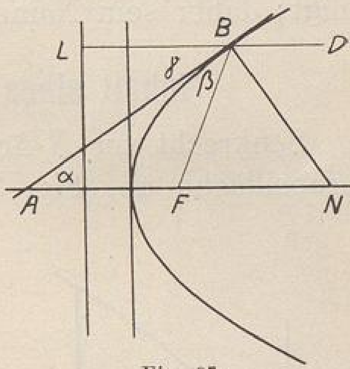

Fig. 37.

**Lehrsatz:** Die Tangente der Parabel halbiert den Winkel zwischen der Brennlinie und der Verlängerung des Durchmessers, die Normale den zugehörigen Nebenwinkel.

Beweis: $AF = x_1 + \frac{p}{2}$ (Fig. 37.),

$$LB = x_1 + \frac{p}{2} \text{ (Fig. 37)},$$

$$\underline{LB = FB} \text{ nach der Erklärung der Parabel,}$$

also ist $AF = FB$.

Daher $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$ als Basiswinkel,

$\underline{\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \gamma}$ als Wechselwinkel,

demnach $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma$.

Also halbiert die Tangente $AB$ den Winkel $LBF$ und demnach die Normale $PN$ den Winkel $FBD$.

Anwendung: Ein Hohlspiegel, dessen spiegelnde Fläche ein Rotations-Paraboloid ist (siehe unten), heißt parabolisch. Ein vom Brennpunkt eines parabolischen Spiegels ausgehender Lichtstrahl ($FB$) wird parallel zur Achse der Parabel zurückgeworfen ($BD$). Ebenso alle anderen von $F$