Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Inhalt eines Abschnittes der Parabel

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

ausgehenden Lichtstrahlen. Die Spiegel der Scheinwerfer sind deshalb parabolisch. Das Licht ist dem Spiegel meist etwas näher gerückt, damit die Strahlen ein wenig divergieren.

Umgekehrt werden alle parallel zur Achse eintretenden Lichtstrahlen im Brennpunkt vereinigt. Richtet man die Achse eines solchen Spiegels gegen die Sonne, so werden die Sonnenstrahlen vom Spiegel zurückgeworfen und im Brennpunkt vereinigt; daher sein Name.

Inhalt eines Abschnittes der Parabel.

Senkrecht zur X-Achse schneiden wir ein Stück von der Parabelfläche ab (Fig. 38). Wir berechnen den Inhalt des oberen Teiles dieses Abschnittes, indem wir ihn in senkrechte schmale Streifen von der Höhe y und der Breite $\triangle x$ zerlegen. Wenn jeder Streifen unendlich schmal ist, so kann er als Rechteck aufgefaßt werden, und sein Inhalt ist $y \cdot dx$. Die ganze Fläche wäre also:

$$F = \int y \cdot dx = \int \sqrt{2px} \cdot dx$$

Die Fläche bis zum Ende der Abszisse x_1 ist:

$$F = \int_{x=0}^{x=x_1} \sqrt{2px} \cdot dx =$$

$$= \sqrt{2p} \int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

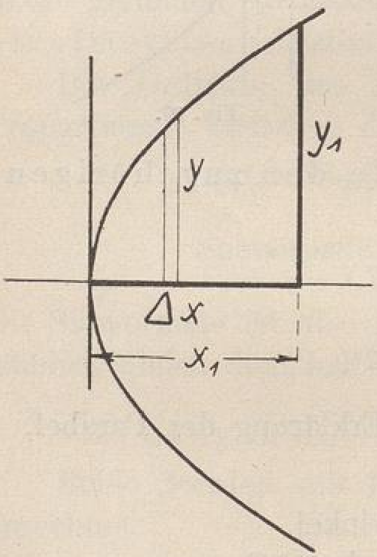

Fig. 38.

Integriert man diesen Ausdruck, so erhält man: $\left[\sqrt{2p}\,\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{x_1}$

Setzt man hierin die Grenzen ein, so wird:

$$F = \sqrt{2p}\,\frac{x_1^{3/2}}{3/2} - 0 = \frac{2}{3} x_1 \sqrt{2px_1} = \frac{2}{3} x_1 y_1 \;..(18)$$

Besprechung: Diese Formel ist von der zweiten Dimension. Die Fläche ist $^2/_3$ des umschließenden Rechtecks, was auch dem Augenmaß entspricht. In der Formel kann man x und y vertauschen, d. h. man erhält denselben Inhalt, wenn man die Parabel um 90^0 dreht und den Abschnitt bis y_1 rechnet.

Rotations-Paraboloid.

1. Berechnung nach dem Prinzip von Cavalieri.

Nach diesem Prinzip sind alle Körper inhaltsgleich, die in gleicher Höhe gleichen Querschnitt haben.

Läßt man eine Parabel um die X-Achse rotieren, so entsteht ein Rotations-Paraboloid, das wir uns aufrechtstehend

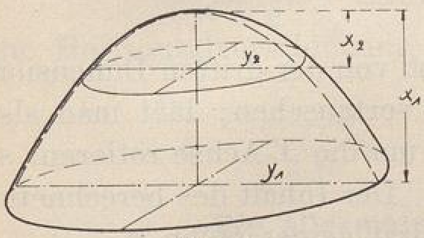

Fig. 39 a.

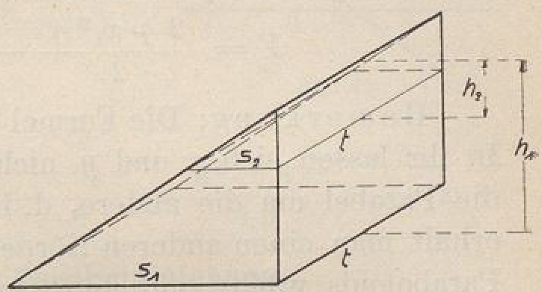

Fig. 39 b.

denken (Fig. 39 a). Da in einer Parabel sich die Abszissen x wie die Quadrate der Ordinaten y verhalten, so ist:

$$x_1 : x_2 = y_1^2 : y_2^2$$

$$\text{also auch } x_1 : x_2 = y_1^2 \pi : y_2^2 \pi.$$

Diese horizontalen Querschnitte durch das Paraboloid verhalten sich also wie die Höhen x. Dies ist auch bei dem daneben gezeichneten Dachkörper der Fall. Denn $h_1 : h_2 = s_1 : s_2 = s_1 t : s_2 t$. Beide Körper haben in gleicher Höhe gleiche Querschnitte, sind also inhaltsgleich. Ihre Grundflächen sind $s_1 t = y_1^2 \pi$.

Der Dachkörper ist aber die Hälfte des zugehörigen Prismas und sein Inhalt demnach $\frac{1}{2} G \cdot h$. Diese Formel gilt also auch für das Paraboloid und sein Inhalt bis zu den Koordinaten x_1 und y_1 ist

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{2} G \cdot h = \frac{1}{2} y_1^2 \pi \cdot x_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$