



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Ellipse.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78413](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78413)

Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse.

Erklärung: Die Ellipse ist der geometrische Ort für diejenigen Punkte (P), für welche die Summe der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten (F_1 und F_2) gleich groß ist. In Fig. 44 ist $PF_1 + PF_2 = \text{Konstante} = 2a$.

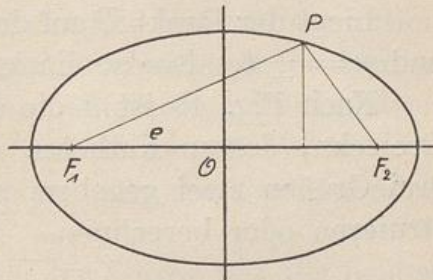


Fig. 44.

Ableitung der Gleichung: Wir legen die X -Achse durch $F_1 F_2$ und die Y -Achse als Lot hierzu durch die Mitte von $F_1 F_2$. Wir setzen $F_1 F_2 = 2e$. Wenn nun P ein beliebiger Punkt xy der Ellipse und die Summe seiner Entfernungen von F_1 und F_2 gleich $2a$ ist, so wird:

$$PF_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

$$PF_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$\text{Also: } \sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 2a.$$

Um die Wurzeln fortzuschaffen, quadriert man zweimal und erhält schließlich: $a^2 y^2 + x^2(a^2 - e^2) = a^2(a^2 - e^2)$.

Hierin setzt man $a^2 - e^2 = b^2$ (Fig. 45) und erhält:

$$\left. \begin{aligned} x^2 b^2 + y^2 a^2 &= a^2 b^2 \\ \text{oder: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

Bezeichnung: Die große Achse heißt Hauptachse ($= 2a$), die kleine heißt Nebenachse ($= 2b$). F_1 und F_2 sind die Brennpunkte, PF_1 und PF_2 sind die Brennlinien, Brennstrahlen oder Fahrstrahlen. Der Abstand der Brennpunkte vom Zentrum, z. B. OF_2 , heißt die Exzentrizität ($= e$). Jede Gerade, die durch den Mittelpunkt geht, ist ein Durchmesser.

Besprechung: Aus der Formel (21) der Ellipse folgt, daß

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

ist. Zu jedem x gehören also zwei gleiche und entgegengesetzte y ; die Kurve ist demnach zur X -Achse symmetrisch. Dasselbe läßt sich für die Y -Achse nachweisen.

Liegt der Punkt P auf der X -Achse, so ist $y = 0$ und $x = \pm a$, also ist die große Achse $= 2a$.

Liegt der Punkt P auf der Y -Achse (Fig. 45), so ist $x = 0$ und $y = \pm b$, also ist die kleine Achse gleich $2b$.

Nach Fig. 45 ist a die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten e und b sind. Sind von diesen drei Größen zwei gegeben, so läßt sich die dritte leicht konstruieren oder berechnen.

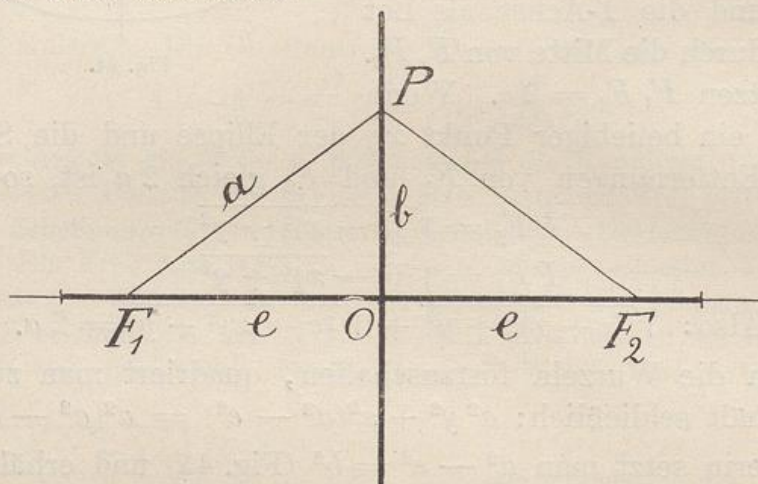


Fig. 45.

Für $x > a$ wird y imaginär und für $y > b$ wird x imaginär. Hier liegen also keine Punkte der Ellipse.

Wird $a = b$, so wird die Ellipse zum Kreis. Dieser ist demnach nur ein besonderer Fall der Ellipse.

Konstruktionen der Ellipse.

1. Aus der Erklärung ergibt sich eine einfache Konstruktion der Ellipse aus der großen Achse und den Brennpunkten. Man teilt die große Achse in zwei beliebig große Teile und schlägt mit dem einen Teil um den einen Brennpunkt, mit dem anderen Teil um den anderen Brennpunkt einen Kreis. Die erhaltenen Kreise schneiden sich in zwei Ellipsenpunkten. Dies Verfahren wiederholt man beliebig oft.

2. Bei der Fadenkonstruktion befestigt man zwei Stifte in den Brennpunkten und schlingt einen unelastischen Faden herum. Dann spannt man durch die Spitze eines Bleistiftes den Faden an und fährt mit ihr an der Innenseite des Fadens hin, indem man zugleich auf das Papier zeichnet. Es entsteht eine Ellipse. In der Praxis ist diese Konstruktion nur dann angebracht, wenn keine große Genauigkeit der Ellipse verlangt wird (z. B. zum Anreißen elliptischer Tischplatten oder elliptischer Gewölbebogen), weil es keinen Faden gibt, welcher unelastisch und gleichzeitig für den vorliegenden Zweck geschmeidig genug ist.

3. Die bequemste Konstruktion der Ellipse aus den beiden Achsen ist folgende (Fig. 46). Man trägt auf einem Papier-

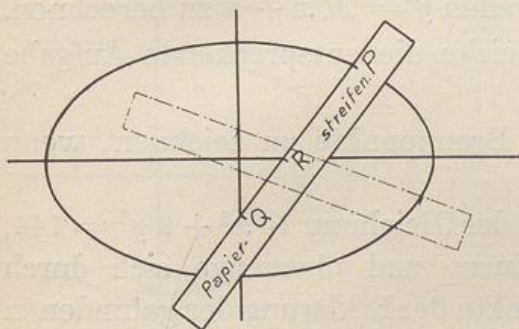


Fig. 46.

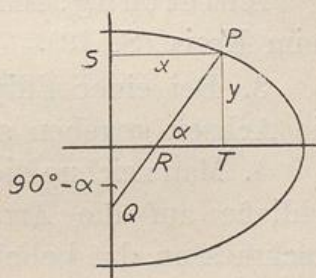


Fig. 47.

streifen mit genau gerader Kante die beiden Halbachsen $PQ = a$ und $PR = b$ von P aus aufeinander ab, so daß $QR = a - b$ ist. Dann verschiebt man den Papierstreifen derart, daß sich der Punkt Q auf der kleinen Achse und der Punkt R auf der großen Achse bewegt. Der Punkt P beschreibt dann eine Ellipse. Man zeichnet bei verschiedenen Stellungen des Streifens den Punkt P von diesem auf das Zeichenpapier mit einem scharfen Bleistift.

Die letztere Ellipsenkonstruktion ist sehr vorteilhaft, weil in der Praxis meist die Achsen der Ellipse gegeben sind und weil keine Hilfslinien auf das Papier gezeichnet werden. Diese Konstruktion gibt auch die Grundlage zu einem Ellipsenzirkel.

Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion ergibt sich nach Fig. 47 wie folgt:

$$y = PR \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \alpha$$

Quadriert: $y^2 = b^2 \cdot \sin^2 \alpha$

Erweitert: $a^2 y^2 = a^2 b^2 \cdot \sin^2 \alpha \dots \dots \dots$ I

$$x = PQ \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = a \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 x^2 = a^2 b^2 \cdot \cos^2 \alpha \dots \dots \dots$$
 II

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \dots \dots \dots$$
 I + II

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$
 Diese Gleichung stellt aber die

Ellipse mit den Halbachsen a und b dar.

Übung: 1. Wie groß ist x für $y = 0$, und wie groß y für $x = 0$?

2. Die Koordinaten des Schnittpunktes der Ellipse $x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$ mit einer Geraden $y = Mx + n$ zu berechnen.

Anleitung: Man vergleiche die entsprechende Aufgabe beim Kreis (S. 19).

3. Bei einer Ellipse die Brennpunkte zu zeichnen, wenn die Achsen gegeben sind.

4. Man zeichne die Kurve der Gleichung $16x^2 + 9y^2 = 144$, schließe auf die Art der Kurve und überzeuge sich durch Nachmessen, daß beliebige Punkte der Erklärung der gefundenen Kurve genügen.

5. Ein Punkt der Ellipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ hat die Ordinate $y_1 = 2$. Wie groß ist seine Abszisse?

6. Zwei Punkte der Ellipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ haben die Abszissen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$. Wie groß ist die zugehörige Sehne?

7. Von einer Ellipse ist $e = 4$ cm und $a = 5$ cm gegeben. Wie lautet ihre Gleichung?

8. Auf der Ellipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ ist ein Punkt mit der Abszisse $x_1 = 2,5$ gegeben. Wie lang sind seine Brennlinien?

Der Parameter.

Wir berechnen die Ordinate y_1 im Brennpunkt, indem wir die Abszisse $x_1 = e$ in die Gleichung der Ellipse einsetzen:

$$e^2 b^2 + y_1^2 a^2 = a^2 b^2$$

Nach Fig. 45 ist aber $e^2 = a^2 - b^2$. Dies wird eingesetzt und ergibt:

$$a^2 b^2 - b^4 + y_1^2 a^2 = a^2 b^2$$

Also ist: $y_1^2 = \frac{b^4}{a^2}$ und $y_1 = \pm \frac{b^2}{a}$

Bei der Parabel war die Ordinate im Brennpunkt $y_1 = p$.

Bei der Ellipse kann man nun die Ordinate $y_1 = \frac{b^2}{a} = p$ setzen. Dann ist die ganze Sehne des Brennpunktes, die senkrecht zur Achse steht, gleich $2p$. Auch hier nennen wir diese Sehne den Parameter (Fig. 48).

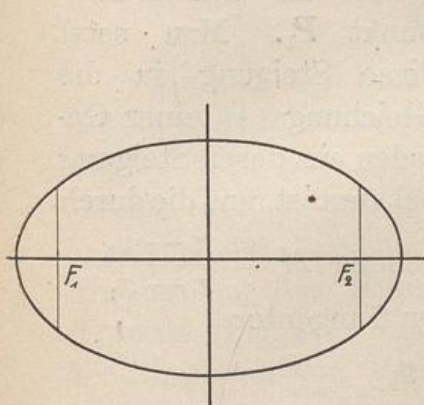


Fig. 48.

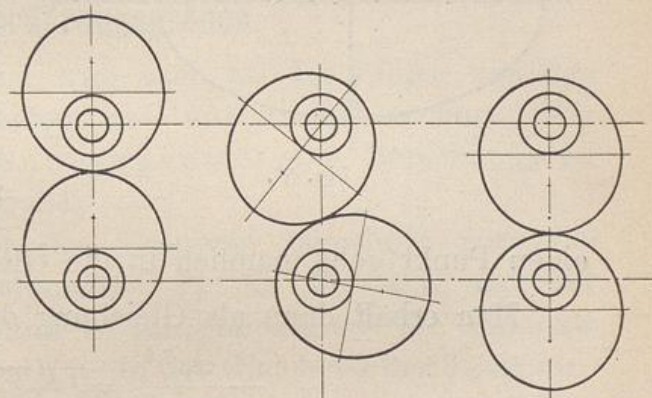


Fig. 49 (a—c).

Anwendung: Die Eigenschaft der Ellipse, daß die Summe der Fahrstrahlen konstant ist, findet unter anderem Anwendung bei elliptischen Zahnrädern, welche man an manchen Textilmaschinen findet. Der Zahnkranz hat die Form einer Ellipse, und beide Zahnräder sind einander kongruent. Die Bohrungen der Zahnräder liegen in den Brennpunkten der Ellipse. Wenn sich nach Fig. 49 das obere Rad mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit dreht, so dreht sich das untere Rad mit veränderlicher Geschwindigkeit. Fig. 49 a zeigt die Stellung der kleinsten, Fig. 49 b diejenige einer mittleren und Fig. 49 c diejenige der größten Winkelgeschwindigkeit des unteren Rades.

Die Tangente an die Ellipse.

Wie bisher berechnen wir auch bei der Ellipse ihre Steigung durch Differenzieren der Gleichung der Ellipse:

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$$

$$2 x b^2 + 2 y a^2 \frac{d y}{d x} = 0$$

Die Steigung ist also: $\frac{d y}{d x} = - \frac{x b^2}{y a^2} \dots \dots \dots (22)$

Folglich ist $-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$ die Steigung der Kurve im Punkte P_1

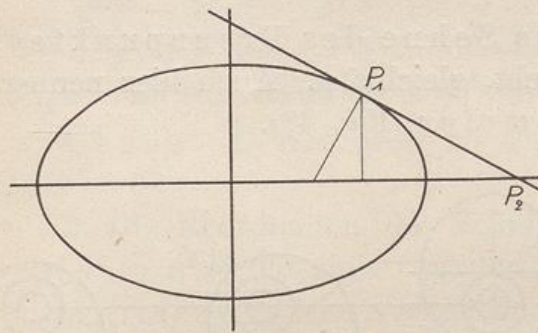


Fig. 50.

mit den Koordinaten $x_1 y_1$ (Fig. 50). Diese Steigung ist aber auch zugleich die Steigung der Tangente im Berührungspunkt P_1 . Man setzt diese Steigung in die Gleichung (4) einer Geraden ein, deren Steigung bekannt ist, und die durch

einen Punkt geht, nämlich in die Gleichung $M = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

Man erhält dann als Gleichung der Tangente:

$$-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Diese Gleichung läßt sich wie beim Kreis vereinfachen:

$$y y_1 a^2 - y_1^2 a^2 = - x x_1 b^2 + x_1^2 b^2$$

$$y y_1 a^2 + x x_1 b^2 = x_1^2 b^2 + y_1^2 a^2$$

$$x x_1 b^2 + y y_1 a^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1 \dots \dots \dots (23)$$

Bemerkung: Wie beim Kreis unterscheidet sich diese Gleichung der Tangente von der der Ellipse dadurch, daß aus x^2 und y^2 die Produkte $x x_1$ und $y y_1$ geworden sind.

Aufgabe: 1. Man verfolge die Änderung des Differentialquotienten mit dem Verlauf der Kurve.

2. Man bringe die Gleichung (23) der Tangente auf die Normalform.

Normale.

Da die Steigung der Tangente $-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$ ist, so ist die der Normalen $+\frac{y_1 a^2}{x_1 b^2}$. Setzt man diese in die Gleichung (4) einer Geraden ein, deren Steigung gegeben ist und die durch den Berührungspunkt geht, so erhält man als Gleichung der Normalen:

$$\frac{y_1 a^2}{x_1 b^2} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Aufgabe: Diese Gleichung auf die Normalform zu bringen und n zu bestimmen.

Berührungsgrößen.

Wie bei der Parabel wird auch bei der Ellipse von den Berührungsgrößen mindestens eine analytisch berechnet. Wir wählen auch hier die Subtangente. Die Berechnung ist ähnlich der bei der Parabel.

Aus der Gleichung der Tangente berechnet man die Abszisse x_2 des Schnittpunktes P_2 der Tangente mit der X-Achse (Fig. 50). Alsdann ist die Subtangente die Differenz der Abszissen von P_2 und P_1 . In der Gleichung der Tangente:

$$x_2 x_1 b^2 + y_2 y_1 a^2 = a^2 b^2 \text{ wird } y_2 = 0 \text{ und daher:}$$

$$x_2 = \frac{a^2 b^2}{x_1 b^2} = \frac{a^2}{x_1}$$

$$\text{Subtangente} = x_2 - x_1 = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$$

Ferner ergibt sich die Subnormale daraus, daß die Ordinate y_1 des Berührungspunktes P_1 die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und Subnormalen ist.

$$y_1^2 = \text{Subtangente} \times \text{Subnormale}$$

$$y_1^2 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1} \times \text{Subnormale}$$

$$\text{Subnormale} = \frac{y_1^2 x_1}{a^2 - x_1^2} = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_1^2) \frac{x_1}{a^2 - x_1^2}$$

$$\text{Subnormale} = \frac{b^2 x_1}{a^2} = \frac{p}{a} x_1.$$

Die Längen von Tangente und Normale ergeben sich aus dem pythagoreischen Lehrsatz.

$$\text{Tangente} = \sqrt{\frac{(a^2 - x_1^2)^2}{x_1^2} + y_1^2}$$

$$\text{Normale} = \sqrt{\frac{b^4}{a^4} x_1^2 + y_1^2}$$

Bemerkung: Man prüfe, von welcher Dimension die Formeln sind.

Oben war die Entfernung des Punktes P_2 von dem Achsen-schnittpunkt berechnet worden, nämlich $x_2 = \frac{a^2}{x_1}$. Dies Re-

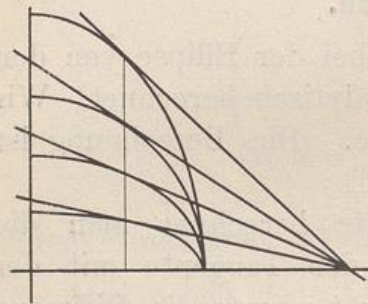


Fig. 51.

sultat ist von der kleinen Achse b unabhängig und nur von a und x_1 abhängig. Die Tangenten aller Ellipsen mit gleicher horizontaler Achse, deren Berührungspunkte senkrecht übereinander liegen, schneiden sich also in einem Punkte auf dieser Achse (Fig. 51).

Übung: 1, Die Gleichung der Tangente aufzustellen, deren Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt. Maßstäbliche Zeichnung für $a = 6$ und $b = 4$ cm.

2. Wie groß ist der Winkel dieser Tangente mit der X-Achse?
3. Für welchen Berührungspunkt der Ellipse geht die Tangente parallel zur X-Achse? Für welchen parallel zur Y-Achse?

4. Man stelle die Gleichungen der Tangenten auf, die eine Steigung von 30° , 45° , 60° , 120° , 135° , 150° haben. Man bestimme die Koordinaten ihrer Berührungspunkte und die Größen ihrer Abschnitte auf den Achsen. Maßstäbliche Zeichnung für $a = 6$ und $b = 4$ cm.

5. An die Ellipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ in dem Berührungspunkte, dessen $y_1 = 3$ cm ist, eine Tangente zu legen. Normalform. Maßstäbliche Zeichnung in cm.

6. Man bestimme die Steigung der Ellipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ an den Punkten mit der Abszisse 0, 1, 2, 3, 4, 5 cm.
 7. Wo hat die Ellipse die Steigung 1?

Die Scheitelgleichung der Ellipse.

Die Mittelpunktsleichung war: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Verschiebt man die senkrechte Achse in den Scheitel links (Fig. 52), so bleibt für den Punkt P die Ordinate y unverändert; dagegen wird $x = \xi - a$. Die Scheitelgleichung der Ellipse lautet also:

$$\begin{aligned} \frac{(\xi - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{\xi^2 - 2a\xi + a^2}{a^2} \\ \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{2\xi}{a} - 1 \\ y^2 &= 2\frac{b^2}{a}\xi - \frac{b^2}{a^2}\xi^2 \quad \dots \quad (24) \end{aligned}$$

Setzt man auch hier $\frac{b^2}{a} = p$ und für ξ das gebräuchlichere x , so erhält man:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

Bemerkung: Diese Formel unterscheidet sich durch das Glied mit x^2 von derjenigen der Parabel.

Aufgabe: 1. Man verschiebe die Y -Achse in den Brennpunkt und stelle die Gleichung auf.

2. Man verschiebe die X -Achse in den oberen Scheitel und stelle die Gleichung auf.

3. Man zeichne die Kurve der Gleichung $y^2 + 2x^2 - 40x = 0$. Man schließe auf die Art der Kurve und überzeuge sich durch Nachmessen, daß sie der Erklärung genügt.

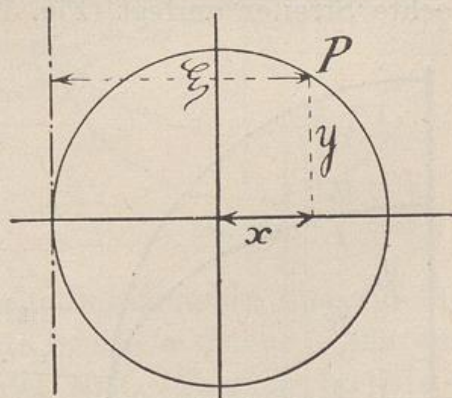


Fig. 52.

4. In welchem Punkte hat die Kurve $y^2 = 4x - 2x^2$ ihr Maximum?

Der Inhalt der Ellipse.

Wenn die Gleichung der Ellipse $x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$ ist, so ist die Ordinate der Ellipse:

$$y_e = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Schlägt man nun um den Mittelpunkt der Ellipse einen Kreis mit der halben großen Achse, so ist die Ordinate des Kreises:

$$y_k = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Diese beiden Werte für die Ordinaten vergleichen wir miteinander und finden, daß y_e jedesmal $\frac{b}{a}$ mal so groß ist wie das betreffende y_k , d. h. dasjenige y_k , das zu demselben x gehört. Multipliziert man also die Ordinaten des Kreises mit $\frac{b}{a}$, so erhält man die Ellipse. —

Denkt man sich jetzt die Ellipse in unendlich schmale senkrechte Streifen zerlegt (Fig. 53), so ist der Inhalt eines jeden

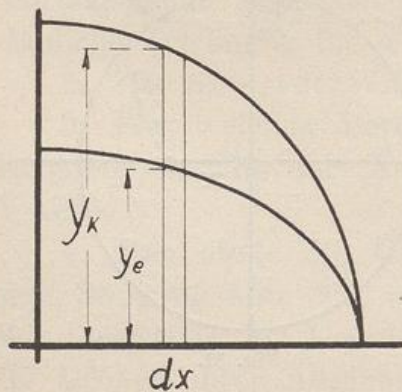


Fig. 53.

$$y_e \cdot dx = \frac{b}{a} y_k \cdot dx$$

Der ganze Inhalt der Ellipse:

$$\int \frac{b}{a} y_k \cdot dx = \frac{b}{a} \int y_k \cdot dx$$

Dies Integral ist aber der Inhalt des gezeichneten Kreises, also $a^2 \pi$.

Demnach ist der Inhalt der Ellipse:

$$\frac{b}{a} a^2 \pi = a b \pi \quad \dots \quad (25)$$

Besprechung: Die Formel ist von der zweiten Dimension. In ihr kann man a und b vertauschen, d. h. dreht

man das Achsenkreuz um 90° , so erhält man dieselbe Formel. Wird $a = b$, so wird die Ellipse zum Kreis. Ein Vergleich mit dem umschließenden Rechteck ($4ab$) bestätigt, daß die Ellipse ($ab\pi$) kleiner ist als dies Rechteck.

Die Ellipse als Bild des Kreises.

Blickt man senkrecht auf die Fläche eines Kreises, so erscheint dieser als Kreis. Dreht man ihn jetzt um einen Durchmesser, so erscheint der senkrecht hierzu stehende Durchmesser verkürzt. Nehmen wir den Durchmesser, um den sich der Kreis dreht, als X -Achse, so sind alle y , also alle Ordinaten verkürzt.

Wenn der Durchmesser des Kreises $2a$ ist und der verkürzte $2b$ lang erscheint, so beträgt die Verkürzung auch für alle parallelen Strecken, also für alle Ordinaten $b:a$ (Fig. 54 a).

Betrachtet man zwei andere senkrecht zueinander stehende Durchmesser, z. B. AB und CD des Kreises, so werden die Ordinaten ihrer Endpunkte AF und CP im Verhältnis $b:a$ verkürzt, und man erhält die Durchmesser LM und NO der Ellipse. Man nennt sie konjugierte Durchmesser.

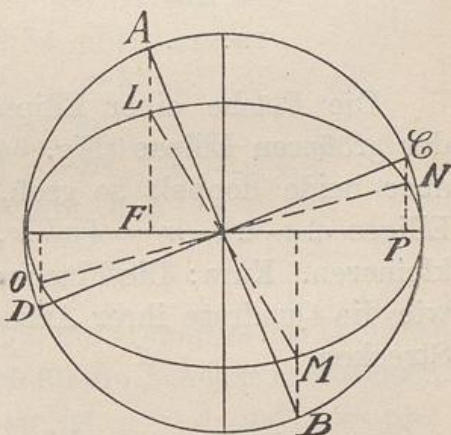


Fig. 54 a.

In einem Kreise halbiert ein Durchmesser alle auf ihm senkrecht stehenden Sehnen, d. h. solche Sehnen, die dem konjugierten Durchmesser parallel sind. Folglich halbiert auch in der Ellipse ein Durchmesser alle Sehnen, die dem konjugierten parallel sind; denn parallele Linien erscheinen in demselben Maße verkürzt.

Zwischen zwei konjugierten Durchmessern muß stets eine Achse liegen.

Ähnlichkeit der Ellipsen.

Alle Kreise sind einander ähnlich. Sieht man nun verschiedene Kreise unter demselben Winkel an, so werden bei ihnen entsprechende Strecken in demselben Maße verkürzt. Sie bleiben also proportional, und die entstandenen Ellipsen

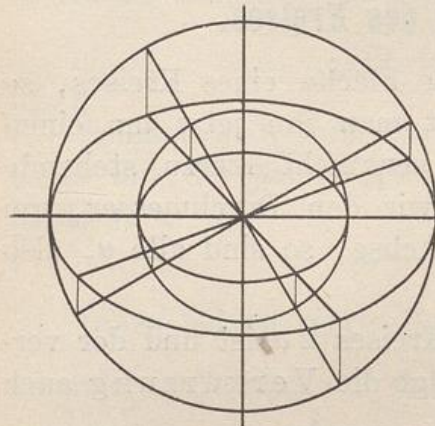


Fig. 54 b.

sind einander ähnlich. Ellipsen sind dann ähnlich, wenn bei ihnen das Verhältnis $b : a$ dasselbe ist.

Ähnliche Ellipsen lassen sich konzentrisch aufeinander legen (Fig. 54 b), sodaß die Achsen und konjugierten Durchmesser sich decken. Sie gehen durch entsprechende Punkte beider Ellipsen. Der Mittelpunkt ist hier „Ähnlichkeitspunkt“.

Die Fläche einer Ellipse ist $ab\pi$. Haben die Achsen der größeren Ellipse (Fig. 54) dasselbe Verhältnis $a : b$, sind aber beide doppelt so groß, so ist die Fläche der größeren Ellipse $2a \cdot 2b \cdot \pi = 4ab\pi$, also 4 mal so groß als die der kleineren. Kurz: Die Flächen ähnlicher Ellipsen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Achsen oder sonstiger entsprechender Strecken.

Hyperbel.

Die Gleichung der Hyperbel.

Erklärung: Eine Hyperbel ist der geometrische Ort derjenigen Punkte (P), für welche die Differenz der Abstände von zwei gegebenen Punkten (F_1 und F_2) gleich bleibt. In Figur 55 ist $PF_1 - PF_2 = \text{Konstante} = 2a$. Die Punkte F_1 und F_2 heißen Brennpunkte, ihr Abstand vom Zentrum O heißt Exzentrizität (e). Die Verbindungslinien PF_1 und PF_2 eines beliebigen Punktes P der Hyperbel mit den Brenn-