Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Gleichung der Ellipse

Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse.

Erklärung: Die Ellipse ist der geometrische Ort für diejenigen Punkte (P), für welche die Summe der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten (F_1 und F_2) gleich groß ist. In Fig. 44 ist $PF_1 + PF_2 =$ Konstante $= 2\,a$.

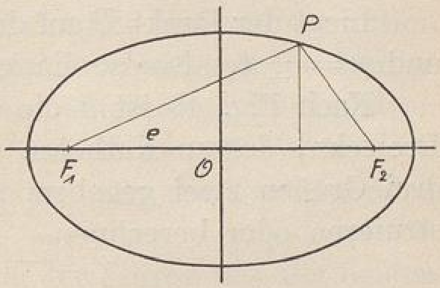

Fig. 44.

Ableitung der Gleichung: Wir legen die X-Achse durch $F_1 F_2$ und die Y-Achse als Lot hierzu durch die Mitte von $F_1 F_2$. Wir setzen $F_1 F_2 = 2\,e$. Wenn nun P ein beliebiger Punkt xy der Ellipse und die Summe seiner Entfernungen von F_1 und F_2 gleich $2\,a$ ist, so wird:

$$PF_1 = \sqrt{(e + x)^2 + y^2}$$
$$PF_2 = \sqrt{(e - x)^2 + y^2}$$

Also: $\sqrt{(e + x)^2 + y^2} + \sqrt{(e - x)^2 + y^2} = 2\,a.$

Um die Wurzeln fortzuschaffen, quadriert man zweimal und erhält schließlich: $a^2 y^2 + x^2(a^2 - e^2) = a^2(a^2 - e^2)$.

Hierin setzt man $a^2 - e^2 = b^2$ (Fig. 45) und erhält:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2} \\ \text{oder:} \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Bezeichnung: Die große Achse heißt Hauptachse ($= 2\,a$), die kleine heißt Nebenachse ($= 2\,b$). F_1 und F_2 sind die Brennpunkte, PF_1 und PF_2 sind die Brennlinien, Brennstrahlen oder Fahrstrahlen. Der Abstand der Brennpunkte vom Zentrum, z. B. OF_2, heißt die Exzentrizität ($= e$). Jede Gerade, die durch den Mittelpunkt geht, ist ein Durchmesser.

Besprechung: Aus der Formel (21) der Ellipse folgt, daß

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

ist. Zu jedem x gehören also zwei gleiche und entgegengesetzte y; die Kurve ist demnach zur X-Achse symmetrisch. Dasselbe läßt sich für die Y-Achse nachweisen.

Liegt der Punkt P auf der X-Achse, so ist $y = 0$ und $x = \pm a$, also ist die große Achse $= 2a$.

Liegt der Punkt P auf der Y-Achse (Fig. 45), so ist $x = 0$ und $y = \pm b$, also ist die kleine Achse gleich $2b$.

Nach Fig. 45 ist a die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten e und b sind. Sind von diesen drei Größen zwei gegeben, so läßt sich die dritte leicht konstruieren oder berechnen.

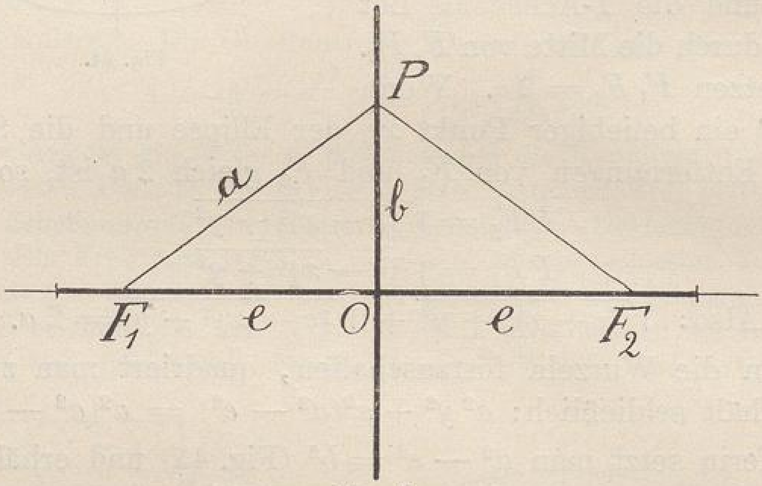

Fig. 45.

Für $x > a$ wird y imaginär und für $y > b$ wird x imaginär. Hier liegen also keine Punkte der Ellipse.

Wird $a = b$, so wird die Ellipse zum Kreis. Dieser ist demnach nur ein besonderer Fall der Ellipse.

Konstruktionen der Ellipse.

1. Aus der Erklärung ergibt sich eine einfache Konstruktion der Ellipse aus der großen Achse und den Brennpunkten. Man teilt die große Achse in zwei beliebig große Teile und schlägt mit dem einen Teil um den einen Brennpunkt, mit dem anderen Teil um den anderen Brennpunkt einen Kreis. Die erhaltenen Kreise schneiden sich in zwei Ellipsenpunkten. Dies Verfahren wiederholt man beliebig oft.