



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Konstruktion der Ellipse

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78413](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78413)

ist. Zu jedem x gehören also zwei gleiche und entgegengesetzte y ; die Kurve ist demnach zur X -Achse symmetrisch. Dasselbe läßt sich für die Y -Achse nachweisen.

Liegt der Punkt P auf der X -Achse, so ist $y = 0$ und $x = \pm a$, also ist die große Achse $= 2a$.

Liegt der Punkt P auf der Y -Achse (Fig. 45), so ist $x = 0$ und $y = \pm b$, also ist die kleine Achse gleich $2b$.

Nach Fig. 45 ist a die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten e und b sind. Sind von diesen drei Größen zwei gegeben, so läßt sich die dritte leicht konstruieren oder berechnen.

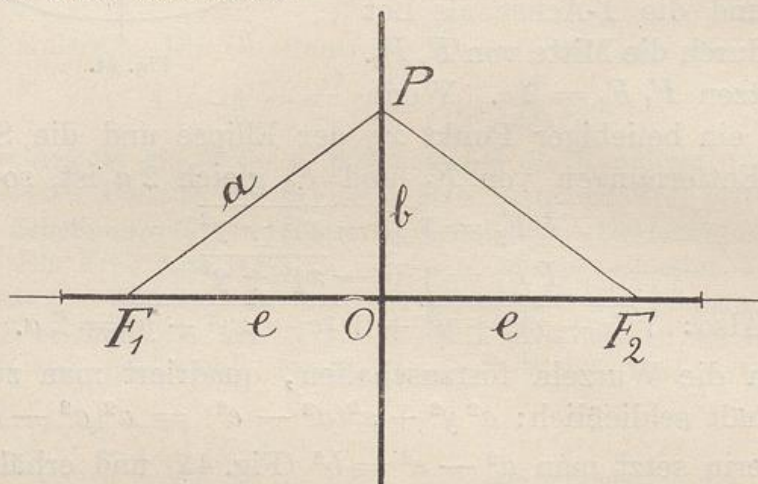


Fig. 45.

Für $x > a$ wird y imaginär und für $y > b$ wird x imaginär. Hier liegen also keine Punkte der Ellipse.

Wird $a = b$, so wird die Ellipse zum Kreis. Dieser ist demnach nur ein besonderer Fall der Ellipse.

Konstruktionen der Ellipse.

1. Aus der Erklärung ergibt sich eine einfache Konstruktion der Ellipse aus der großen Achse und den Brennpunkten. Man teilt die große Achse in zwei beliebig große Teile und schlägt mit dem einen Teil um den einen Brennpunkt, mit dem anderen Teil um den anderen Brennpunkt einen Kreis. Die erhaltenen Kreise schneiden sich in zwei Ellipsenpunkten. Dies Verfahren wiederholt man beliebig oft.

2. Bei der Fadenkonstruktion befestigt man zwei Stifte in den Brennpunkten und schlingt einen unelastischen Faden herum. Dann spannt man durch die Spitze eines Bleistiftes den Faden an und fährt mit ihr an der Innenseite des Fadens hin, indem man zugleich auf das Papier zeichnet. Es entsteht eine Ellipse. In der Praxis ist diese Konstruktion nur dann angebracht, wenn keine große Genauigkeit der Ellipse verlangt wird (z. B. zum Anreißen elliptischer Tischplatten oder elliptischer Gewölbebogen), weil es keinen Faden gibt, welcher unelastisch und gleichzeitig für den vorliegenden Zweck geschmeidig genug ist.

3. Die bequemste Konstruktion der Ellipse aus den beiden Achsen ist folgende (Fig. 46). Man trägt auf einem Papier-

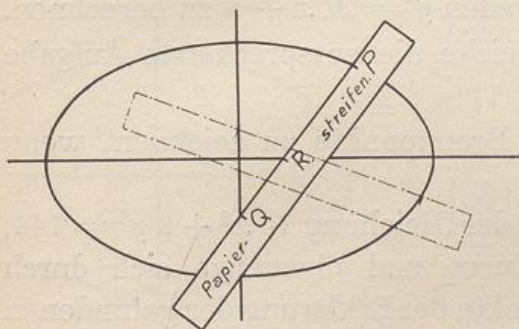


Fig. 46.

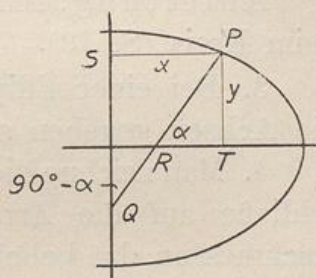


Fig. 47.

streifen mit genau gerader Kante die beiden Halbachsen $PQ = a$ und $PR = b$ von P aus aufeinander ab, so daß $QR = a - b$ ist. Dann verschiebt man den Papierstreifen derart, daß sich der Punkt Q auf der kleinen Achse und der Punkt R auf der großen Achse bewegt. Der Punkt P beschreibt dann eine Ellipse. Man zeichnet bei verschiedenen Stellungen des Streifens den Punkt P von diesem auf das Zeichenpapier mit einem scharfen Bleistift.

Die letztere Ellipsenkonstruktion ist sehr vorteilhaft, weil in der Praxis meist die Achsen der Ellipse gegeben sind und weil keine Hilfslinien auf das Papier gezeichnet werden. Diese Konstruktion gibt auch die Grundlage zu einem Ellipsenzirkel.

Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion ergibt sich nach Fig. 47 wie folgt:

$$y = PR \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \alpha$$

Quadriert: $y^2 = b^2 \cdot \sin^2 \alpha$

Erweitert: $a^2 y^2 = a^2 b^2 \cdot \sin^2 \alpha \dots \dots \dots$ I

$$x = PQ \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = a \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 x^2 = a^2 b^2 \cdot \cos^2 \alpha \dots \dots \dots$$
 II

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \dots \dots \dots$$
 I + II

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$
 Diese Gleichung stellt aber die

Ellipse mit den Halbachsen a und b dar.

Übung: 1. Wie groß ist x für $y = 0$, und wie groß y für $x = 0$?

2. Die Koordinaten des Schnittpunktes der Ellipse $x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$ mit einer Geraden $y = Mx + n$ zu berechnen.

Anleitung: Man vergleiche die entsprechende Aufgabe beim Kreis (S. 19).

3. Bei einer Ellipse die Brennpunkte zu zeichnen, wenn die Achsen gegeben sind.

4. Man zeichne die Kurve der Gleichung $16x^2 + 9y^2 = 144$, schließe auf die Art der Kurve und überzeuge sich durch Nachmessen, daß beliebige Punkte der Erklärung der gefundenen Kurve genügen.

5. Ein Punkt der Ellipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ hat die Ordinate $y_1 = 2$. Wie groß ist seine Abszisse?

6. Zwei Punkte der Ellipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ haben die Abszissen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$. Wie groß ist die zugehörige Sehne?

7. Von einer Ellipse ist $e = 4$ cm und $a = 5$ cm gegeben. Wie lautet ihre Gleichung?

8. Auf der Ellipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ ist ein Punkt mit der Abszisse $x_1 = 2,5$ gegeben. Wie lang sind seine Brennlinien?

Der Parameter.

Wir berechnen die Ordinate y_1 im Brennpunkt, indem wir die Abszisse $x_1 = e$ in die Gleichung der Ellipse einsetzen:

$$e^2 b^2 + y_1^2 a^2 = a^2 b^2$$