Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Rotations-Paraboloid

Besprechung: Diese Formel ist von der zweiten Dimension. Die Fläche ist $^2/_3$ des umschließenden Rechtecks, was auch dem Augenmaß entspricht. In der Formel kann man x und y vertauschen, d. h. man erhält denselben Inhalt, wenn man die Parabel um 90^0 dreht und den Abschnitt bis y_1 rechnet.

Rotations-Paraboloid.

1. Berechnung nach dem Prinzip von Cavalieri.

Nach diesem Prinzip sind alle Körper inhaltsgleich, die in gleicher Höhe gleichen Querschnitt haben.

Läßt man eine Parabel um die X-Achse rotieren, so entsteht ein Rotations-Paraboloid, das wir uns aufrechtstehend

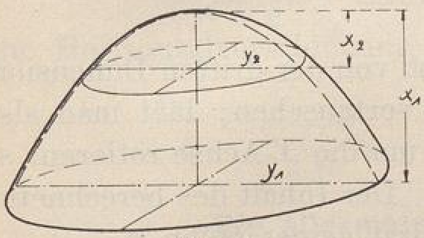

Fig. 39 a.

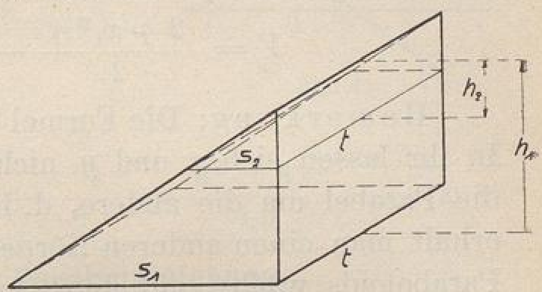

Fig. 39 b.

denken (Fig. 39 a). Da in einer Parabel sich die Abszissen x wie die Quadrate der Ordinaten y verhalten, so ist:

$$x_1 : x_2 = y_1^2 : y_2^2$$

$$\text{also auch } x_1 : x_2 = y_1^2 \pi : y_2^2 \pi.$$

Diese horizontalen Querschnitte durch das Paraboloid verhalten sich also wie die Höhen x. Dies ist auch bei dem daneben gezeichneten Dachkörper der Fall. Denn $h_1 : h_2 = s_1 : s_2 = s_1 t : s_2 t$. Beide Körper haben in gleicher Höhe gleiche Querschnitte, sind also inhaltsgleich. Ihre Grundflächen sind $s_1 t = y_1^2 \pi$.

Der Dachkörper ist aber die Hälfte des zugehörigen Prismas und sein Inhalt demnach $\frac{1}{2} G \cdot h$. Diese Formel gilt also auch für das Paraboloid und sein Inhalt bis zu den Koordinaten x_1 und y_1 ist

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{2} G \cdot h = \frac{1}{2} y_1^2 \pi \cdot x_1} \quad \ldots \quad (19)$$

2. Berechnung durch Integration.

Denken wir uns wie in Fig. 38 die Parabel in unendlich dünne Streifen zerlegt und lassen wir sie jetzt um die X-Achse rotieren, so entstehen unendliche dünne Scheiben von der Grundfläche $y^2 \pi$, der Dicke dx und dem Inhalt $y^2 \pi \cdot dx$. Der Gesamtinhalt ist also

$$V = \int_{x=0}^{x=x_1} y^2 \pi \, dx = \int_0^{x_1} 2 p x \pi \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{2 p x^2 \pi}{2} \right]_0^{x_1}$$

Setzt man die Grenzen $x = x_1$ und $x = 0$ ein, so erhält man denselben Wert wie vorher.

$$V = \frac{2 p x_1^2 \pi}{2} - 0 = \frac{y_1^2 x_1 \pi}{2}.$$

Bemerkung: Die Formel ist von der dritten Dimension. In ihr lassen sich x und y nicht vertauschen; läßt man also die Parabel um die andere, d. h. um die Y-Achse rotieren, so erhält man einen anderen Körper. Der Inhalt des berechneten Paraboloids wächst mit dem Quadrat seiner Höhe x.

Aufgabe: 1. Wenn man eine Parabel um die Y-Achse rotieren läßt, so soll der entstehende trichterförmige Körper durch eine ähnliche Integration gewonnen werden.

2. Bei dieser Rotation um die Y-Achse beschreibt die Parabel einen ringförmigen Körper, der den vorigen zu einem Zylinder ergänzt. Man berechne ihn als Differenz oder durch Integration aus einer Summe von Hohlzylindern.

3. Bei der Rotation der Parabel um die X-Achse bleibt ein haubenartiger Außenkörper übrig. Man berechne ihn durch Integration aus einer Summe von Hohlzylindern. Der Körper ergänzt das Paraboloid zu einem Zylinder, kann also auch als Differenz gewonnen werden.

Verschiebung der Parabel.

Eine Parabel habe die Scheitelgleichung $\eta^2 = 2 p \xi$ und gegen ein neues Achsenkreuz die horizontale Verschiebung h und die vertikale Verschiebung v (Fig. 40).