Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Verschiebung der Parabel

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

2. Berechnung durch Integration.

Denken wir uns wie in Fig. 38 die Parabel in unendlich dünne Streifen zerlegt und lassen wir sie jetzt um die X-Achse rotieren, so entstehen unendliche dünne Scheiben von der Grundfläche $y^2 \pi$, der Dicke dx und dem Inhalt $y^2 \pi \cdot dx$. Der Gesamtinhalt ist also

$$V = \int_{x=0}^{x=x_1} y^2 \pi \, dx = \int_0^{x_1} 2 p x \pi \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{2 p x^2 \pi}{2} \right]_0^{x_1}$$

Setzt man die Grenzen $x = x_1$ und $x = 0$ ein, so erhält man denselben Wert wie vorher.

$$V = \frac{2 p x_1{}^2 \pi}{2} - 0 = \frac{y_1{}^2 x_1 \pi}{2}.$$

Bemerkung: Die Formel ist von der dritten Dimension. In ihr lassen sich x und y nicht vertauschen; läßt man also die Parabel um die andere, d. h. um die Y-Achse rotieren, so erhält man einen anderen Körper. Der Inhalt des berechneten Paraboloids wächst mit dem Quadrat seiner Höhe x.

Aufgabe: 1. Wenn man eine Parabel um die Y-Achse rotieren läßt, so soll der entstehende trichterförmige Körper durch eine ähnliche Integration gewonnen werden.

2. Bei dieser Rotation um die Y-Achse beschreibt die Parabel einen ringförmigen Körper, der den vorigen zu einem Zylinder ergänzt. Man berechne ihn als Differenz oder durch Integration aus einer Summe von Hohlzylindern.

3. Bei der Rotation der Parabel um die X-Achse bleibt ein haubenartiger Außenkörper übrig. Man berechne ihn durch Integration aus einer Summe von Hohlzylindern. Der Körper ergänzt das Paraboloid zu einem Zylinder, kann also auch als Differenz gewonnen werden.

Verschiebung der Parabel.

Eine Parabel habe die Scheitelgleichung $\eta^2 = 2 p \xi$ und gegen ein neues Achsenkreuz die horizontale Verschiebung h und die vertikale Verschiebung v (Fig. 40).

Ein beliebiger Punkt der Parabel hat also jetzt die Gleichung:

$$(y - v)^2 = 2p(x - h)$$
$$y^2 - 2vy + v^2 = 2px - 2ph$$

oder: $y^2 - 2vy - 2px + v^2 + 2ph = 0.$

Es sei nun folgende Gleichung einer allgemeinen Parabel gegeben:

$$y^2 + ay + bx + c = 0.$$

So ist hierin:

der Parameter

$$p = -\frac{b}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,\text{a})$$

die Vertikalverschiebung

$$v = -\frac{a}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,\text{b})$$

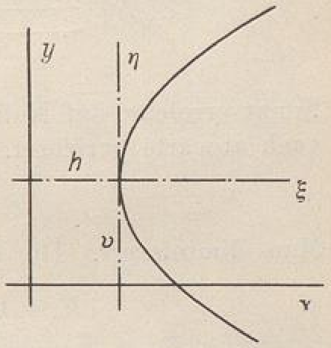

Fig. 41.

die Horizontalverschiebung

$$h = \frac{c - v^2}{2p} = \frac{c - \frac{a^2}{4}}{-b} = \frac{a^2 - 4c}{4b} \quad . \quad . \quad (20\,\text{c})$$

Die allgemeine Parabelgleichung.

Eine Gleichung zweiten Grades ist dann eine Parabelgleichung, wenn die eine Koordinate nur in der ersten Potenz, die andere Koordinate in der zweiten oder in der ersten und zweiten Potenz und außerdem kein Produkt beider Koordinaten vorkommt.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$y^2 + ay + bx^2 + cx + dyx + e = 0$$

stellt also dann eine Parabel vor, wenn $b = 0$ und $d = 0$ ist.

Diese Gleichung stellt dagegen einen Kreis dar, wenn $d = 0$ und $b = 1$ ist. Siehe Gleichung (10).

Anwendungen: 1. Ein Geschoß verläßt das Geschützrohr, welches um den Winkel α gegen die Horizontale geneigt ist, mit der Geschwindigkeit v, Fig. 41. Man soll die Gleichung der Geschoßbahn bestimmen, wenn der Luftwiderstand nicht berücksichtigt wird.

Anleitung: Das Geschoß behält die horizontale Geschwindigkeit $v_1 = v \cdot \cos \alpha$ während der ganzen Flugzeit bei, so daß es nach t Sekunden einen horizontalen Weg $s = v_1 \cdot t$ zurückgelegt hat. Die vertikale Ge-